



*Томский межвузовский центр
дистанционного образования*

А.Г. Карпов

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Основы теории)

Учебное пособие

ТОМСК – 2004

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра компьютерных систем в управлении
и проектировании (КСУП)**

А.Г. Карпов

ЦИФРОВЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(Основы теории)

Учебное пособие

2004

Корректор: Осипова Е.А.

Карпов А.Г.

Цифровые системы автоматического управления. Основы теории: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 243 с.

В учебном пособии изложены математические основы теории дискретных (цифровых) систем автоматического управления. Приведены математическое описание и методы анализа и синтеза цифровых систем как в рамках классической (частотной) теории, так и в терминах пространства состояний. Обсуждены вопросы влияния квантования сигналов по времени и по уровню на работоспособность и показатели качества цифровых систем автоматического управления.

Учебное пособие предназначено для студентов любых форм обучения, в том числе с применением дистанционных образовательных технологий.

© Карпов Александр Георгиевич, 2004
© Томский межвузовский центр
дистанционного образования, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	7
1 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	9
1.1 Функциональные схемы цифровых систем автоматического управления	9
1.2 Структурные схемы устройств, входящих в состав цифровых систем	11
1.2.1 Устройство выборки и хранения	11
1.2.2 Цифро-аналоговый преобразователь	14
1.2.3 Аналого-цифровой преобразователь	16
2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВАНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ	20
2.1 Цифровые сигналы и кодирование	20
2.2 Квантование по времени	24
2.2.1 О некоторых аспектах выбора периода квантования	24
2.2.2 Реальный квантователь	25
2.2.3 Идеальный квантователь	34
2.3 Восстановление сигналов	42
2.3.1 Импульсная теорема	42
2.3.2 Восстановитель Шеннона	45
2.3.3 Экстраполяторы	46
3 МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	51
3.1 Основы метода	51
3.1.1 Определение z-преобразования	51
3.1.2 Соответствие между s- и z-плоскостями	52
3.1.3 Ограничения метода z-преобразования	57
3.2 Импульсная передаточная функция	58
3.2.1 Определение импульсной передаточной функции	58
3.2.2 Соединения звеньев в дискретной системе	61
3.2.3 Импульсная передаточная функция экстраполятора нулевого порядка	64
3.3 Процессы между моментами квантования	69
3.3.1 Метод дробного квантования	69
3.3.2 Метод модифицированного z-преобразования	73

3.4 Структурный анализ дискретных систем.....	79
4 МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ.....	85
4.1 Уравнения состояния	85
4.1.1 Уравнения динамики систем, содержащих только цифровые элементы	86
4.1.2 Уравнения динамики систем с квантователем и фиксатором	87
4.1.3 Прямое и обратное время в уравнениях состояния	89
4.2 Решение уравнений состояния	90
4.2.1 Переходная матрица состояния	90
4.2.2 Сопряженная система	99
4.2.3 Общее решение.....	101
4.3 Передаточные функции и уравнения состояния	104
4.3.1 Матричная импульсная передаточная функция.....	104
4.3.2 Диаграмма состояний	106
4.3.3 Переход к уравнениям состояния от передаточной функции.....	109
4.3.4 Диаграмма состояний цифровых систем с непрерывной частью	117
4.4 Управляемость и наблюдаемость цифровых систем	120
4.4.1 Понятия управляемости и наблюдаемости.....	120
4.4.2 Определение управляемости по уравнениям динамики ...	121
4.4.3 Определение наблюдаемости по уравнениям динамики ..	125
4.4.4 Блочное разбиение системы.....	127
5 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	133
5.1 Применение УВХ.....	133
5.2 Численное интегрирование.....	136
5.2.1 Метод прямоугольников.....	137
5.2.2 Метод трапеций	139
5.3 Метод z-форм	140
5.4 Метод пространства состояний с применением УВХ.....	144
6 АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СИСТЕМ	152
6.1 Устойчивость дискретных систем	152
6.1.1 Необходимое и достаточное условие устойчивости	152
6.1.2 Алгебраические критерии устойчивости.....	154

6.3.1 Критерий Михайлова	155
6.1.4 Критерий Найквиста	160
6.2 Переходной процесс	165
6.3 Установившийся процесс	166
7 СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ.....	172
7.1 Общие схемы синтеза.....	172
7.2 Синтез последовательного аналогового регулятора	176
7.2.1 Аппроксимация УВХ звеном постоянного запаздывания..	177
7.2.2 Использование билинейного преобразования	181
7.3 Синтез аналогового регулятора в цепи обратной связи	186
7.4 Последовательный цифровой регулятор	190
7.4.1 Импульсные фильтры	190
7.4.2 Реализация цифровых регуляторов на ЦВМ.....	196
7.4.3 Синтез цифрового регулятора с применением билинейного преобразования	203
7.4.4 Цифровой ПИД-регулятор	207
7.5 Синтез цифровых систем управления с конечным временем переходного процесса	209
7.5.1 Основы метода.....	209
7.5.2 Физическая реализуемость регулятора.....	211
7.5.3 Синтез цифрового регулятора	214
7.6 Синтез цифровой системы в пространстве состояний.....	218
8 ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИКРОПРОЦЕССОРА КАК УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА В СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ	225
8.1 Микропроцессор как контроллер в системах управления	225
8.2 Влияние квантования по уровню	229
8.3 Статистический учет ошибок квантования по уровню	232
8.4 Анализ предельного цикла	235
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	242
ПРИЛОЖЕНИЕ	243

ПРЕДИСЛОВИЕ

С точки зрения технической реализации, на современном уровне развития технологии системы автоматического управления (регулирования), как правило, представляют собой микропроцессорные системы управления. Наличие в системе управления элементов цифровой техники вносит определенные особенности в методы анализа и синтеза таких систем. Инженер-разработчик цифровых систем может с удивлением обнаружить, что обычные методы исследования непрерывных линейных систем не только не приведут к ожидаемому результату, но и дадут прямо противоположный эффект. Упомянутые особенности и эффекты не рассматриваются в других курсах, в том числе в курсе «Теория управления», и касаются как представления сигналов в подобных системах (квантование и дискретизация), так и проектирования управляющей части системы (цифровой регулятор), а также анализа всей системы управления в целом.

Первый раздел учебного пособия посвящен общим вопросам функционирования и структуры цифровых систем автоматического управления. Вопросы представления и преобразования сигналов в цифровых системах рассмотрены во втором разделе. Метод z -преобразования и метод пространства состояний в дискретном варианте изложены в третьем и четвертом разделах соответственно. Цифровое моделирование непрерывных систем управления и их переоборудование на базе цифровой техники являются весьма актуальными вопросами, поэтому автор счел необходимым рассмотреть эти проблемы в пятом разделе. Некоторые вопросы анализа и синтеза цифровых систем приведены соответственно в шестом и седьмом разделах. Влияние ограничений, связанных с относительно низкой скоростью вычислений и небольшой разрядной сеткой микропроцессоров, на качество работы цифровой системы рассмотрено в последнем, восьмом разделе.

Чтобы не возникало путаницы в терминологии, под цифровой системой будем понимать систему автоматического управления, в контуре регулирования которой имеются любые цифровые элементы, в том числе это может быть микропроцессор, микро- или мини-ЭВМ и т.п.

При изучении данного учебного пособия предполагается, что читатель знаком с основами теории управления и математическими основами теории систем, особенно с разделами, в которых изложены дискретное преобразование Лапласа, теория *z-преобразования*, теория линейных разностных уравнений и теория векторно-матричных линейных дифференциальных уравнений [7].

1 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

1.1 Функциональные схемы цифровых систем автоматического управления

В наиболее общем виде простейшая цифровая система автоматического управления выглядит так, как это представлено на рисунке 1.1.

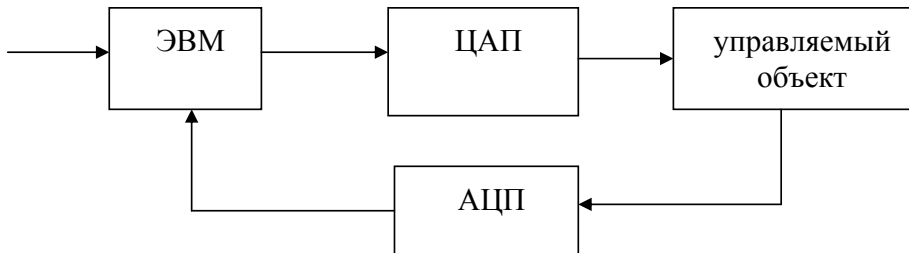


Рисунок 1.1

Под ЭВМ здесь понимается любая цифровая система, реализованная либо в виде управляющей мини-ЭВМ, либо на базе микропроцессора, либо даже на универсальной ЭВМ. Интерфейсом между ЭВМ и управляемым объектом, который, как правило, является аналоговым устройством, служат аналого-цифровой и цифро-аналоговый преобразователи (АЦП и ЦАП).

Делая акцент на связи с объектом, представим эту схему более подробно, конкретизируя представление ЭВМ в виде микропроцессорной системы (МПС) с микропроцессором (МП) в основе (рисунок 1.2).

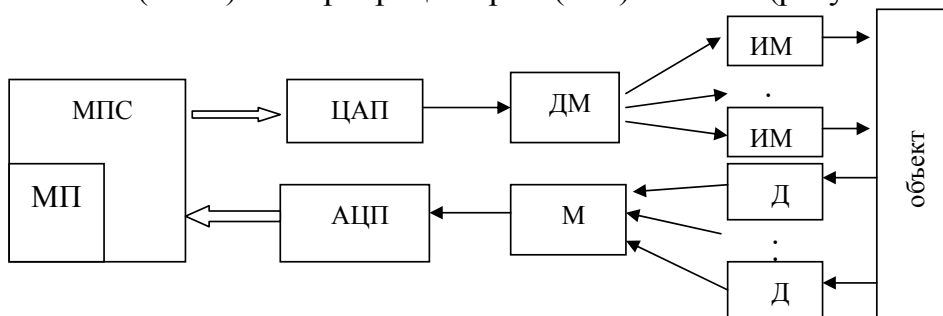


Рисунок 1.2

Поскольку входной и выходной сигнал объекта может быть вектором, то на рисунке 1.2 выделена совокупность исполнительных механизмов (ИМ), непосредственно воздействующих на объект, и датчиков (Д), измеряющих значения выходных переменных объекта. Для разнесения параллельно поступающей с датчиков информации во времени служит мультиплексор (М), а для обратной операции, т.е. для распределения последовательно поступающей с ЦАП информации на соответствующие исполнительные механизмы, предназначен демультиплексор (ДМ).

Если делать акцент на структуре и свойствах микропроцессорной техники, то функциональную схему цифровой системы лучше изобразить так, как это сделано на рисунке 1.3. На этой схеме отражены также модульность и магистральность микропроцессорной системы.

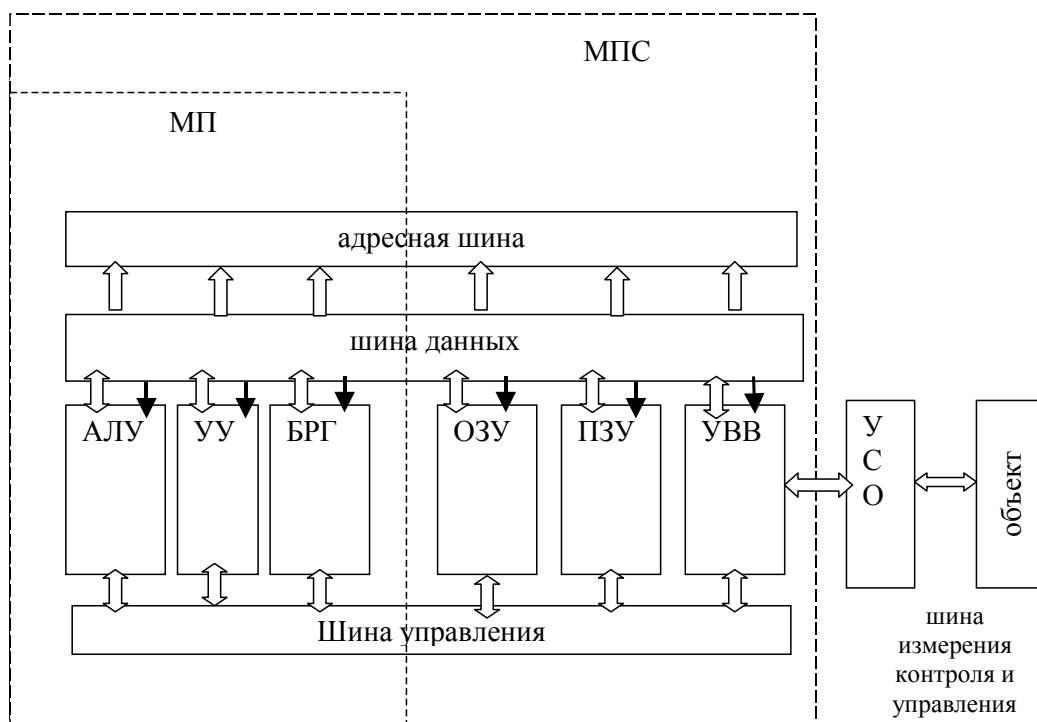


Рисунок 1.3

МП включает арифметико-логическое устройство (АЛУ), устройство управления (УУ) и блок регистров (БРГ), в свою очередь

содержащий (на рисунке 1.3 не показаны) регистры: аккумуляторный, адресный, флаговые, состояния, счетчик, общего назначения, стековые и т.д.

МПС, помимо одного или нескольких МП, включает оперативное и постоянное запоминающие устройства (ОЗУ и ПЗУ), устройства ввода-вывода (УВВ) и ряд других устройств.

Взаимодействие частей МПС осуществляется с помощью шин: адресной, данных и управления, связывающих в единую систему компоненты МПС. Непосредственная взаимосвязь МПС с объектом обеспечивается устройством связи с объектом (УСО) и шинами измерения, контроля и управления.

Таким образом, для цифровой системы управления необходимы: сама МПС, ЦАП, осуществляющий операцию декодирования над цифровыми данными; АЦП, преобразующий аналоговый сигнал в цифровой код; устройство выборки и хранения (УВХ) как часть ЦАП и АЦП; сам объект управления; а также, если необходимо, мультиплексор и демultipлексор.

1.2 Структурные схемы устройств, входящих в состав цифровых систем

Для дальнейшего исследования цифровых систем понадобится соответствующее описание различных элементов и устройств, входящих в состав цифровой системы автоматического управления.

1.2.1 Устройство выборки и хранения

Под квантованием в дискретных и, в частности, в цифровых системах понимают преобразование аналоговых сигналов в последовательность амплитудно-модулированных (чаще всего, хотя возможны и другие виды модуляции) импульсов или кодов. Устройство фиксации в простейшем случае сохраняет или «замораживает» значение импульсного или цифрового сигнала в течение определенного времени. Часто квантователь и фиксатор объединяют конструктивно в одно устройство и называют его устройством выборки и хранения (УВХ).

Одной из главных задач УВХ является фиксация быстро меняющегося сигнала при различных его дальнейших преобразованиях. Другим назначением УВХ является запоминание выходного сигнала мультиплексора. УВХ часто объединяют с АЦП и ЦАП. В первом случае УВХ нужно для фиксации входного сигнала на время его оцифровки. Во втором случае УВХ предназначено для фильтрации (сглаживания) сигнала на выходе ЦАП.

Работу УВХ можно описать следующей простой принципиальной схемой (рисунок 1.4).

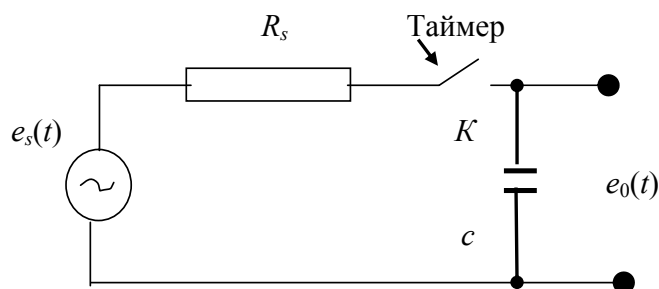


Рисунок 1.4

Меняющийся во времени сигнал $e_s(t)$ поступает с источника тока с внутренним сопротивлением R_s . Квантователь условно изображен на рисунке 1.4 в виде ключа K . После замыкания ключа емкость C заряжается до напряжения $e_s(t)$, а после размыкания это напряжение сохраняется до следующего замыкания ключа. Работа УВХ поясняется эпюрами сигналов, представленных на рисунке 1.5.

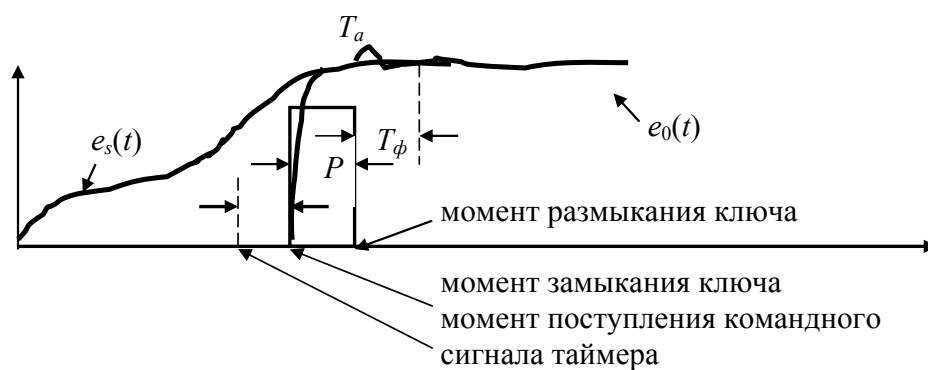


Рисунок 1.5

Операции выборки и хранения инициируются таймером. Различают следующие параметры УВХ:

- время выборки p – время, в течение которого ключ замкнут;
- апертурное время T_a – время от момента поступления командного сигнала таймера до срабатывания (замыкания) ключа;
- время установления при фиксации T_ϕ – время переходных процессов после размыкания ключа;
- время между командными сигналами называется периодом квантования T .

Хотя УВХ представляет собой единый блок, для анализа на структурной схеме (рисунок 1.6) удобнее рассматривать процессы квантования и хранения отдельно.

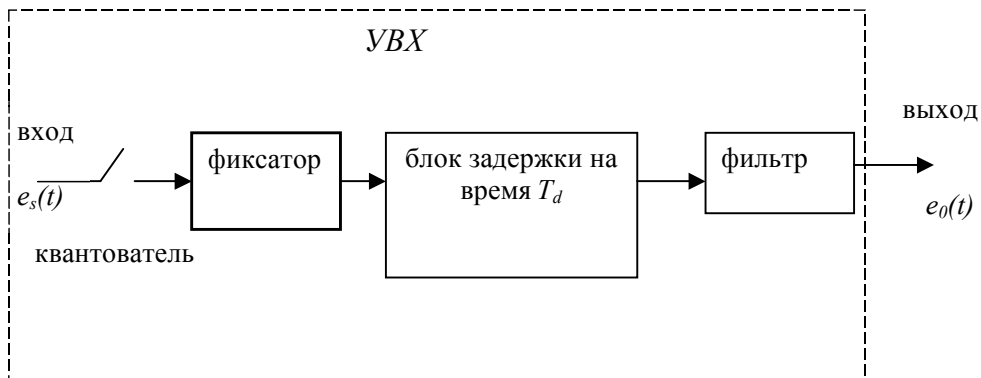


Рисунок 1.6

Квантователь можно рассматривать как амплитудно-импульсный модулятор, обеспечивающий время выборки p .

Фиксатор сохраняет квантованный по времени сигнал постоянным в течение времени хранения. Предполагается, что в течение этого времени разрядом конденсатора C можно пренебречь. Время задержки T_d объединяет время выборки и апертурное время.

Фильтр отражает динамику переходных процессов в буферных усилителях следующих за УВХ каскадов.

Импульсный элемент на этой схеме называется квантователем с конечной длительностью импульса. Если это время мало по сравнению с периодом квантования ($p \ll T$) и изменением аналогового сигнала, и также мало апертурное время ($T_a \ll T$), то ими можно пренебречь. Обычно можно пренебречь и переходными процессами,

обусловленными следующими за УВХ устройствами. Структурная схема УВХ получается при этом весьма простой (см. рисунок 1.7).

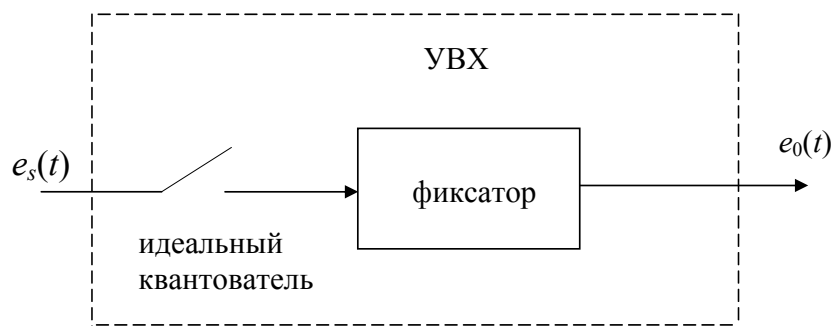


Рисунок 1.7

На этой схеме показаны идеальный квантователь, длительность замыкания ключа которого стремится к нулю, и фиксатор, выходной сигнал которого постоянен в течение периода квантования T и равен входному сигналу в момент срабатывания квантователя.

1.2.2 Цифро-аналоговый преобразователь

Цифро-аналоговое преобразование, или декодирование, заключается в преобразовании числа, представленного в виде машинного слова, в эквивалентный аналоговый сигнал.

Принцип действия устройств, осуществляющих такое преобразование, может быть различным, так же как и конструктивное исполнение (эти вопросы, касающиеся, впрочем, и АЦП, рассматриваются в курсе «Микропроцессорные устройства»). Здесь же достаточно в качестве примера рассмотреть блок-схему наиболее распространенного ЦАП (рисунок 1.8).

Назначение логической схемы – управление через электронные ключи подключением источника опорного напряжения или тока к входам резистивной матрицы в соответствии со значением каждого разряда входного цифрового сигнала. Предполагается, что каждый разряд машинного слова подается на соответствующий вход логической схемы. Если значения разрядов машинного слова

поступают последовательно, то необходим соответствующий де-мультиплексор (на рисунке не показан). Для согласования выходного сигнала ЦАП с последующими устройствами резистивная матрица соединена с усилителем постоянного тока (УПТ).

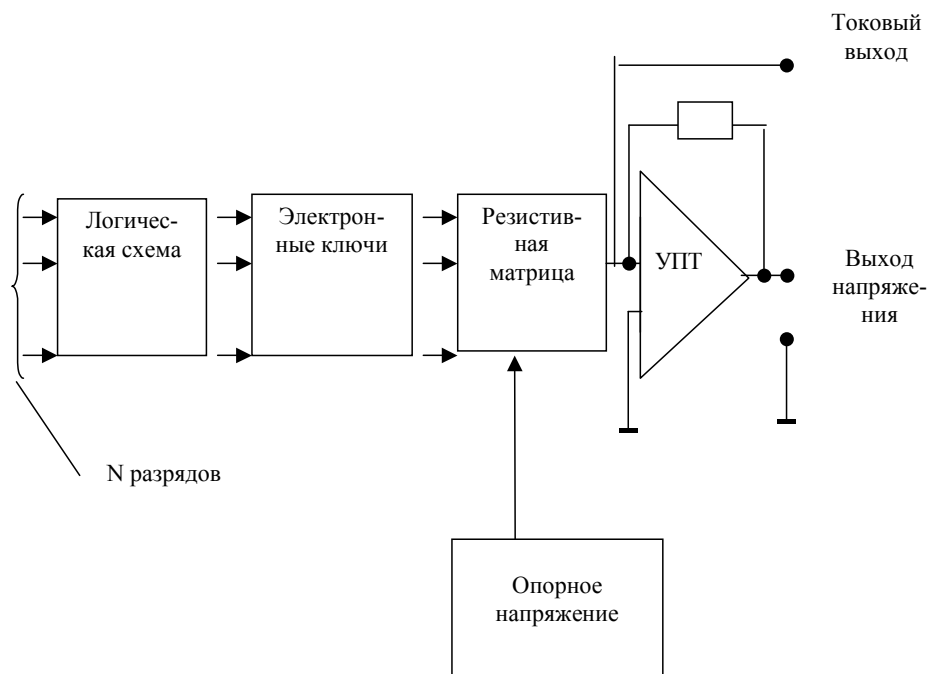


Рисунок 1.8

Так как при цифро-аналоговом преобразовании машинное слово преобразуется в аналоговый сигнал соответствующей амплитуды, то ЦАП на структурной схеме можно представить в виде декодера и УВХ (см. рисунок 1.9, а). В декодере цифровое слово преобразуется в число или в амплитудно-модулированный импульсный сигнал. Для хранения значения этого сигнала до начала следующего цикла цифро-аналогового преобразования служит УВХ. Из принципа действия ЦАП следует, что вообще-то квантователь, входящий в состав УВХ, совершенно не нужен. Квантователь присутствует в структурной схеме лишь постольку, поскольку УВХ является единым блоком.

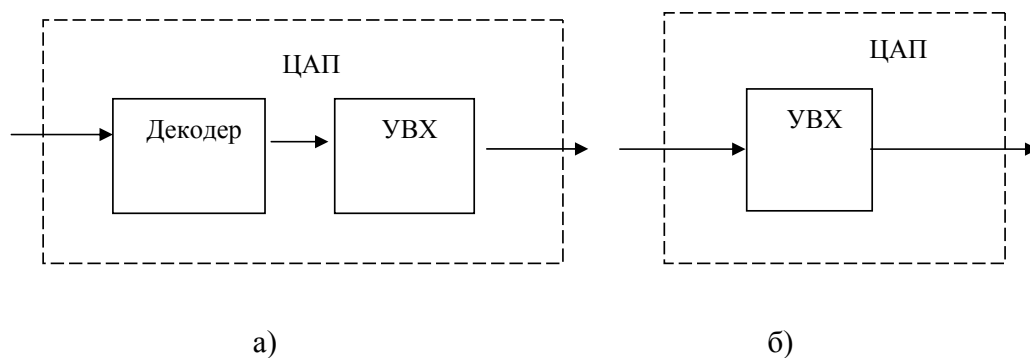


Рисунок 1.9

С информационной точки зрения, сигнал на выходе декодера равен (эквивалентен) сигналу на его входе, только представлен в другой форме, поэтому передаточная функция декодера принимается равной единице и упрощенная структурная схема ЦАП принимает вид, представленный рисунком 1.9, б. Упрощения здесь связаны также с пренебрежениями нелинейностями декодера.

1.2.3 Аналого-цифровой преобразователь

Аналого-цифровое преобразование, или кодирование, заключается в преобразовании аналогового сигнала в цифровой вид.

Если рассматривать преобразование числа, то АЦП совершает две операции: квантование по уровню и кодирование.

Когда речь идет о преобразовании непрерывно изменяющегося сигнала (тока или напряжения), то АЦП выполняет следующие операции: выборку (квантование по времени) и хранение, квантование по уровню, кодирование. Квантование по времени необходимо для выборки меняющегося аналогового сигнала в периодически повторяющиеся моменты времени. Хранение необходимо потому, что процесс преобразования аналог – код занимает определенное время и хотелось бы, чтобы за это время оцифровываемый сигнал сохранял свое значение. Необходимость квантования по уровню будет показана в разделе 2.1. Шифратор преобразует дискретные значения сигнала в машинные слова соответствующей разрядности.

Так же, как в случае ЦАП, принципиальные схемы и конструктивное исполнение АЦП рассматривать не будем, дабы не дублиро-

вать соответствующие разделы курса «Микропроцессорные устройства систем управления».

В соответствии с вышесказанным, структурную схему АЦП можно представить следующим образом (см. рисунок 1.10).



Рисунок 1.10

Обычно на вход АЦП подается сигнал в виде тока или напряжения, который квантуется по уровню. Статическая характеристика квантователя по уровню имеет вид ступенчатой ломаной линии, то есть является нелинейной. Максимальная погрешность квантования, равная половине значения младшего разряда, умноженной на максимальное значение числа (МЗЧ), будет всегда добавляться к реальным аппаратным ошибкам АЦП.

Конечное время преобразования аналог – код приводит к появлению запаздывания, которое неблагоприятно влияет (как будет видно в дальнейшем) на устойчивость всей цифровой системы управления. Кроме того, время преобразования накладывает ограничение на частоту входного сигнала. В современных АЦП это время лежит в пределах от 100 нсек. до 200 мсек. Если сигнал за это время значительно изменится, то неизбежно появится неопределенность при его оцифровке. Оценить допустимую изменчивость сигнала на входе можно следующим образом.

Пусть за время оцифровки T_c входной сигнал $e_s(t)$ изменился на величину (см. рисунок 1.11):

$$\Delta V \approx \left. \frac{de_s(t)}{dt} \right|_{t=t_c} T_c .$$

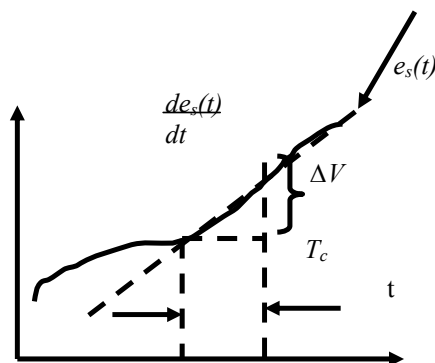


Рисунок 1.11

Чтобы к ошибкам АЦП не добавлялась еще и ошибка, обусловленная изменениями входного сигнала, величина ΔV не должна превышать разрешения АЦП, которое составляет 2^{-n} МЗЧ. Отсюда получаем условие:

$$\Delta V \leq 2^{-n} \text{МЗЧ}, \text{ или } \frac{de_s}{dt} \leq 2^{-n} \frac{\text{МЗЧ}}{T_c}.$$

Частота входного сигнала при этом не должна превышать $1/2^{n-1}T_c$.

Время квантования может быть уменьшено применением более быстродействующих АЦП, а ограничение на частоту входного сигнала может быть снижено использованием соответствующих УВХ на входе.

Если разрешение АЦП велико, то нелинейными эффектами от квантования по уровню можно пренебречь, то есть принять характеристику квантователя линейной, представляющей прямую линию, являющуюся биссектрисой первого и третьего координатных углов.

В этом случае квантователь по уровню и шифратор на рисунке 1.10. предстанут линейными безынерционными блоками с коэффициентом усиления, равным единице, и упрощенная структурная схема АЦП будет выглядеть так, как это изображено на рисунке 1.12.

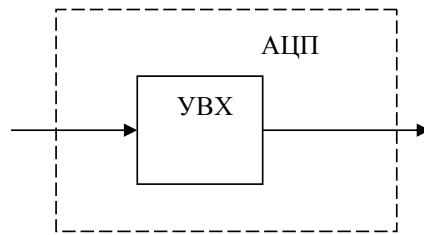


Рисунок 1.12

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВАНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ

2.1 Цифровые сигналы и кодирование

Информация, используемая в цифровых системах, может быть как числовой, так и нечисловой. Но в обоих случаях она представляется одинаково – в виде двоичных чисел. Группа двоичных чисел, обрабатываемых одновременно, называется машинным словом или кодом. Точность ЭВМ определяется длиной слова, то есть числом двоичных цифр, составляющих слово. Стандартная длина слова в микропроцессоре – 8 бит или один байт. Так как регистры и аккумулятор также оперируют с 8-разрядными словами, то увеличение точности возможно только при использовании слов двойной длины и соответствующих алгоритмов обработки.

Одна из интерпретаций машинного слова, представляемого в микропроцессоре, заключается в обозначаемой этим словом величине. Другая – состоит в том, что это слово представляет собой некоторый код или команду для выполнения определенными узлами и блоками МП некоторых операций.

Интерпретация команд следующая. По числу ячеек памяти, необходимых для размещения одной команды, различают команды длиной в одно, два или три слова. Команды длиной в два или три слова требуют для выборки соответственно 2 или 3 такта обращения к памяти. При обозначении команды в ней выделяют поля, то есть группы разрядов, которые определяют тип команды, ее длину, выполняемую операцию.

Например, команды, связанные с обработкой данных, имеют формат:

тип команды	код операции	регистр 1	регистр 2
-------------	--------------	-----------	-----------

Здесь в команде 4 поля.

Пять полей имеют команды обращения к памяти:

тип команды	код операции	вид адресации	номер регистра	адрес
-------------	--------------	---------------	----------------	-------

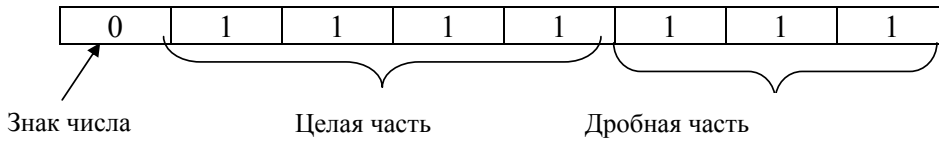
Цифровые данные в микропроцессоре представляются в форме с фиксированной и с плавающей запятой. В первом случае для целой и дробной части числа выделяется фиксированное число разрядов.

Старший разряд отводится под знак числа.

Например, для 8-разрядного слова с четырьмя разрядами для целой части числа и тремя – для дробной наибольшее представимое число равно:

$$N_{\max} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} = 15 \frac{7}{8}.$$

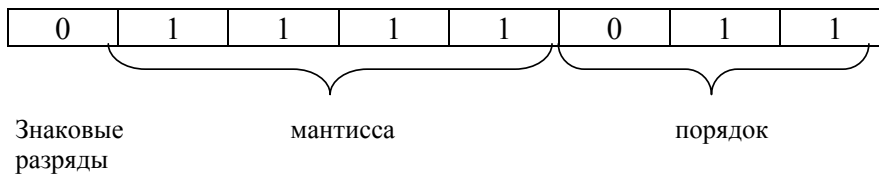
А само слово выглядит так:



В случае представления числа с плавающей запятой выделяется фиксированное число разрядов для мантиисы и для порядка. Старший разряд и в мантиссе, и в порядке выделяется под соответствующий знак. Мантисса обычно нормализуется, и ее значение лежит в пределах от 0,5 до 1. Например, для 8-разрядного слова, в котором под мантиссу выделено $m = 5$ разрядов, а под порядок $n = 3$ разряда, наибольшее представимое таким образом число будет равно:

$$N_{\max} = (1 - 2^{-(m-1)})2^{(2^{(n-1)}-1)} = (1 - \frac{1}{16})2^3 = 7.5.$$

Само слово при этом выглядит следующим образом:



Возможны и другие представления данных, например, двоично-десятичное представление, когда то же 8-разрядное слово интер-

претирается как две 4-разрядные группы – тетрады, каждая из которых кодирует десятичную цифру: такое двоично-десятичное представление позволяет закодировать числа от 0 до 99 (знак числа не учитывается).

При изучении АЦП и ЦАП важно понимать вес каждого разряда машинного слова. Схемы АЦП и ЦАП базируются на двоичном представлении числа с использованием двоичного кода дробного числа.

При таком представлении старший бит n -разрядного числа имеет вес $1/2$ от максимально возможного значения числа (МЗЧ), а младший – 2^{-n} . Например, для 3-разрядного двоичного слова дробного числа имеем следующую таблицу:

число	0	1/8	1/4	3/8	1/2	5/8	3/4	7/8
двоичное слово	0.000	0.001	0.010	0.011	0.100	0.101	0.110	0.111

Здесь предполагается, что МЗЧ равно единице. Эту таблицу можно представить в виде графика (рисунок 2.1).

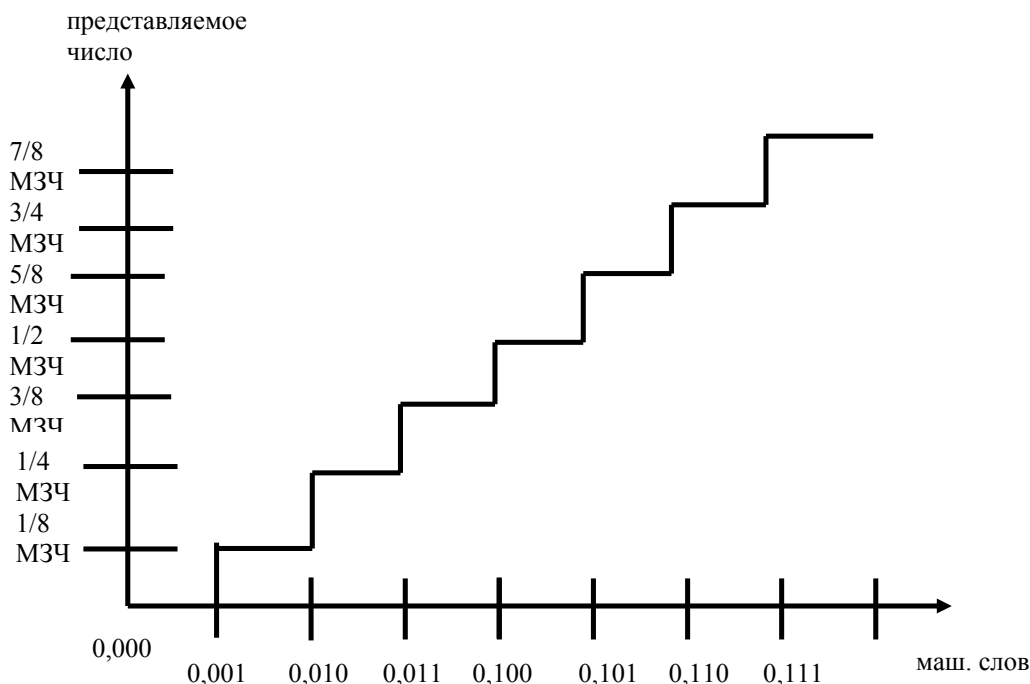


Рисунок 2.1

Независимо от того, целое число или дробное требуется представить машинным словом, число различных состояний (кодов) равно 2^n с разрешением $1/2^n$. Разрешение может быть улучшено увеличением разрядности слова. Но при этом максимальное значение числа должно быть сохранено. Таким образом, поскольку количество разрядов в машинном слове конечно, то и АЦП обеспечивает конечное разрешение.

Представление информации в цифровой системе в цифровой форме приводит к необходимости преобразования непрерывных сигналов в соответствующую цифровую форму. Одной из главных операций при аналого-цифровом преобразовании является процедура квантования, то есть преобразование континуального множества значений сигнала в конечное множество. Так как цифровой выход, например, АЦП может иметь конечное число состояний, то аналоговое число должно быть проквантовано, или округлено до ближайшего возможного значения, кратного $q = 1/2^n$ МЗЧ. Часть характеристики такого квантователя показана на рисунке 2.2. Такое преобразование, как видно, не является однозначным и, кроме того, существенно нелинейно.

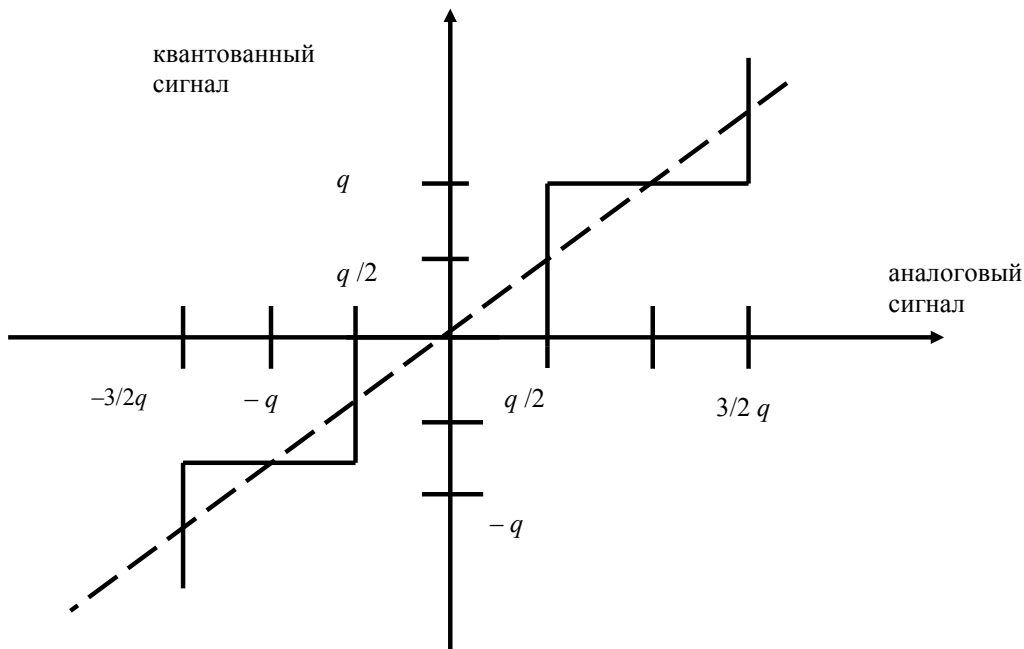


Рисунок 2.2

Шаг квантования q напрямую связан с младшим разрядом машинного слова. Разница между аналоговым и квантованным сигналом называется ошибкой квантования. Из рисунка видно, что эта ошибка лежит в пределах $\pm q/2$ и равна нулю только при значениях аналогового сигнала, кратного q .

Важно помнить, что рабочий диапазон квантователя равен не МЗЧ, а $(1 - 2^{-n})$ МЗЧ, где n – число разрядов машинного слова. Можно выходить за этот рабочий диапазон, но не более, чем на $q/2$. В этом случае максимальная ошибка квантования не превысит $\pm q/2$.

2.2 Квантование по времени

Операции выборки и хранения весьма важны, и поэтому необходимо разработать достаточно простую и в то же время адекватную реальным процессам математическую модель операций выборки и хранения.

УВХ является единым устройством, но, с математической точки зрения, удобнее рассматривать операции выборки (квантования) и хранения отдельно.

Сначала рассмотрим квантование сигнала во времени. Операция квантования – это преобразование непрерывного (аналогового) сигнала в модулированный импульсный или цифровой сигнал. Поэтому, какой из информационных параметров импульса подлежит модуляции входным непрерывным сигналом, различают следующие виды импульсной модуляции: амплитудно-импульсная (меняется амплитуда импульса), широтно-импульсная (меняется длительность или ширина импульса), время-импульсная (меняется временное положение импульса), которая, в свою очередь, делится на частотно-импульсную и фазо-импульсную. Самый простой и в то же время самый распространенный вид модуляции – амплитудно-импульсная, которую далее и будем рассматривать.

2.2.1 О некоторых аспектах выбора периода квантования

Проектирование цифровых систем всегда сталкивается с проблемой выбора периода квантования. Этот выбор зависит от многих

факторов, связанных с сигналом и с характеристиками системы управления.

С одной стороны, минимальный период квантования ограничен временем аналого-цифрового преобразования и задержками сигнала в УВХ. Но, кроме этих устройств, есть еще и другие компоненты системы. Если в составе цифровой системы есть мультиплексор, то есть осуществляется передача параллельно представленной информации в последовательные моменты времени, или если сигнал обрабатывается микропроцессором, который является относительно медленным цифровым устройством, то это также накладывает существенные ограничения на максимальную скорость обработки сигнала. Таким образом, в цифровых системах максимальная частота квантования редко ограничивается лишь характеристиками УВХ и АЦП.

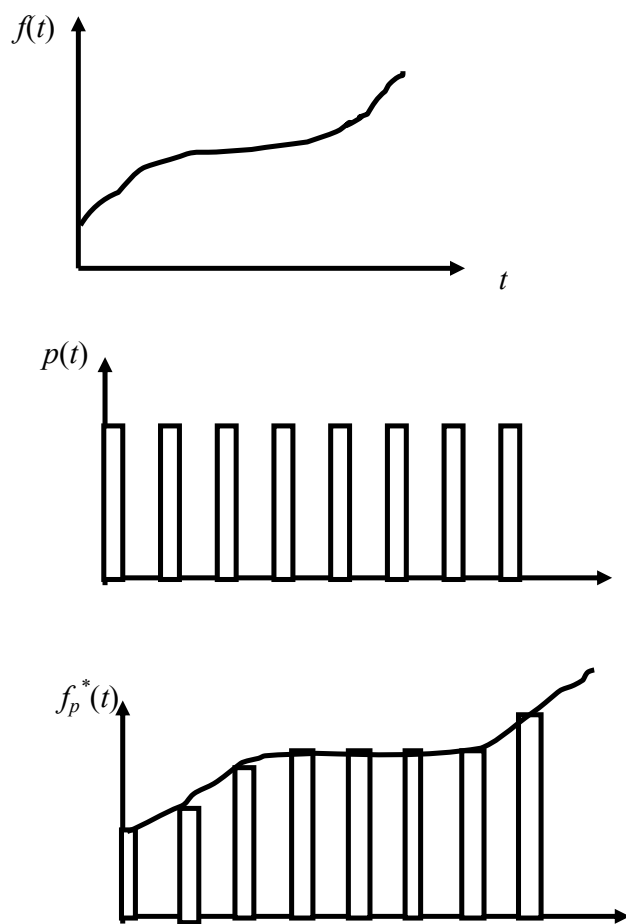
С другой стороны, существуют ограничения снизу на частоту квантования. УВХ и АЦП должны работать достаточно быстро, чтобы информация, содержащаяся в сигнале, не была потеряна в течение операции оцифровки или выборки и хранения. Ограничения с этой стороны задаются условиями теоремы отчетов (другие названия – теорема Котельникова, теорема Котельникова-Шеннона, импульсная теорема). Согласно данной теореме, для того чтобы информация, содержащаяся в непрерывном сигнале, не была бы потеряна, его нужно квантовать с частотой, большей, чем удвоенная максимальная частота сигнала.

Кроме того, квантование с малой частотой чревато ухудшением качества управления и даже потерей устойчивости системы в целом.

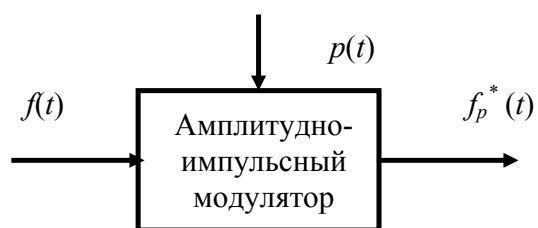
2.2.2 Реальный квантователь

Пусть время выборки p конечно. Тогда, обозначая непрерывный сигнал через $f(t)$, на выходе квантователя будем иметь $f_p^*(t)$ – последовательность импульсов длительностью p и амплитудой $f(t)$ (см. рисунок 2.3, а).

Можно представить квантователь в виде модулятора, где входной сигнал $f(t)$ умножается на сигнал $p(t)$ – несущую последовательность импульсов единичной амплитуды (см. рисунок 2.3, б) $f_p^*(t) = f(t)p(t)$.



а)



б)

Рисунок 2.3

Амплитудно-импульсный модулятор является линейным устройством, так как связь между информационным параметром выходных импульсов – амплитудой – и входным сигналом – линейна.

Запишем соотношение вход-выход амплитудно-импульсного модулятора во временной области. Несущий сигнал представим в виде разности ступенек, смещенных по оси времени на величину p :

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1(t - kt) - 1(t - kt - p)), \quad p < T,$$

где через $1(t)$ обозначена единичная ступенчатая функция:

$$1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0; \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда выход квантователя будет:

$$f_p^*(t) = f(t) \cdot p(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1(t - kt) - 1(t - kt - p)). \quad (2.1)$$

Исследуем теперь частотные характеристики сигнала на выходе квантователя. Поскольку сигнал $p(t)$ является периодическим, его можно с успехом представить рядом Фурье:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t}, \quad (2.2)$$

где частота квантования $\omega_s = 2\pi/T$, а коэффициенты разложения $p(t)$ в ряд Фурье C_n равны:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_0^p e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1 - e^{-jn\omega_s p}}{jn\omega_s T} = \\ &= \frac{p \sin n\omega_s p / 2}{T n\omega_s p / 2} e^{-jn\omega_s p / 2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Последний переход в этом выражении осуществлен выносом экспоненты с половинным показателем и применением формулы Эйлера. Кроме того, для удобства в знаменателе (2.3) выделен аргумент синуса умножением числителя и знаменателя на p . Подставив формулу (2.2) в соотношение (2.1), возьмем преобразование Фурье (предполагая, что таковое существует) от правой и левой части полученного выражения:

$$F_p^*(j\omega) = F\{f_p^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_p^*(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n f(t) e^{jn\omega_s t} e^{-j\omega t} dt.$$

В последнем выражении меняем порядок интегрирования и суммирования и используем теорему умножения на экспоненту, которая гласит, что умножение оригинала на $e^{jn\omega_s t}$ приводит к смещению изображения на ω_s :

$$F\{e^{jn\omega_s t} \cdot f(t)\} = F(j\omega - jn\omega_s).$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} F_p^*(j\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega - jn\omega_s) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n F(j\omega + jn\omega_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{T} \frac{\sin n\omega_s p/2}{n\omega_s p/2} e^{(jn\omega_s p/2)} F(j\omega + jn\omega_s). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Исследуем полученное выражение. Прежде всего посмотрим, что будет при $n=0$.

$$C_0 = \lim_{n \rightarrow 0} C_n = \frac{p}{T}.$$

В (2.4) возьмем только член с $n=0$:

$$F_p^*(j\omega)_{n=0} = C_0 F(j\omega) = \frac{p}{T} F(j\omega).$$

Отсюда следует вывод первый: гармоники, содержащиеся во входном сигнале, содержатся и в выходном, но их амплитуды отличаются в p/T раз.

Для $n \neq 0$ коэффициенты C_n , как видно из формулы (2.3), вообще говоря, комплексные величины, но их модуль, представляющий, согласно выражению (2.2), частотный спектр $p(t)$, равен:

$$|C_n| = \frac{p}{T} \left| \frac{\sin n\omega_s p/2}{n\omega_s p/2} \right|. \quad (2.5)$$

Этот спектр линейчатый, а не непрерывный и изображен на рисунке 2.4, а. Пунктиром показана огибающая этого спектра (функция Sinx/x).

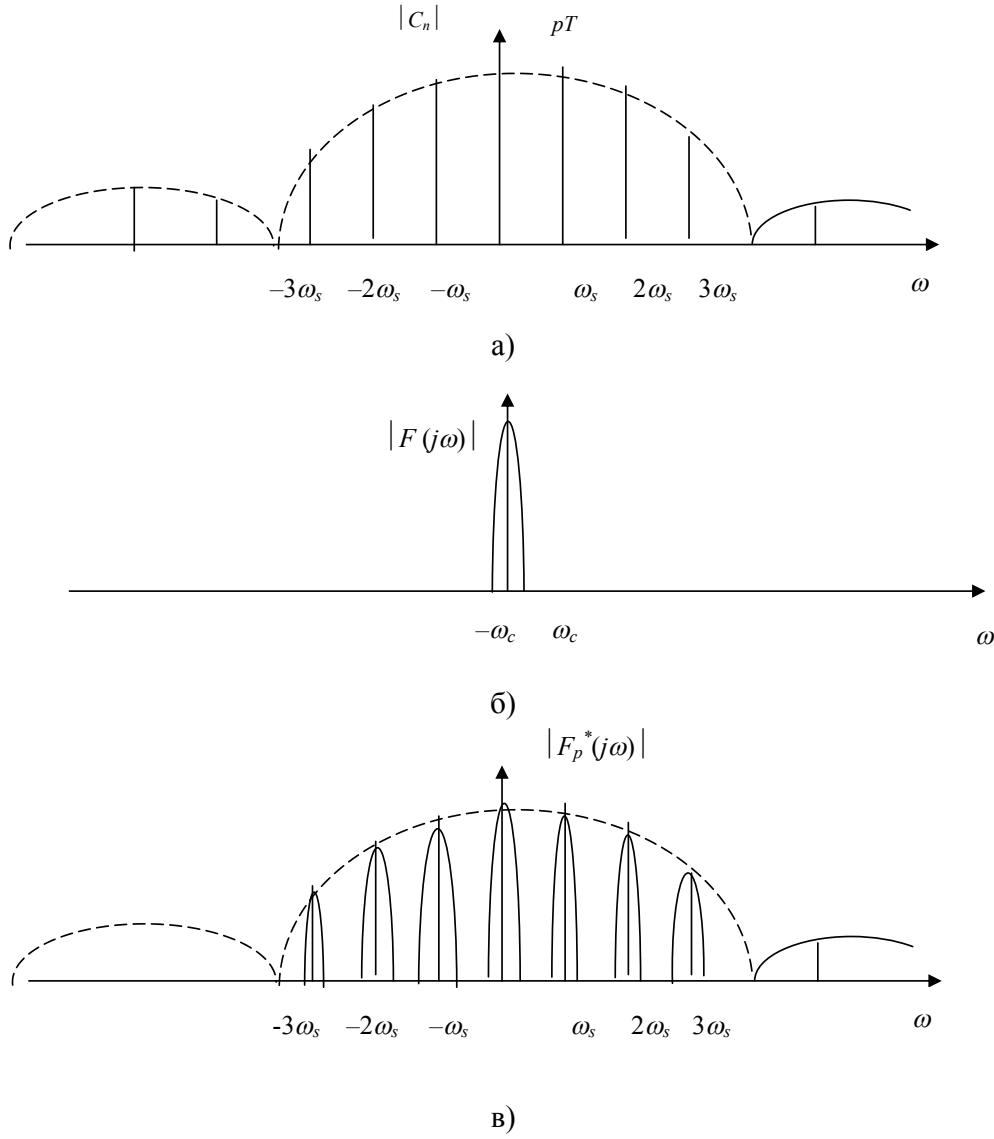


Рисунок 2.4

Используя известное соотношение (модуль суммы не превышает суммы модулей) для спектра выходного сигнала, имеем:

$$\left| F_p^*(j\omega) \right| \leq \sum |C_n| \cdot \left| F(j\omega + jn\omega_s) \right|. \quad (2.6)$$

В случае, если входной сигнал имеет ограниченный в полосе частот ω_c спектр и $\omega_c < \omega_s/2$. (см. рисунок 2.4, б), из (2.6) и (2.5) и иллюстрирующего этот случай рисунка 2.4, в получаем вывод второй: спектр выходного сигнала содержит не только неизменной формы (по сравнению с входным непрерывным сигналом) основную ($n=0$) составляющую, но и такой же формы (правда, с другой амплитудой, зависящей от $|C_n|$) транспонированные составляющие ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Ясно, что в случае $\omega_c > \omega_s/2$ спектр выходного сигнала $|F_p^*(j\omega)|$ в основной полосе частот ($n = 0$) будет искажен по сравнению со спектром исходного сигнала. Такое явление перекрытия высокочастотных «хвостов» спектра непрерывного сигнала при его квантовании носит название эффекта наложения частот.

Получим теперь описание квантованного сигнала в терминах преобразования Лапласа. Возьмем преобразование Лапласа от (2.1):

$$F_p^*(s) = L\{f_p^*(t)\} = L\{f(t) \cdot p(t)\}. \quad (2.7)$$

Правую часть (2.7) распишем, используя теорему свертки.

$$F_p^*(s) = F(s) * P(s), \quad (2.8)$$

где $F(s)$ и $P(s)$ являются преобразованиями Лапласа от функций $f(t)$ и $p(t)$ соответственно, а знак $*$ означает операцию свертки.

Изображение по Лапласу функции $p(t)$ будет равно:

$$P(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-ps}}{s} \cdot e^{-ksT}. \quad (2.9)$$

Обратите внимание, что в (2.9) сумма начинается с $k = 0$, а не с $-\infty$, так как одностороннее преобразование Лапласа определено для $t \geq 0$. Бесконечный ряд (2.9) можно свернуть при условии $|e^{-sT}| < 1$.

Получим:

$$P(s) = \frac{1 - e^{-ps}}{s(1 - e^{-sT})}. \quad (2.10)$$

Из (2.8) с учетом (2.10) получаем:

$$F_p^*(s) = F(s) * \frac{1 - e^{-ps}}{s(1 - e^{-sT})} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi) \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi)(1 - e^{-T(s-\xi)})} d\xi, \quad (2.11)$$

где $\tau_1 < c < \text{Re } s - \tau_2$, $\text{Re } s = \max \{ \tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2 \}$, τ_1, τ_2 – абсциссы абсолютной сходимости $F(\xi)$ и $P(\xi)$ соответственно.

Интеграл (2.11) можно вычислить с помощью теоремы о вычетах, замкнув контур интегрирования. Это замыкание можно обеспечить либо по полуокружности бесконечно большого радиуса в левой полуплоскости (контур Γ_1 на рисунке 2.5), либо по аналогичной полуокружности в правой полуплоскости (контур Γ_2).

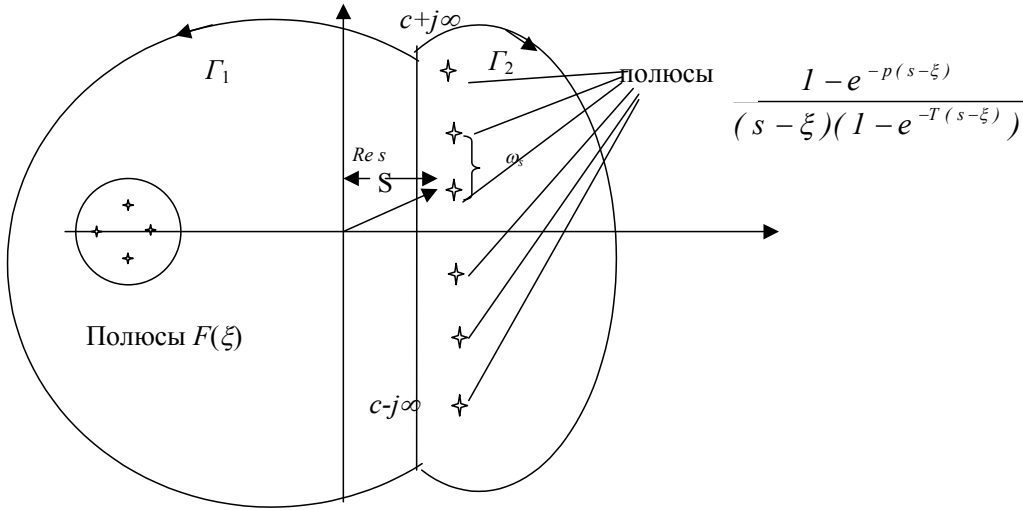


Рисунок 2.5

При вычислении интеграла по контуру Γ_1 имеем:

$$F_p^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} F(\xi) \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi)(1 - e^{-T(s-\xi)})} d\xi - \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi)(1 - e^{-T(s-\xi)})} d\xi =$$

$$= \sum \text{Res} \left\{ F(s) \frac{1 - e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi)(1 - e^{-T(s-\xi)})} d\xi \right\} \Big|_{\text{в полюсах } F(\xi)}. \quad (2.12)$$

В выражении (2.12) учтено, что контур Γ_1 охватывает только полюса функции $F(\xi)$, а также равенство нулю второго интеграла. Для выполнения последнего условия достаточно, чтобы:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} F(\xi) = 0,$$

то есть число полюсов $F(\xi)$ превышало число ее нулей хотя бы на 1.

Если корни знаменателя $F(\xi)$ – простые, а сама функция представляет дробно-рациональное выражение $F(\xi) = N(\xi)/D(\xi)$, то вычеты в ее полюсах вычисляются по формуле:

$$\text{Res}\{F(\xi)\} = \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)},$$

где ξ_n – полюса $F(\xi)$.

Учитывая это обстоятельство, в случае простых полюсов формула (2.12) приобретет вид:

$$F_p^*(s) = \sum_n \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \cdot \frac{1 - e^{-p(s-\xi_n)}}{(s-\xi_n)(1 - e^{-T(s-\xi_n)})}. \quad (2.13)$$

В случае кратных корней выражение получится немного сложнее:

$$F_p^*(s) = \sum_n \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(-1)^{k_n-i}}{(k_n-i)! (i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial \xi^{i-1}} ((\xi - \xi_n)^{k_n} F(\xi)) \Big|_{\xi=\xi_n} \times \\ \times \frac{\partial^{k_n-i}}{\partial \xi^{k_n-i}} \left(\frac{1 - e^{-p\xi}}{\xi(1 - e^{-T\xi})} \right) \Big|_{\xi=s-\xi_n}, \quad (2.14)$$

где k_n – кратность полюса ξ_n , а внешняя сумма берется по всем различным полюсам.

Рассмотрим теперь интеграл по контуру Γ_2 . Он охватывает полюса функции:

$$\frac{1 - e^{p(s-\xi)}}{(s-\xi)(1 - e^{-T(s-\xi)})}, \quad (2.15)$$

то есть нули ее знаменателя.

Найдем их из уравнения:

$$1 - e^{-T(s-\xi)} = 0 \quad \text{или} \quad e^{-T(s-\xi)} = 1. \quad (2.16)$$

Так как единицу на комплексной плоскости представляет вектор $e^{j2\pi n}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то уравнение (2.16) приводим к виду $e^{-T(s-\xi)} = e^{j2\pi n}$.

Получаем $-T(s-\xi) = j2\pi n$, откуда искомые полюса равны:

$$\xi_k = s + j \frac{2\pi}{T} n = s + j\omega_s n. \quad (2.17)$$

Из (2.11) с учетом вышесказанного имеем:

$$\begin{aligned}
F_p^*(s) &= \oint_{\Gamma_2} F(\xi) \frac{1-e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi) \cdot (1-e^{-T(s-\xi)})} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \frac{1-e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi) \cdot (1-e^{-T(s-\xi)})} d\xi = \\
&= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Res} F(\xi) \cdot \frac{1-e^{-p(s-\xi)}}{(s-\xi) \cdot (1-e^{-T(s-\xi)})} \Big|_{\xi_n = s + j\omega_s n} .
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Знак минус в (2.18) появляется потому, что интегрирование по контуру Γ_2 ведется по часовой стрелке.

В (2.18) для равенства нулю второго интеграла вполне достаточно, чтобы число полюсов функции $F(\xi)$ превышало бы число ее нулей, тогда:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) = 0 .$$

Все полюса, представленные формулой (2.17), являются простыми, и следовательно, для вычисления вычетов можно воспользоваться формулой (2.13).

Тогда, вводя обозначения

$$N(\xi) = 1 - e^{-p(s-\xi)}$$

и

$$D(\xi) = (s - \xi)(1 - e^{-T(s-\xi)}),$$

имеем:

$$\begin{aligned}
F_p^*(s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \cdot F(\xi_n) \Big|_{\xi_n = s + j\omega_s n} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{jpn\omega_s}}{jnT\omega_s} \cdot F(s + jn\omega_s) = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_s p / 2)}{n\omega_s p / 2} \cdot e^{jn\omega_s p / 2} \cdot F(s + jn\omega_s).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

При выводе выражения (2.19) использовался тот же прием, что и при получении формулы (2.3), т.е. вынесена экспонента в половинной степени $e^{jnp\omega_s / 2}$ и применена формула Эйлера.

Нетрудно видеть, что выражение (2.4) совпадает с выражением (2.19) после замены в последнем $s = j\omega$, что неудивительно, так как при такой замене преобразование Лапласа превращается в преобразование Фурье (для функций, определенных при $t > 0$).

Таким образом, получены следующие соотношения для выходного сигнала реального квантователя:

1. Во временной области:

$$f_p^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot (1(t-kT) - 1(t-kt-p)).$$

2. В частотной области:

$$F_p^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{T} \frac{\sin(n\omega_s p/2)}{n\omega_s p/2} e^{\frac{jn\omega_s p}{2}} F(j\omega + jn\omega_s).$$

3. В области комплексной переменной s в случае k простых полюсов:

$$F_p^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \cdot \frac{1 - e^{p(s-\xi_n)}}{(s-\xi)(1 - e^{-T(s-\xi_n)})}.$$

4. В случае, когда n -ый полюс имеет кратность k_n :

$$F_p^*(s) = \sum_n \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(-1)^{k_n-i}}{(k_n-i)!} \cdot \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{\partial^{i-1}}{\partial \xi^{i-1}} ((\xi - \xi_n)^{k_n} F(\xi)) \Big|_{\xi=\xi_n} \times \\ \times \frac{\partial^{k_n-i}}{\partial \xi^{k_n-i}} \cdot \frac{1 - e^{-p\xi}}{\xi(1 - e^{-T\xi})} \Big|_{\xi=s-\xi_n}.$$

5. А также выражение:

$$F_p^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_s p/2)}{n\omega_s p/2} \cdot e^{\frac{jnp\omega_s}{2}} \cdot F(s + jn\omega_s).$$

2.2.3 Идеальный квантователь

Если время выборки p меньше периода квантования T и наименьшей постоянной времени входного сигнала $f(t)$, то изменением сигнала за время выборки можно пренебречь и принять значение сигнала постоянным в течение времени p (на k -ом интервале дискретности).

Тогда выход квантователя с конечной шириной импульсов может быть представлен последовательностью импульсов:

$$f_p^*(t) = \begin{cases} f(kT), & \text{при } kT \leq t < kT + p; \\ 0, & \text{при } kT + p \leq t < (k+1)T, \end{cases}$$

$$f_p^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT)(1(t-kT) - 1(t-kT-p)). \quad (2.20)$$

Взяв от выражения (2.20) преобразование Лапласа, получим:

$$F_p^*(s) = \int_0^{\infty} f_p^*(t)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \frac{1-e^{-ps}}{s} \cdot e^{-ksT}. \quad (2.21)$$

Если время выборки достаточно мало, можно в разложении экспоненты в ряд Тейлора около точки $p = 0$ ограничиться линейным приближением. Тогда:

$$1 - e^{-ps} = 1 - (1 - ps + \frac{(ps)^2}{2!} + \dots) \approx ps,$$

и выражение (2.21) превратится в следующую формулу:

$$F_p^*(s) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot pe^{-kTs}.$$

Последнее выражение соответствует оригиналу:

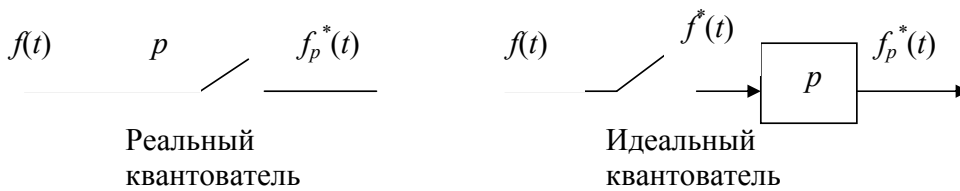
$$f_p^*(t) \approx p \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT),$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция.

Таким образом, квантователь с конечной шириной импульса заменяется на импульсный модулятор с несущим сигналом:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

или на идеальный квантователь, выход которого соединен с аттенюатором с коэффициентом передачи p (рисунок 2.6).



Другими словами, идеальный квантователь – это квантователь с нулевым временем выборки, который замыкается и размыкается мгновенно с периодом T (сек).

Аттенюатор необходим, только если мы рассматриваем «чистую» операцию квантования без дальнейшего применения устройства фиксации.

Идеальный квантователь имеет на своем выходе:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) = f(t) \cdot \delta_T(t). \quad (2.22)$$

Преобразование Лапласа от выражения (2.22) будет:

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTs}. \quad (2.23)$$

Выражение (2.23) для дискретного преобразования Лапласа можно получить и в другой форме, учитывая, что:

$$\delta_T(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} p(t).$$

Тогда:

$$F^*(s) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} F_p^*(s). \quad (2.24)$$

В последнюю формулу подставим выражение (2.19):

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{T} \cdot \frac{\sin \cdot n \omega_s p / 2}{n \omega_s p / 2} e^{\frac{jn \omega_s p}{2}} \cdot F(s + jn \omega_s) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn \omega_s). \end{aligned} \quad (2.25)$$

В выражении (2.25) использован замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Чтобы формула (2.25) была справедлива, необходимо убедиться в сходимости интеграла вдоль полуокружности бесконечного радиуса (вспомним рисунок 2.5 к выводу формулы (2.19)). Можно показать, что выражение (2.25) справедливо только в том случае, если у функции $F(s)$ число полюсов на два или более превышает число нулей, то есть соответствующий оригинал $f(t)$ не имеет разрывов первого рода в нуле. Если же такой разрыв у функции $f(t)$ имеется,

то более общее выражение для $F^*(s)$ можно получить, если определить дельта-функцию, как функцию четную (рисунок 2.7).

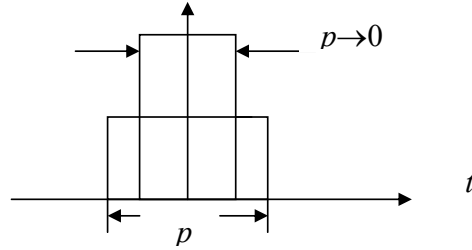


Рисунок 2.7

Тогда ряд Фурье для $\delta_T(t)$ для любых (как положительных, так и отрицательных) моментов времени t будет:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t}, \text{ где } C_n = \frac{1}{T},$$

а при $t \geq 0$ получим:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{2} \delta(t) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t}, \text{ где } C_n = \frac{1}{T}, \quad (2.26)$$

то есть в момент времени $t = +0$ имеется только половина импульса (вторая половина «остается» при $t = -0$).

Учитывая соотношение (2.26) и переходя в (2.22) к преобразованию Лапласа, окончательно получим:

$$F^*(s) = \frac{f(+0)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s). \quad (2.27)$$

Как видно, формула (2.27) отличается от (2.25) только первым слагаемым, и если разрывов у функции $f(t)$ в нуле нет, т.е. $f(-0) = f(+0) = 0$, то обе формулы совпадают.

Подставив в формулу (2.24) выражение (2.13) или (2.14) (в зависимости от характера полюсов $F(s)$) и раскрыв неопределенность типа «ноль, деленный на ноль» по правилу Лопиталя, в пределе при $p \rightarrow 0$ получим для простых полюсов:

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi_n)}} \quad (2.28)$$

или соответственно для кратных полюсов:

$$F^*(s) = \sum_n \sum_{i=1}^{k_n} \frac{(-1)^{k_n-i}}{(k_n-i)!} \cdot \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{\partial^{i-1}}{\partial \xi^{i-1}} ((\xi - \xi_n)^{k_n} \cdot F(\xi)) \Big|_{\xi = \xi_n} \times$$

$$\times \frac{\partial^{k_n-i}}{\partial \xi^{k_n-i}} \cdot \frac{1}{(1-e^{-T\xi})} \Big|_{\xi = s - \xi_n}. \quad (2.29)$$

Все формулы, полученные для $F^*(s)$, верны, однако применение той или иной формулы зависит от удобства и целей, для которых они применяются.

Соотношение (2.23) удобно для нахождения преобразования Лапласа сигнала, прошедшего через идеальный квантователь. Формулу (2.27) или при определенных условиях (2.25) применяют при построении частотных характеристик и частотном анализе. Выражение (2.28) или (2.29) можно применять, если известны соответствующее непрерывное преобразование Лапласа и его полюсы.

Пример 2.1. Найдем преобразование Лапласа единичной ступенчатой функции $1(t)$ после идеального квантователя.

Воспользуемся формулой (2.23).

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-ksT} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT) \cdot e^{-ksT} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT}.$$

При условии $|e^{-sT}| \leq 1$ бесконечный ряд сходится (сумма геометрической прогрессии) к $\frac{1}{1-e^{-sT}}$. Таким образом,

$$F^*(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}.$$

Пример 2.2. Решим предыдущий пример с применением формулы (2.28). Как известно, преобразование Лапласа единичной ступеньки равно $1/s$. Числитель изображения Лапласа равен $N(s)=1$, а знаменатель — $D(s)=s$. Единственный полюс этой функции равен $s=0$. Пользуясь формулой (2.28), получим

$$F^*(s) = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \cdot \frac{1}{1-e^{-T(s-\xi_n)}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1-e^{-Ts}} = \frac{1}{1-e^{-sT}}.$$

Конечно, результаты этих примеров совпадают.

Пример 2.3. Найдем преобразование Лапласа линейного сигнала $f(t) = t$, прошедшего через идеальный квантователь. Поскольку преобразование Лапласа линейной функции $L\{f(t)\} = L\{t\} = \frac{1}{s^2}$ имеет полюс $s=0$ кратности 2, то воспользуемся формулой (2.29):

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{2-i}}{(2-i)!(i-1)!} \cdot \frac{\partial^{i-1} s^2 F(s)}{\partial s^{i-1}} \cdot \frac{\partial^{2-i}}{\partial s^{2-i}} \frac{1}{(1-e^{-Ts})} = (-1) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(1-e^{-Ts})} = \\ &= \frac{T e^{-Ts}}{(1-e^{-Ts})^2}. \end{aligned}$$

Исследуем теперь частотные свойства сигнала, прошедшего через идеальный квантователь. Для этого воспользуемся соотношением (2.25), в которое вместо s подставим мнимое значение $j\omega$. Получим преобразование Фурье выходного сигнала идеального квантователя или его комплексный частотный спектр:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s). \quad (2.30)$$

Компоненты-слагаемые $F(j\omega + jn\omega_s)$ частотного комплексного спектра $F^*(j\omega)$ импульсного сигнала образуются смещением по частоте комплексного частотного спектра исходного непрерывного сигнала $F(j\omega)$ на величины, кратные частоте квантования ω_s . То есть идеальный квантователь является генератором гармоник. На выходе идеального квантователя воспроизводится как спектр самого сигнала, так и дополнительные составляющие на частотах, кратных частоте квантования, причем амплитуда гармоник изменяется в $1/T$ раз.

Если максимальная частота спектра исходного сигнала ω_c не превышает половины частоты квантования (см. рисунок 2.8, а):

$$\omega_c \leq \frac{\omega_s}{2}, \quad (2.31)$$

то перекрытия соседних компонент спектра $F^*(j\omega)$ не будет (рисунок 2.8, б). В этом случае форма спектра непрерывного сигнала в основной полосе частот $-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2$ полностью сохранится и в спектре импульсного сигнала (только произойдет масштабирование по оси ординат на величину $1/T$ в соответствии с формулой (2.30)).

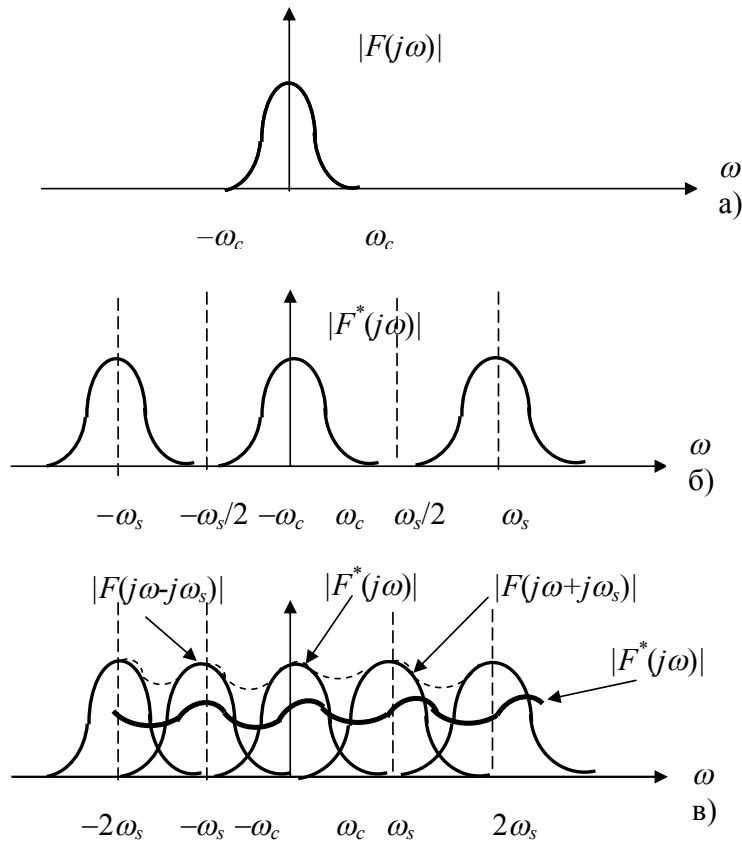


Рисунок 2.8

При невыполнении условия (2.31) суммирование транспонированных компонент в (2.30) должно производиться с учетом фазовой составляющей спектра (рисунок 2.8, в). На рисунке 2.8, в пунктиром изображена функция:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s),$$

а жирной линией — $F^*(j\omega)$. При этом отличие пунктирной и жирной линий объясняется не только множителем $1/T$, но и векторным характером сложения в формуле (2.30). Видно, что форма спектра $F^*(j\omega)$ в основной полосе частот $|\omega| < \omega_s/2$ существенно отличается от формы спектра непрерывного сигнала. Этот эффект «переноса» высокочастотных «хвостов» спектра непрерывного сигнала в низкочастотную область при квантовании сигнала носит название **на-**

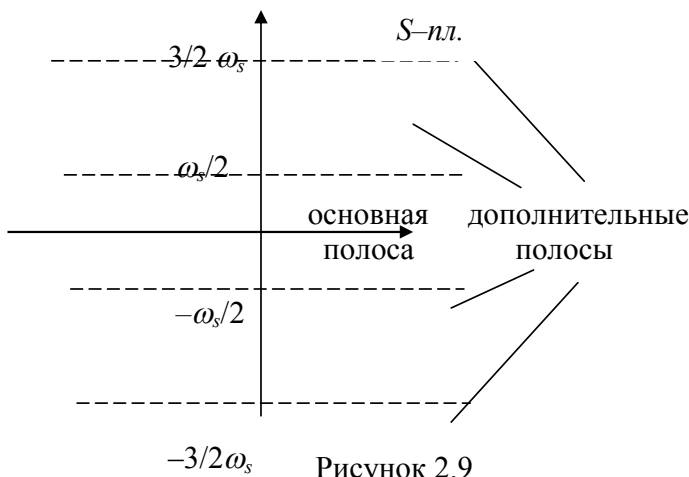
ложения частот. Еще один эффект, связанный с квантованием сигнала, обусловлен периодичностью функции $F^*(s)$ с периодом $j\omega_s$. Формально это связано с периодичностью экспоненты в комплексной степени. Действительно, воспользуемся формулой (2.23) и изменим аргумент $F^*(s)$ на произвольное целое число периодов $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} F^*(s + jm\omega_s) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kT(s+jm\omega_s)} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \cdot e^{-jkm\omega_s T} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs} \cdot e^{-jkm2\pi} = F^*(s), \end{aligned}$$

поскольку $e^{-jkm2\pi} = 1$ для целых k и m . Для частотного спектра $F^*(j\omega)$ это означает, что $F^*(j\omega)$ принимает одинаковые значения для всех частот, кратных ω_s , другими словами, наблюдая (измеряя) значения $F^*(j\omega)$, мы не можем различить частоты, кратные частоте квантования. Этот эффект называется эффектом **поглощения частот**, то есть частота ω как бы поглощает все частоты $\omega + k\omega_s$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

Из периодичности $F^*(s)$ непосредственно вытекают два свойства.

1. Поскольку для любой точки $s = s_1$ на комплексной плоскости s $F^*(s)$ имеет одинаковые значения для всех периодических точек $s = s_1 + jm\omega_s$, то вся s -плоскость делится на бесконечное число полос: основная полоса частот $|Im s| < \omega_s/2$ и дополнительные полосы $\omega_s/2 < Im s < 3/2\omega_s$; $-3/2\omega_s < Im s < -1/2\omega_s$; $3/2\omega_s < Im s < 5/2\omega_s$ и т.д. (см. рисунок 2.9).



2. Если функция $F(s)$ имеет полюс $s = s_1$, то $F^*(s)$ имеет бесконечное число полюсов $s = s_1 + jm\omega_s$ для любого целого m .

2.3 Восстановление сигналов

Восстановление – это инверсная операция по отношению к операции квантования. В большинстве дискретных или цифровых систем сигнал должен быть отфильтрован от высших гармоник, которые возникают в процессе квантования. В цифровых системах необходимо преобразование управляющего воздействия, вырабатываемого микропроцессором в виде последовательности чисел, в непрерывный сигнал для подачи его на объект. Для сопряжения цифровых и аналоговых элементов используются устройства восстановления данных или, проще говоря, фильтры. Задачи восстановления возникают и при цифровой фильтрации.

Задача восстановления заключается в том, чтобы по изменяющемуся ряду чисел $f(0), f(T), f(2T), \dots$ или последовательности импульсов с амплитудой $f(kT)$ в дискретные моменты времени $t = kT$ восстановить непрерывный сигнал $f(t)$. Теоретически восстановление сигнала возможно благодаря импульсной теореме.

2.3.1 Импульсная теорема

Эта теорема носит также следующие названия: теорема прерывания, теорема отсчетов, теорема Котельникова, теорема Котельникова-Шеннона, в иностранной литературе – теорема Шеннона. Эту теорему можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 2.1. Если сигнал не содержит частот выше частоты ω_c , то он полностью описывается своими значениями, измеренными с частотой не меньше, чем $2\omega_c$.

К этой теореме можно сделать дополнение: сигнал все же может быть полностью восстановлен при квантовании его с частотой меньшей, чем $2\omega_c$, если в моменты выборки известна информация как об амплитуде сигнала, так и о его производных. Если сигнал не содержит частот, больше чем ω_c , то он полностью определяется значениями $f^{(n)}(kT), f^{(n-1)}(kT), \dots, f^{(1)}(kT), f(kT)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), измеренными в дискретные моменты времени с интервалом:

$$T = \frac{1}{2}(n+1)\frac{2\pi}{\omega_c}, \quad \text{где} \quad f^{(i)}(kT) = \left. \frac{d^i f(t)}{dt^i} \right|_{t=kT}.$$

Шеннон дополнил эту теорему: непрерывный сигнал может быть получен из дискретного сигнала по интерполяционной формуле:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \frac{\sin \omega_s(t - kT)/2}{\omega_s(t - kT)/2}, \quad (2.32)$$

где ω_s , как и раньше, – частота квантования.

Доказательство. Пусть $f(t)$ – непрерывный сигнал и $F(j\omega)$ – его Фурье – изображение:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.33)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

Рассмотрим преобразование Фурье сигнала после идеального квантователя. Согласно (2.30), оно равно:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(j\omega + jn\omega_s).$$

Эта функция периодическая и, следовательно, имеет место ее разложение в ряд Фурье:

$$F^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-jkT\omega}, \quad (2.34)$$

где коэффициенты разложения C_k вычисляются по стандартной формуле:

$$C_k = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{jk\omega T} \cdot F^*(j\omega) d\omega. \quad (2.35)$$

Пусть условия теоремы выполняются (по сути, это условие (2.31)). Тогда в основной полосе частот спектры исходного и квантованного сигналов совпадают с точностью до множителя T , а вне основной полосы частот спектр исходного сигнала равен нулю, т.е.:

$$F(j\omega) = \begin{cases} TF^*(j\omega), & \text{при } |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}; \\ 0, & \text{при } |\omega| > \frac{\omega_s}{2}. \end{cases} \quad (2.36)$$

Учитывая соотношение (2.36), подставим в интеграл (2.35) $F^*(j\omega)$ из (2.36) и расширим пределы интегрирования до $\pm \infty$ (поскольку все равно при $|\omega| > \omega_s/2$ подынтегральное выражение обратится в нуль). Получим:

$$C_k = \frac{1}{T\omega_s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega T} F(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk\omega T} F(j\omega) d\omega. \quad (2.37)$$

Сравнивая полученное выражение (2.37) с формулой (2.33), замечаем, что коэффициенты разложения C_k есть значения сигнала в дискретные моменты времени kT , то есть $C_k = f(kT)$. Коэффициенты разложения в ряд Фурье C_k однозначно определяют согласно (2.34) спектр $F^*(j\omega)$. Этот спектр, в свою очередь (согласно (2.36)), однозначно определяет спектр непрерывного сигнала $F(j\omega)$, а последний однозначно связан (согласно (2.33)) с непрерывным сигналом $f(t)$. То есть значения сигнала в дискретные моменты времени $f(kT)$ полностью определяют непрерывный сигнал $f(t)$, что и требовалось доказать.

Интерполяционная формула (2.32) может быть получена из (2.33) следующим образом: вместо $F(j\omega)$ согласно (2.36) подставляем $F^*(j\omega)$. Далее применяем подстановку (2.34) с учетом того, что $C_k = f(kT)$, и, сужая пределы интегрирования до основной полосы частот, берем, изменив порядок суммирования и интегрирования, определенный интеграл. В заключении применим формулу Эйлера.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} F^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot e^{-jk\omega T} d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} e^{j\omega t - jk\omega T} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \cdot \frac{T}{2\pi(jt - jkT)} e^{-jkt - jk\omega T} \bigg|_{-\frac{\omega_s}{2}}^{\frac{\omega_s}{2}} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\sin \omega_s(t - kT)/2}{\omega_s(t - kT)/2}.
\end{aligned}$$

Частота $\omega_N = \omega_s/2$ играет важную роль и часто называется **частотой Найквиста**.

2.3.2 Восстановитель Шеннона

Идеальное восстановление в случае периодического квантования можно осуществить в соответствии с импульсной теоремой по формуле (2.32). Устройство, осуществляющее восстановление по этой формуле, носит название восстановителя Шеннона. Уравнение (2.32) определяет операцию, которая может рассматриваться как линейный оператор. Однако формула (2.32) не является причинно-следственной, так как значения сигнала в момент времени t выражаются как через предшествующие, так и через последующие дискретные моменты времени.

В связи с этим восстановитель Шеннона неприемлем в случае систем управления, но может быть использован в системах, например, связи, конечно, при соответствующем ограничении количества членов в сумме (2.32).

Недостатками восстановителя Шеннона являются относительная сложность, возможность использования только при периодическом квантовании и, как уже было замечено, временное запаздывание.

Идеальный восстановитель, таким образом, представляет собой фильтр, имеющий амплитудно-частотную характеристику, изображенную на рисунке 2.10, и нулевую фазово-частотную характеристику. Как известно, фильтр с такими идеальными характери-

ками физически нереализуем, но тем не менее представляет большой теоретический интерес.

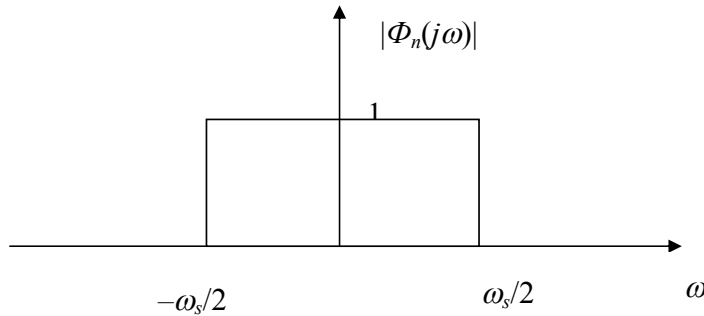


Рисунок 2.10

Делая краткие выводы, можно сказать, что сигнал может быть восстановлен при периодическом квантовании, если выполняются два условия:

а) сигнал имеет ограниченный спектр, то есть при $(|\omega| > \omega_c)$ его преобразование Фурье равно нулю;

б) выполняется условие (2.31), а именно: максимальная частота сигнала не превышает частоты Найквиста $\omega_c \leq \omega_N$. Чем сильнее нарушается условие (2.31), тем возможность даже приблизительно восстановить непрерывный сигнал по его дискретным значениям становится все меньше. Поэтому так важно выбрать частоту квантования достаточно большой по сравнению с частотными составляющими непрерывного сигнала.

2.3.3 Экстраполяторы

Задача восстановления сигнала – как можно точнее аппроксимировать исходную функцию времени $f(t)$. Но лучшая аппроксимация требует и большего времени задержки, что по соображениям устойчивости системы может быть недопустимым.

Рассмотрим один из наиболее простых, а потому и наиболее распространенных методов экстраполяции – разложение в ряд Тейлора. Разложим функцию $f(t)$ на интервале времени $kT \leq t < (k+1)T$.

$$f_k(t) = f(kT) + f'(kT)(t - kT) + \frac{f''(kT)}{2!}(t - kT)^2 + \dots, \quad (2.38)$$

где $f_k(t) = f(t)$ при $kT \leq t < (k+1)T$;

$$f'(kT) = \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=kT},$$

$$f''(kT) = \left. \frac{d^2f(t)}{dt^2} \right|_{t=kT} \text{ и т.д.}$$

Производные можно аппроксимировать соответствующими разностями:

$$\begin{aligned} f'(kT) &\approx \frac{1}{T} [f(kT) - f((k-1)T)], \\ f''(kT) &\approx \frac{1}{T} [f'(kT) - f'((k-1)T)] = \frac{1}{T^2} [f(kT) - 2f((k-1)T) + f((k-2)T)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

и т.д.

Из выражений (2.39) видно, что чем выше порядок производной (то есть чем больше берется членов в (2.38)) и чем точнее производится экстраполяция функции $f(t)$, тем больше требуется выборка предшествующих значений функции $f(kT)$. Таким образом, основой экстраполирующего устройства является набор временных задержек, а их число зависит от точности оценки $f(t)$.

Если в (2.38) берется только первое слагаемое, то получаем экстраполятор нулевого порядка (ЭНП) или, как его еще называют, фиксатор нулевого порядка, поскольку он фиксирует значение сигнала до следующего момента квантования. Вследствие своей простоты это наиболее широко используемое устройство. Ранее рассмотренное устройство выборки и хранения как раз и работает как экстраполятор нулевого порядка.

Из свойств ЭНП полезно отметить два.

1. ЭНП пригоден для восстановления также и непериодических сигналов.

2. Восстановление с помощью ЭНП – это точная инверсия операции квантования только для сигналов, непрерывных справа и кусочно-постоянных.

Наибольшее значение ошибки, вносимой ЭНП, будет составлять:

$$e_0 = \max_k |f((k+1)T) - f(kT)| \leq T \max |f'(t)|. \quad (2.40)$$

Получим передаточную функцию ЭНП. Пусть на его вход поступает последовательность импульсов:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT),$$

для которой преобразование Лапласа имеет вид:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}.$$

На выходе ЭНП будет ступенчатый сигнал:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) (1(t - kT) - 1(t - kT - T)).$$

Преобразование Лапласа от выходного сигнала $y(t)$ будет:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left(\frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-k(T+1)s}}{s} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \cdot \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \\ &= X^*(s) \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \end{aligned}$$

Отсюда передаточная функция ЭНП будет:

$$W_0(s) = \frac{Y(s)}{X^*(s)} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (2.41)$$

Деля в (2.41) замену $s = j\omega$, получаем частотную передаточную функцию:

$$W_0(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega T/2} = \frac{2\pi}{\omega_s} \cdot \frac{\sin \pi \frac{\omega}{\omega_s}}{\pi \frac{\omega}{\omega_s}} e^{-j\pi \frac{\omega}{\omega_s}}. \quad (2.42)$$

Амплитудно-частотная $A_0(\omega)$ и фазово-частотная $\varphi_0(\omega)$ характеристики ЭНП по формуле (2.42) приведены на рисунке 2.11. Там же для сравнения приведена (пунктиром) амплитудно-частотная характеристика идеального восстановителя (сравните с рисунком 2.10).

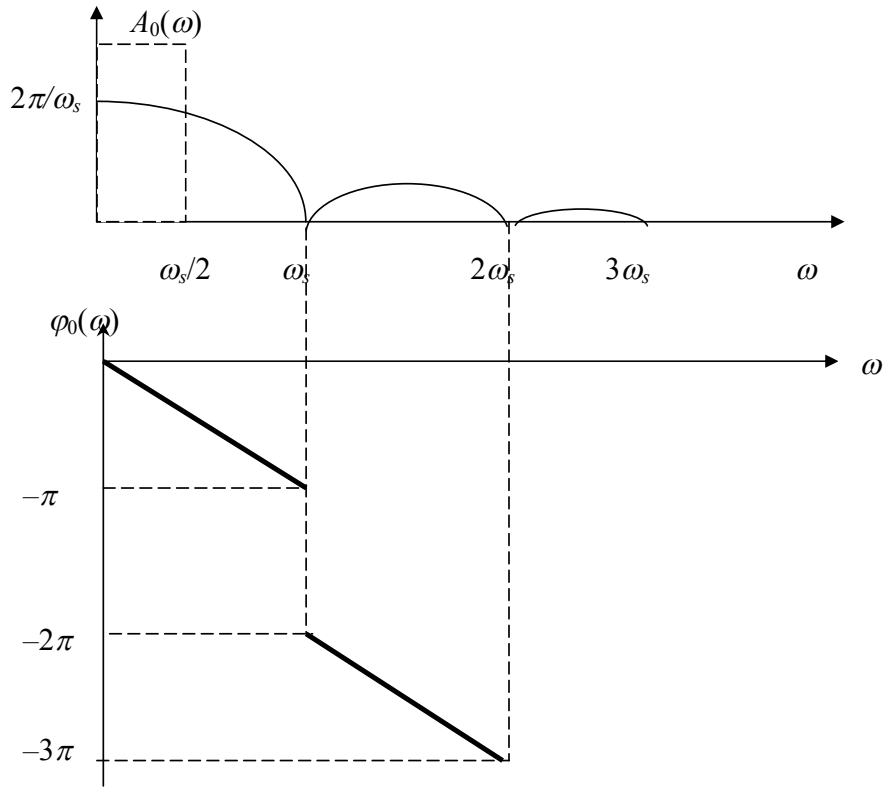


Рисунок 2.11

Экстраполятор первого порядка получим, если в выражении (2.38), помимо постоянной составляющей, возьмем линейное приближение:

$$f_k(t) = f(kT) + f'(kT)(t - kT) \quad \text{при } kT \leq t < (k+1)T. \quad (2.43)$$

Передаточная функция экстраполятора первого порядка (или линейного экстраполятора, как его еще называют) равна:

$$W_1(s) = \frac{e^{Ts} + e^{-Ts} - 2}{Ts^2}. \quad (2.44)$$

Наибольшее значение ошибки экстраполятора первого порядка составляет:

$$e_1 = \max_k \cdot \max_t \left\{ f_k(t) - f(kT) - \frac{t - kT}{T} (f(kT) - f(k-1)T) \right\}.$$

Если функция $f(t)$ имеет гладкую вторую производную, то:

$$e_1 \leq T^2 \max_t f''(t).$$

Экстраполяторы первого порядка находят значительно меньшее применение в цифровых системах по причине большей сложности, чем ЭНП. И уже совсем экзотическими являются экстраполяторы более высоких порядков, которые находят применение разве лишь в теоретических исследованиях.

Теперь можно дополнить раздел 2.2.1 по выбору правильного периода квантования. Период квантования зависит, помимо всего прочего, от метода восстановления сигнала и от назначения системы.

При решении чистой задачи цифровой обработки сигнала все сводится к записи его в цифровой форме с последующим восстановлением. Естественным критерием выбора периода квантования будет при этом величина рассогласований между исходным сигналом и восстановленным.

Если спектр сигнала ограничен частотой ω_c и задержка (накопление данных) допустима, то логичным было бы воспользоваться восстановителем Шеннона с периодическим квантованием с частотой $2\omega_c$. Если запаздывание ограничено, то требуется применять более высокие частоты квантования или экстраполяторы нулевого или первого порядков.

После того как частота квантования определена, необходимо пропустить непрерывный сигнал, который подлежит квантованию, через фильтр, обрезающий частоты сигнала, превышающие частоту Найквиста, с тем, чтобы эти частотные составляющие не искажали низкочастотные компоненты вследствие эффекта наложения частот.

3 МЕТОД Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Одним из математических методов, разработанных для анализа и синтеза дискретных (в том числе и цифровых) систем, является метод z -преобразования. z -преобразование играет ту же роль для дискретных систем, что и преобразование Лапласа для непрерывных систем. Хотя в последние годы при исследовании дискретных систем широкое распространение получил другой метод – метод пространства состояний, важность z -преобразования нельзя недооценивать ввиду его компактности и наглядной физической интерпретации.

3.1 Основы метода

3.1.1 Определение z -преобразования

Как известно из курса «Математические основы теории систем», z -преобразование получается из дискретного преобразования Лапласа заменой переменной $e^{Ts} = z$. Смысл такой замены ясен – при этом периодические функции комплексной переменной s , например, формулы (2.23) и (2.28) с «неудобной» экспонентой в комплексной степени превращаются в дробно-рациональные выражения от переменной z .

Таким образом, из формул (2.23), (2.28) и (2.25) получаются соответственно следующие выражения для z -преобразования:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}, \quad (3.1)$$

$$F(z) = F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{n=1}^k \frac{N(\xi_n)}{D'(\xi_n)} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1} e^{\xi_n T}}, \quad (3.2)$$

$$F(z) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z}, \quad (3.3)$$

где $F(\xi) = \frac{N(\xi)}{D(\xi)}$, а ξ_n – простые полюса функции $F(\xi)$.

Поскольку ограничений на временные ряды нет, то формулой (3.1) можно пользоваться для произвольных функций времени. Если ряд (3.1) сходится, то z -преобразование можно записать в виде отношения полиномов по z .

Ограничения на применение формул (3.2) и (3.3) те же, что и ограничения, сделанные при выводе выражений (2.28) и (2.25).

Пользуясь формулами (3.1)–(3.3), а также теоремами z -преобразования, вытекающими из соответствующих теорем преобразования Лапласа, можно получать z -преобразование самых разных функций времени.

Символическая запись z -преобразования, которая будет использоваться в дальнейшем, это либо выражение $F(z)=Z\{f(t)\}$, либо выражение $F(z)=Z\{F(s)\}$.

Последнее выражение означает, что берется z -преобразование от функции времени, преобразование Лапласа которой есть $F(s)$.

Пример 3.1. Найдем z -преобразование единичной ступенчатой функции $1(t)$. Воспользовавшись формулой (3.1), получим

$$Z\{1(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}. \text{ Этот ряд сходится при условии } |z| < 1.$$

Сумма ряда равна (сумма геометрической прогрессии):

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

К этому же результату приведет подстановка $e^{Ts} = z$ в выражения, полученные в примерах 2.1 и 2.2. Таким образом, окончательно можно записать:

$$Z\{1(t)\} = Z\left\{\frac{1}{s}\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

3.1.2 Соответствие между s - и z -плоскостями

Изучение соответствия между s - и z -плоскостями весьма важно. Из теории управления известно, что анализ и синтез непрерывных систем управления часто основан на распределении нулей и полюсов передаточной функции. Аналогично нули и полюсы z -

преобразования передаточной функции определяют реакцию системы в момент замыкания ключа, то есть в моменты, кратные T .

Известно, что нули и полюсы полностью определяют соответствующее преобразование Лапласа $F(s)$, а следовательно, и функцию-оригинал $f(t)$. Если все нули и полюсы $F(s)$ имеют мнимые части, удовлетворяющие условию

$$|\operatorname{Im} s_i| < \frac{\omega_s}{2}, \quad (3.4)$$

то соответствующее дискретное преобразование Лапласа $F^*(s)$ будет в основной полосе частот иметь те же нули и полюсы, и вследствие своей периодичности – те же нули и полюсы в дополнительных полосах частот. z -преобразование, согласно подстановке $z = e^{Ts}$, будет иметь полюсы и нули, соответствующие полюсам и нулям $F^*(s)$, расположенным в основной полосе частот, поскольку из дополнительных полос ввиду периодичности отображения $z = e^{Ts}$ особые точки отобразятся в те же самые точки на плоскости z , что и из основной полосы частот. Таким образом, z -преобразование $F(z)$ при выполнении условия (3.4) однозначно отображает исходную функцию $f(t)$.

Если условие (3.4) не выполняется, то есть у функции $F(s)$ есть особые точки, расположенные вне основной полосы частот, то у дискретного преобразования Лапласа $F^*(s)$ в основной полосе частот, помимо особых точек, которые были в этой полосе частот у $F(s)$, появятся дополнительные особые точки (эффект наложения частот), которые также перейдут и в соответствующие точки плоскости z для функции $F(z)$. То есть восстановить исходную функцию $f(t)$ по изображению $F(z)$ становится все более сомнительным, чем больше таких «новых» особых точек будет у $F(z)$.

Вышеизложенное, по сути, является корневой интерпретацией импульсной теоремы, а условие (3.4) эквивалентно условию (2.31).

В теории управления некоторые линии и области s -плоскости играют важную роль при исследовании динамических свойств систем (например, мнимая ось, линия равных затуханий, линия равных частот, левая полуплоскость и т.п.). Поэтому интересно установить, как эти линии и области отображаются на z -плоскость.

Как уже было замечено, при квантовании s -плоскость делится на бесконечное число периодических полос. Если рассматривать

только основную полосу, то контур 1-2-3-4-5-6 на рисунке 3.1 преобразованием $z = e^{Ts}$ отобразится в окружность единичного радиуса (см. рисунок 3.2).

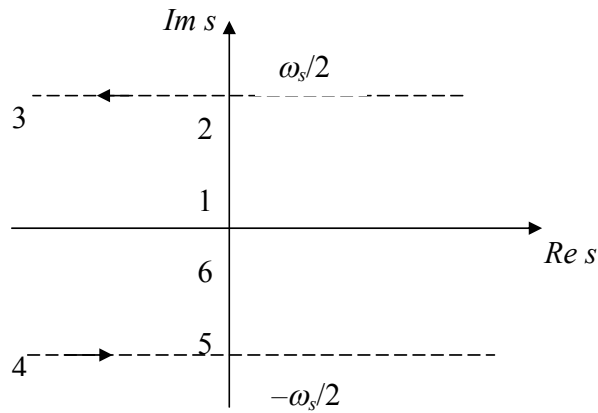


Рисунок 3.1

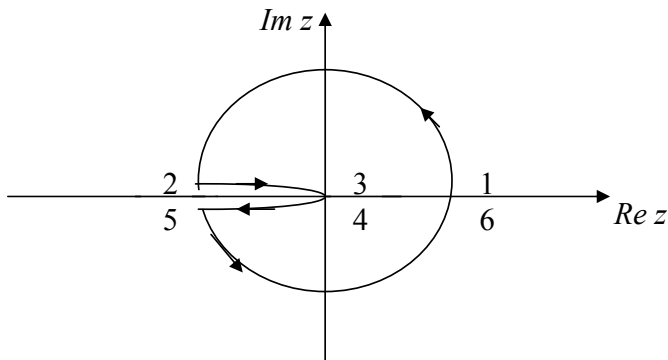


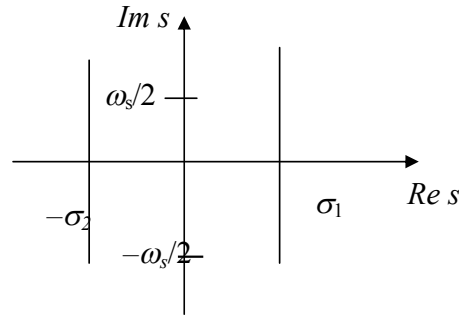
Рисунок 3.2

Поскольку

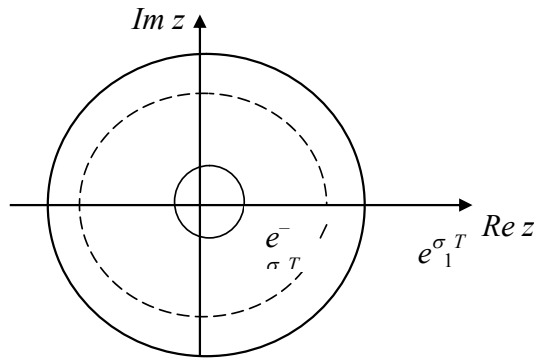
$$e^{(s+jm\omega_s)T} = e^{sT} \cdot e^{jnm} = e^{sT} = z,$$

то все другие полосы в левой половине s отобразятся в тот же единичный круг. Таким образом, левая полуплоскость s отобразится внутрь круга единичного радиуса плоскости z , а точки правой половины s -плоскости отобразятся в точки, расположенные вне этого круга.

Линии постоянного затухания, имеющие в s -плоскости уравнение $s = \sigma + j\omega$ ($\sigma = const$), отображением $z = e^{Ts}$ превратятся в окружности радиуса $e^{\sigma T}$, при этом движение по этим линиям от частоты $-\omega_s/2$ до $+\omega_s/2$ будет на плоскости z эквивалентно полному обороту изображающей точки по соответствующей окружности (смотри рисунок 3.3). При этом сама мнимая ось плоскости s (ее уравнение $s = j\omega$) отобразится в окружность единичного радиуса, показанную на рисунке 3.3 пунктиром.



а)



б)

Рисунок 3.3

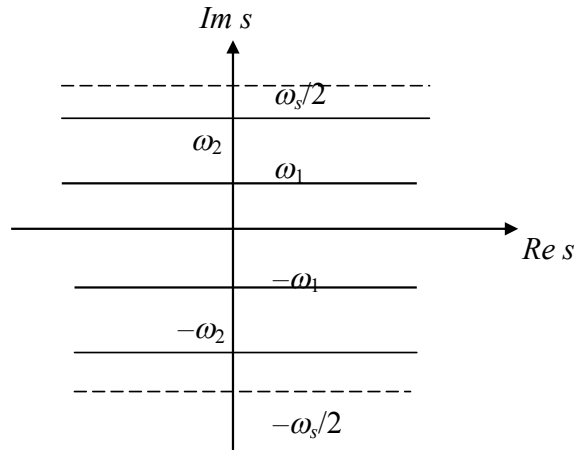
Линии постоянной частоты $s = \sigma + j\omega$ ($\omega = const$) отобразятся в s -плоскости в прямые линии, выходящие из начала координат под углом ωT . Действительно, перейдем к переменной z :

$$z = e^{Ts} = e^{T\sigma} \cdot e^{jT\omega} = e^{T\sigma} (\cos \omega T + j \sin \omega T) = Re z + j Im z. \quad (3.5)$$

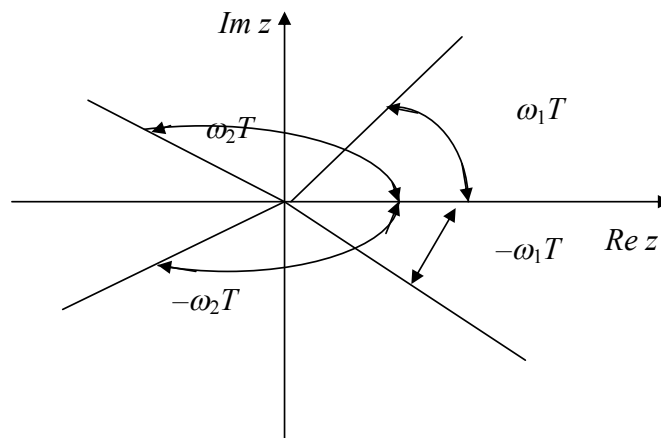
Связь между реальной $Re z$ и мнимой $Im z$ частями z , согласно (3.5), выражается формулой:

$$Im z = Re z \cdot tg \omega T, \quad (3.6)$$

а это и есть уравнение прямой линии с наклоном ωT (см. рисунок 3.4).



а)



б)

Рисунок 3.4

Действительная ось плоскости s отобразится при этом в положительную полуось плоскости z , а линии с частотой $\omega_s/2$ – в отрицательную полуось.

3.1.3 Ограничения метода z -преобразования

z -преобразование является удобным средством для описания дискретных, в том числе и цифровых сигналов и систем, но в некоторых случаях необходимо проявлять осторожность при его применении и интерпретации результатов.

1. z -преобразование базируется на предположении, что квантованный сигнал – это последовательность импульсов, площадь которых равна амплитуде входного сигнала системы. Это справедливо только если время квантования намного меньше определяющей постоянной времени системы.

2. z -преобразование выходного сигнала $Y(z)$ – линейной системы определяется значениями временной функции $y(t)$ только в моменты квантования. Следовательно, $Y(z)$ не содержит информации о значениях $y(t)$ между моментами квантования. Таким образом, для заданной функции-изображения $Y(z)$ – ее обратное преобразование (то есть функция-оригинал) $y(kT)$ описывает $y(t)$ только в моменты квантования $t = kT$.

3. При анализе линейных систем методом z -преобразования передаточная функция непрерывной системы должна иметь полюсов по крайней мере на один больше, чем нулей. Эквивалентное требование во временной области – отсутствие разрыва весовой (импульсной переходной) функции при $t = 0$. В противном случае процессы, представляемые z -преобразованием, могут быть ошибочными. Последнее ограничение, впрочем, для физически реализуемой системы выполняется всегда.

4. При полном описании любой системы неизбежно нужно знать характер процессов между моментами квантования. Поэтому на основе z -преобразования разработано несколько методов, позволяющих это сделать. Наиболее известные среди них (и они будут далее разобраны) метод дробного квантования и метод модифицированного z -преобразования.

3.2 Импульсная передаточная функция

3.2.1 Определение импульсной передаточной функции

Рассмотрим прохождение дискретного импульсного сигнала через линейные цепи и получим описание линейной системы в терминах z -преобразования.

Пусть имеется линейная система с непрерывным сигналом $r(t)$ на входе (смотри рисунок 3.5). Соотношение «вход-выход» такой системы, как известно, описывается передаточной функцией $W(s) = Y(s)/R(s)$.

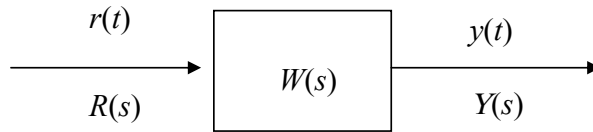


Рисунок 3.5

Подадим теперь на вход такой системы дискретный сигнал:

$$r^*(t) = r(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT).$$

На выходе будем иметь $Y(s) = R^*(s) W(s)$, где $R^*(s)$ – преобразование Лапласа дискретного сигнала.

Проще всего представить описание такой системы в терминах z -преобразования, используя известное соотношение (2.25):

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s + jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^*(s + jn\omega_s) \cdot W(s + jn\omega_s). \quad (3.7)$$

Принимая во внимание свойство периодичности функции $R^*(s + jn\omega_s) = R^*(s)$, перепишем (3.7) в виде:

$$Y^*(s) = R^*(s) \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s). \quad (3.8)$$

Вводя обозначение:

$$W^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s), \quad (3.9)$$

формулу (3.8) получим в виде:

$$Y^*(s) = R^*(s) W^*(s), \quad (3.10)$$

или, переходя к переменной $z = e^{Tz}$, имеем:

$$Y(z) = R(z) W(z). \quad (3.11)$$

Функция комплексной переменной $W(z)$ есть импульсная передаточная функция. Согласно выражению (3.11), она представляет собой отношение z -преобразования сигнала на выходе системы к z -преобразованию сигнала на входе (при нулевых начальных условиях) и может вычисляться, согласно (3.9), по известной передаточной функции по формуле:

$$W(z) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z}. \quad (3.12)$$

Выходной сигнал $y(t)$ может быть и непрерывным, но соотношение (3.11) определяет выходной сигнал только в моменты квантования.

Это же выражение (3.11) может быть получено и другим образом из импульсной переходной функции.

Предположим, что единичный импульс поступает на вход линейной системы в момент времени $t = 0$ (рисунок 3.6).

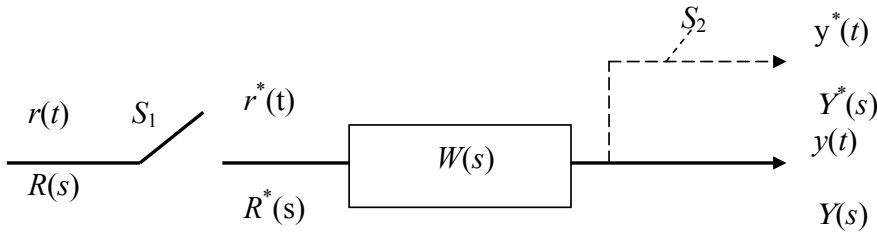


Рисунок 3.6

Выходной сигнал будет представлять собой импульсную переходную функцию $w(t)$. Сигнал на выходе системы после фиктивного квантователя S_2 , изображенного на рисунке 3.6 пунктиром, может быть записан в виде:

$$y^*(t) = w^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) \cdot \delta(t - kT), \quad (3.13)$$

где $w(kT)$ – весовая или импульсная переходная последовательность системы для $k = 0, 1, 2, \dots$

Теперь пусть на входе действует дискретный сигнал:

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \delta(t - kT).$$

Выходной сигнал при этом можно записать так:

$$y(t) = r(0) \cdot w(t) + r(T) \cdot w(t - T) + r(2T) \cdot w(t - 2T) + \dots \quad (3.14)$$

При дискретном времени $t = kT$ ($k \in N_0$) из (3.14) будем иметь:

$$\begin{aligned} y(kT) &= r(0) \cdot w(kT) + r(T) \cdot w[(k-1)T] + \dots + r(kT) \cdot w(0) = \\ &= \sum_{n=0}^k r(nT) \cdot w[(k-n)T] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Сигнал после фиктивного квантователя будет равен:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \cdot \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^k r(nT) \cdot w[(k-n)T] \right\} \delta(t - kT). \quad (3.16)$$

Перейдем к z -преобразованию. Это можно сделать либо применив z -преобразование к правой и левой части выражения (3.15), учитывая теорему о свертке во временной области, либо взяв обычное преобразование Лапласа и перейдя к переменной $z = e^{Ts}$ в выражении (3.16). И в том и в другом случае результат будет один и тот же (сравните с выражением (3.11)):

$$Y(z) = R(z) \cdot W(z).$$

В последнем выражении импульсная передаточная функция $W(z)$ вычисляется как z -преобразование весовой функции $w(t)$:

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) z^{-k} \quad (3.17)$$

и представляет собой, согласно (3.11), отношение z -преобразований выхода и входа.

Необходимо помнить, что в выражении (3.11) z -преобразование $Y(z)$ определяет непрерывный сигнал $y(t)$ только в дискретные моменты времени. В некоторых случаях потеря информации между моментами квантования не играет существенной роли. В других же случаях, если в сигнале $y(t)$ между моментами квантования имеются колебания большой амплитуды, метод z -преобразования может дать неправильные результаты.

3.2.2 Соединения звеньев в дискретной системе

Необходимо внимательно относиться к нахождению импульсной передаточной функции всей системы по передаточным функциям звеньев. Возьмем, например, два последовательно соединенных звена, разделенных квантователем S_2 , идентичным квантователем S_1 , стоящему на входе первого звена (см. рисунок 3.7).

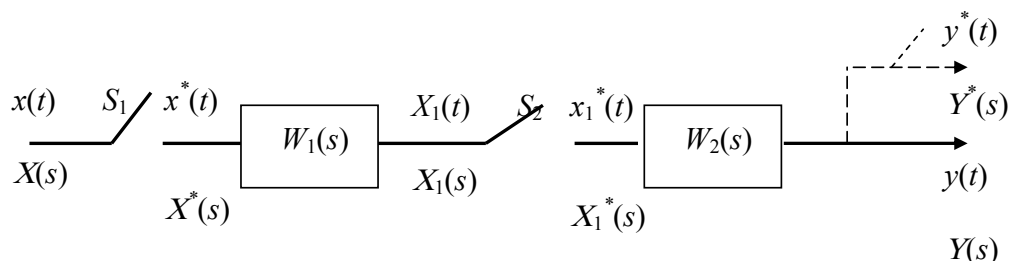


Рисунок 3.7

Учитывая обозначения, приведенные на рисунке, составим уравнения, связывающие дискретные преобразования Лапласа соответствующих переменных:

$$X_1^*(s) = W_1^*(s) \cdot X^*(s), \quad (3.18)$$

$$Y^*(s) = W_2^*(s) \cdot X_1^*(s). \quad (3.19)$$

Подставляя уравнение (3.18) в (3.19) и переходя к переменной z , получим:

$$Y(z) = W_1(z) \cdot W_2(z) \cdot X(z). \quad (3.20)$$

Из выражения (3.20) ясно, что импульсная передаточная функция такого соединения звеньев, как показано на рисунке 3.7, равна произведению импульсных передаточных функций звеньев:

$$W(z) = W_1(z) \cdot W_2(z). \quad (3.21)$$

Если же два звена соединены последовательно, но не разделены квантователем (см. рисунок 3.8), то импульсная передаточная функция такой схемы может быть записана так:

$$W(z) = Z\{W_1(s) \cdot W_2(s)\} = W_1 W_2(z) = W_2 W_1(z). \quad (3.22)$$

В выражении (3.22) стоящие рядом в правой части буквы W_1 и W_2 – это символическая запись того, что z -преобразование берется от временной функции, изображение Лапласа которой есть произведение $W_1(s)$ и $W_2(s)$. Явной формулой для вычисления этого z -

преобразования может служить, например, выражение (2.25) после подстановки в него соответствующих преобразований Лапласа:

$$W_1 W_2(z) = Z\{W_1(s) \cdot W_2(s)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_1(s + jn\omega_s) \cdot W_2(s + jn\omega_s) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z}.$$

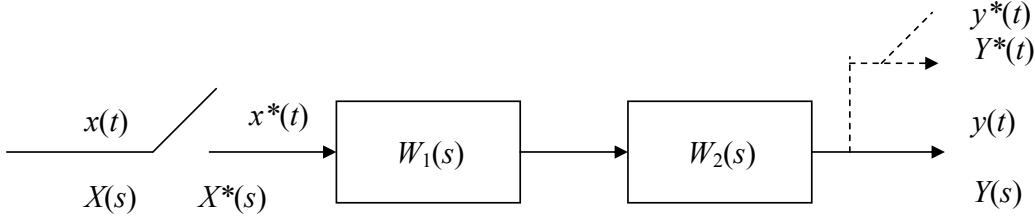


Рисунок 3.8

В общем случае передаточные функции, определяемые выражениями (3.21) и (3.22), не совпадают, то есть:

$$W_1 W_2(z) \neq W_1(z) \cdot W_2(z).$$

Выход, представленный на рисунке 3.8, может быть определен как

$$Y(z) = W_1 W_2(z) \cdot X(z).$$

Рассмотрим теперь параллельное соединение звеньев с одним общим квантователем на входе либо с двумя идентичными квантователями на входе каждого звена так, как это изображено на рисунке 3.9, а и б соответственно.

Уравнения как для схемы рисунка 3.9, а, так и для схемы рисунка 3.9, б будут совершенно одинаковы:

$$\begin{aligned} X_1^*(s) &= W_1^*(s) \cdot X^*(s); \\ X_2^*(s) &= W_2^*(s) \cdot X^*(s); \\ Y^*(s) &= X_1^*(s) + X_2^*(s). \end{aligned}$$

Проводя очевидные преобразования, получим импульсную передаточную функцию параллельно соединенных звеньев в виде:

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z).$$

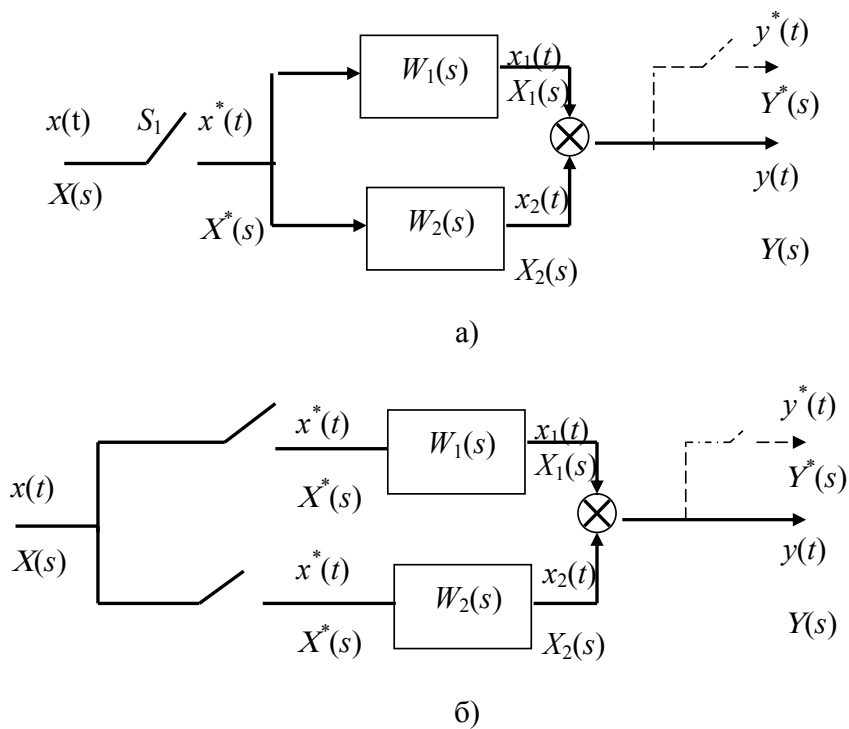


Рисунок 3.9

Аналогичным образом можно получить импульсные передаточные функции соединения звеньев обратной связью. Например, для схемы, приведенной на рисунке 3.10, импульсная передаточная функция будет равна:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1 \cdot W_2(z)}.$$

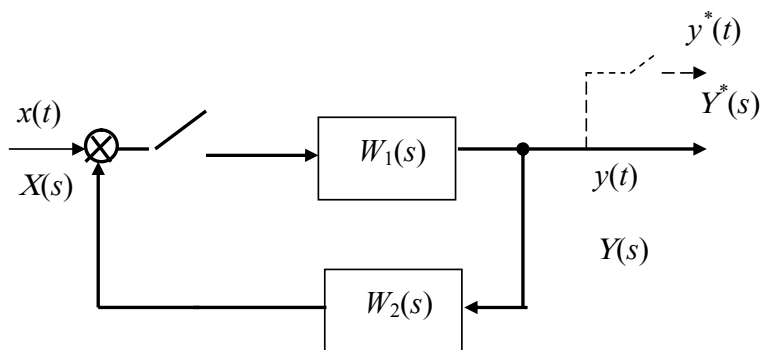


Рисунок 3.10

Для схемы, представленной на рисунке 3.11, импульсная передаточная функция вычисляется так:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z) \cdot W_2(z)}.$$

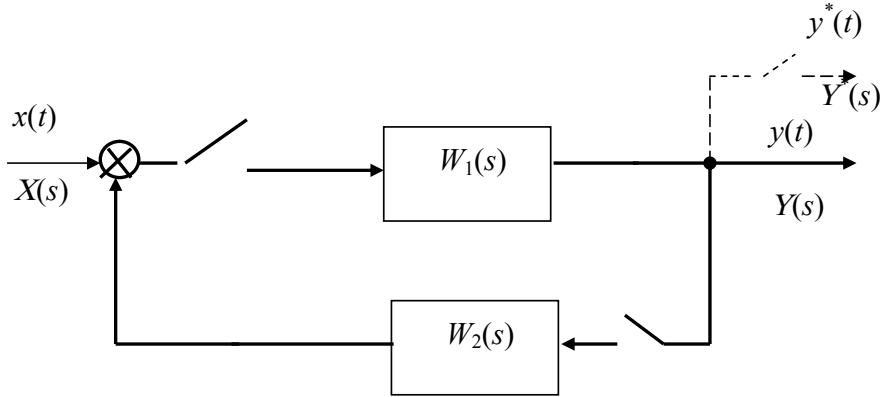


Рисунок 3.11

На обеих схемах обратная связь отрицательна.

Импульсные передаточные функции систем с более сложными соединениями и (или) с большим числом синхронных квантователей могут быть получены алгебраическими преобразованиями или методом сигнальных графов.

3.2.3 Импульсная передаточная функция экстраполятора нулевого порядка

Передаточная функция экстраполятора нулевого порядка, как уже было показано, равна:

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \quad (3.23)$$

z -преобразование от $W_0(s)$ есть:

$$W_0(s) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1.$$

Этот результат очевиден, так как экстраполятор нулевого порядка в течение периода квантования удерживает постоянным вы-

бранный (квантованный) сигнал и вычисление z -преобразования выходного сигнала экстраполятора должно определять исходный входной сигнал. Однако в большинстве случаев за фиксатором нулевого порядка следует непрерывная часть системы. Обозначая передаточную функцию непрерывной части системы через $W(s)$, в соответствии с рисунком 3.12 получим z -преобразование выходного сигнала в виде:

$$Y(z) = W_1(z) \cdot X(z), \quad (3.24)$$

где $W_1(z) = Z\{W_0(s) \cdot W(s)\}$. (3.25)

Подставляя выражение (3.23) в формулу (3.25), получим:

$$W_1(z) = Z\left\{(1 - e^{-Ts}) \frac{W(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}.$$

В последнем выражении применена теорема о сдвиге во временной области, согласно которой умножение изображения на экспоненту равносильно временному сдвигу оригинала, а запаздывание на один такт функции времени приводит к появлению множителя z^{-1} в соответствующем z -преобразовании. Этим и объясняется появление скобки $(1 - z^{-1})$. Однако, z -преобразование $\frac{W(s)}{s}$ должно определяться как для одного целого.

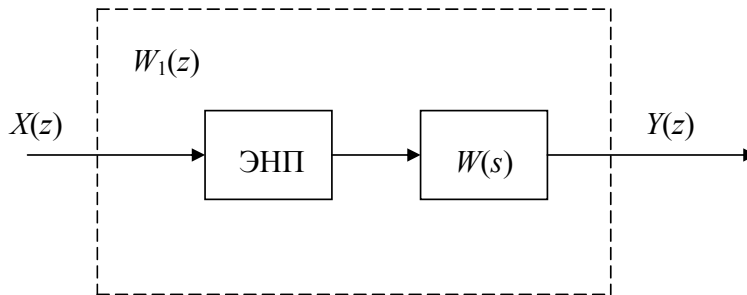


Рисунок 3.12

Ранее уже говорилось о том, что при увеличении частоты квантования дискретная система приближается к непрерывной. Однако это не означает, что если $Z\{W(s)\} = W(z)$, то:

$$\lim_{T \rightarrow 0} W(z) = W(s).$$

Действительно, если сигнал $x(t)$ прошел через идеальный квантователь, замыкающийся с периодом T , и образовал сигнал $x^*(t)$, то стремление T к нулю совсем не означает, что $\lim_{T \rightarrow 0} x^*(t) = x(t)$. Упо-

мянутый предел будет представлять собой бесконечно частую «гребенку» идеальных импульсов, а не исходный непрерывный сигнал. Другое дело, если дискретный сигнал $x^*(t)$ поступает на вход фиксатора нулевого порядка. В этом случае, если обозначить выход фиксатора через $y(t)$, как это сделано на рисунке 3.13, то будет выполняться равенство: $\lim_{T \rightarrow 0} y(t) = x(t)$, или в другой записи:

$$\lim_{T \rightarrow 0} Y(s) = X(s).$$

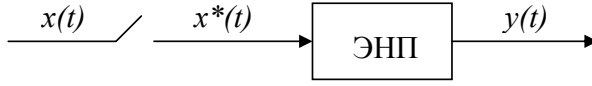


Рисунок 3.13

Таким образом, если непрерывный сигнал подан на устройство выборки и хранения, то выходной сигнал последнего совпадает с этим непрерывным выходным сигналом при периоде квантования, стремящемся к нулю.

Еще одно важное и полезное свойство экстраполятора нулевого порядка заключается в том, что:

$$\lim_{T \rightarrow 0} Z\{W_0(s) \cdot W(s)\} = W(s). \quad (3.26)$$

Чтобы не утомлять читателя, докажем выражение (3.26) только для функций $W(s)$, имеющих простые полюса ξ_k . В этом случае можно воспользоваться формулой (3.2):

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} Z\{W_0(s) \cdot W(s)\} &= \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{N(\xi_k)}{D'(\xi_k)} \frac{1}{1 - e^{-T(s - \xi_k)}} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{N(\xi_k)}{D'(\xi_k)} \lim_{T \rightarrow 0} \frac{Ts}{s} \cdot \frac{1}{T(s - \xi_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{\text{Res } W(s) \Big|_{s=\xi_k}}{s - \xi_k}. \end{aligned}$$

Переход к пределу в последнем выражении осуществлен по правилу Лопиталя при раскрытии неопределенности типа «ноль, деленный на ноль». Сумма, полученная в итоге, представляет собой разложение на простые дроби исходной функции $W(s)$, что и доказывает формулу (3.26).

Пример 3.2. Структурная схема системы представлена на рисунке 3.13*.

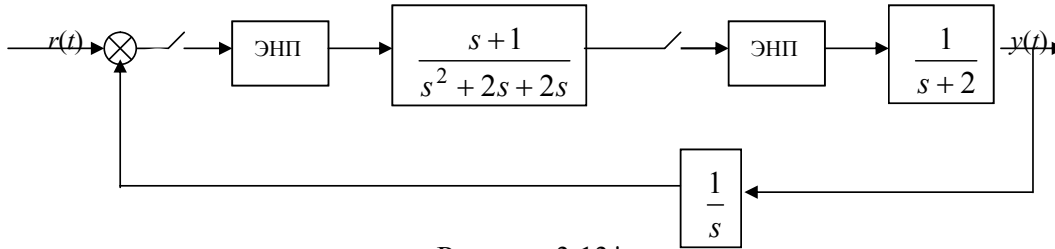


Рисунок 3.13*

Оба квантователя идентичные и работают синхронно. Входное воздействие задано в виде $r(t)=t$. Требуется найти z-преобразование выхода системы $Z(y(t))$.

В соответствии со структурной схемой импульсная передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(z) = \frac{Z\left\{W_0(s) \cdot \frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\} \cdot Z\left\{W_0(s) \cdot \frac{1}{s+2}\right\}}{1 + Z\left\{W_0(s) \cdot \frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\} \cdot Z\left\{W_0(s) \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s}\right\}},$$

где $W_0(s)$ – передаточная функция экстраполятора нулевого порядка.

Подставляя в последнее выражение $W_0(s)$ в соответствии с формулой (3.23), получим:

$$\Phi(z) = \frac{(1-z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}\right\} \cdot (1-z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}}{1 + (1-z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}\right\} \cdot (1-z^{-1}) \cdot Z\left\{\frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s^2}\right\}} =$$

$$= \frac{(z-1)^2 \cdot Z\left\{\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}\right\} \cdot Z\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}}{z^2 + (z-1)^2 \cdot Z\left\{\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}\right\} \cdot Z\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}}.$$

Найдем теперь z-преобразования выражений, стоящих в числителе и знаменателе. Для этого разложим выражения, стоящие под знаком z-преобразования, на простые дроби и по таблицам (см. приложение) запишем соответствующие z-изображения.

$$\begin{aligned} Z\left\{\frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= Z\left\{\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2+2s+2)}\right\} = \frac{1}{2} Z\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2} Z\left\{\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+1}\right\} = \\ &= \frac{z}{2(z-1)} - \frac{z(z-e^{-T} \cdot \cos T)}{2(z^2 - 2ze^{-T} \cdot \cos T + e^{-2T})} + \frac{ze^{-T} \cdot \sin T}{2(z^2 - 2ze^{-T} \cdot \cos T + e^{-2T})} = \\ &= \frac{z}{2(z-1)} - \frac{z^2}{2(z^2 - 2ze^{-T} \cdot \cos T + e^{-2T})} + \frac{ze^{-T} \cdot (\cos T + \sin T)}{2(z^2 - 2ze^{-T} \cdot \cos T + e^{-2T})} = \\ &= \frac{z}{2(z-1)} - \frac{z^2}{2(z^2 - 2ze^{-T} \cdot \cos T + e^{-2T})} + \frac{ze^{-T} \cdot \cos(T - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}(z^2 - 2ze^{-T} \cdot \cos T + e^{-2T})}. \end{aligned}$$

$$Z\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\} = Z\left\{\frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s+2)}\right\} = \frac{1}{2} Z\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{2} Z\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \frac{z}{2(z-1)} - \frac{z}{2(z-e^{-2T})}.$$

$$\begin{aligned} Z\left\{\frac{1}{(s+2)s^2}\right\} &= Z\left\{\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)}\right\} = \frac{1}{2} Z\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{z}{4(z-1)} + \frac{z}{4(z-e^{-2T})} = \\ &= \frac{Tz}{2(z-1)^2} - \frac{z}{4(z-1)} + \frac{z}{4(z-e^{-2T})}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные z-изображения в выражение для $\Phi(z)$, находим передаточную функцию замкнутой системы. Далее по таблице z-преобразований определяем изображение входного сигнала

$$R(z) = Z\{r(t)\} = Z\{t\} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

и по формуле

$$Y(z) = R(z) \cdot \Phi(z)$$

получаем искомое z -преобразование выхода системы.

3.3 Процессы между моментами квантования

Непрерывный сигнал достаточно точно может быть описан своими дискретными выборками только при выполнении условий импульсной теоремы. Если эти условия не соблюдены, то метод z -преобразования не позволяет даже приблизительно судить о процессах между моментами квантования. Информация же об этом порой бывает крайне необходимой. Помочь в таком случае могут разработанные на основе z -преобразования метод дробного квантования и метод модифицированного z -преобразования, которые будут дополнять обычный метод z -преобразования. Упомянутые методы дробного квантования и модифицированного z -преобразования применяются как основные математические методы при исследовании цифровых систем с многократным квантованием и (или) с переменным периодом квантования.

3.3.1 Метод дробного квантования

Суть метода можно пояснить рисунком 3.14. Система, исследуемая методом z -преобразования, показана на рисунке 3.14, а. Два квантователя (как основной на входе, так и фиктивный на выходе, изображенный пунктиром) работают синхронно с периодом T и обозначены s_1 .

Для того чтобы исследовать процессы в системе между моментами квантования, введем в систему дополнительно два фиктивных квантователя s_2 — один на входе и один на выходе системы (см. рис. 3.14, б) и заставим эти квантователи работать чаще квантователей s_1 в N раз. Таким образом, период замыкания квантователей s_2 будет $\frac{T}{N}$, где N — целое положительное число, большее единицы. Ясно, что замыкание квантователя s_2 на входе между моментами квантования основного ключа s_1 ничего в поведении системы не изменит.

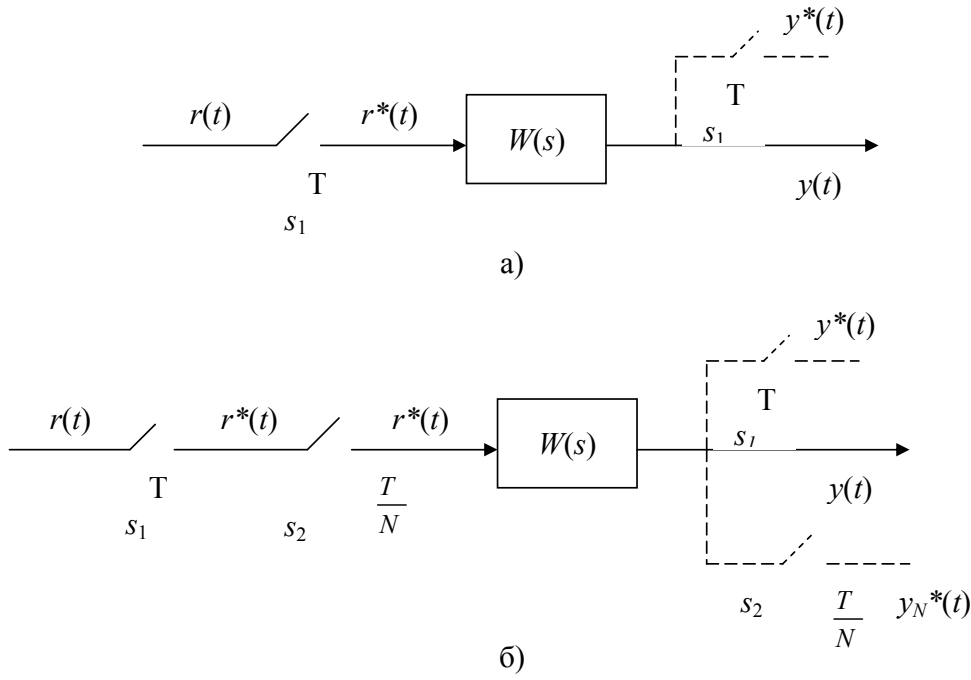


Рисунок 3.14

Согласно выражению (3.14), сигнал на выходе может быть представлен как:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot w(t - kT), \quad (3.27)$$

где $w(t) = L^{-1}\{W(s)\}$ – весовая функция системы.

Выражение (3.27) справедливо для произвольного момента времени, в том числе и для $t = \frac{nT}{N}$, поэтому, полагая в формуле

(3.27) $t = \frac{nT}{N}$, имеем:

$$y\left(\frac{nT}{N}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot w\left(\frac{nT}{N} - kT\right). \quad (3.28)$$

Запишем теперь выход системы после фиктивного квантователя s_2 :

$$y_N^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y\left(\frac{nT}{N}\right) \cdot \delta\left(t - \frac{nT}{N}\right).$$

Применяя z -преобразование к последнему соотношению, получим:

$$Y_N(z) = Z\{y_N^*(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} y\left(\frac{nT}{N}\right) z^{-\frac{n}{N}}. \quad (3.29)$$

Подставляя в соотношение (3.29) выражение (3.28), имеем:

$$Y_N(z) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) w\left(\frac{nT}{N} - kT\right) z^{-\frac{n}{N}}. \quad (3.30)$$

Для разделения индексов суммирования в формуле (3.30) положим $\frac{n}{N} - k = \frac{m}{N}$, где m – целое число. Учитывая то, что весовая функция физически реализуемой системы тождественно равна нулю при отрицательном аргументе, выражение (3.30) преобразуем к виду:

$$Y_N(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w\left(\frac{mT}{N}\right) z^{-\frac{m}{N}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) z^{-kT} = W_N(z) \cdot R(z), \quad (3.31)$$

где введено очевидное обозначение:

$$W_N(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w\left(\frac{mT}{N}\right) \cdot z^{-\frac{m}{N}}. \quad (3.32)$$

Легко можно заметить, что формула (3.32) получается из обычного z -преобразования после замены $z = z^{\frac{1}{N}}$ и $T = \frac{T}{N}$. Таким образом, реакция системы между моментами квантования может быть найдена из выражения (3.31), где:

$$W_N(z) = W(z) \Bigg|_{z=z^{\frac{1}{N}}, T=\frac{T}{N}}; \quad (3.32')$$

Анализируя систему с фиксатором нулевого порядка, можно понять, что на член $(1 - z^{-1})$ замена $z = z^{\frac{1}{N}}$ и $T = \frac{T}{N}$ влияния не оказывает.

Недостатком метода дробного квантования является то, что этот метод позволяет получать выход системы только в конкретных дискретных точках, и чем больше нам необходимо иметь таких точек, тем большее значение N мы должны задавать в формулах (3.31–3.32'). С ростом же N вычисления усложняются, поскольку для избавления от z в дробной степени неизбежно приходится вводить новую переменную $z_N = z^{\frac{1}{N}}$, что затрудняет нахождение $R(z_N)$ в выражении (3.31).

Пример 3.2. Пусть структурная схема системы имеет вид, представленный на рисунке 3.14*.

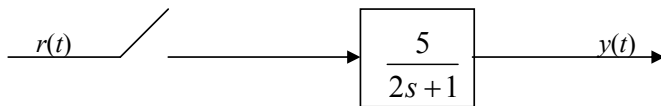


Рисунок 3.14*

Период квантования $T=1$ сек. Требуется найти значения выхода системы $y(t)$ в моменты времени $t = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2$ сек., если на входе действует единичный ступенчатый сигнал $r(t) = 1(t)$.

В соответствии с формулой (3.31) получим

$$Y_3(z) = W_3(z) \cdot R(z),$$

$$\text{где } W_3(z) = Z \left\{ \frac{5}{2s+1} \right\} \bigg|_{\substack{z=z^{\frac{1}{3}} \\ T=\frac{T}{3}}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{z}{z - e^{-\frac{T}{2}}} \bigg|_{\substack{z=z^{\frac{1}{3}} \\ T=\frac{T}{3}}} = \frac{5z^{\frac{1}{3}}}{2(z^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{T}{6}})}.$$

z -преобразование единичной ступенчатой функции равно

$$R(z) = Z\{1(t)\} = \frac{z}{z-1}.$$

Чтобы не оперировать с дробными степенями

z , переобозначим $z^{\frac{1}{3}} = z$. Учитывая, что $e^{-\frac{1}{6}} = 0,847$, получим

$$Y(z) = \frac{5z}{2(z-0,847)} \cdot \frac{z^3}{z^3-1} = \frac{5z^4}{2z^4 - 1,69z^3 - 2z + 1,69}.$$

Осуществляя деление числителя на знаменатель (при этом полиномы числителя и знаменателя должны располагаться по убывающим степеням z), получаем разложение $Y(z)$ в ряд по степеням z^{-1} :

$$Y(z) = 2,5 + 2,12z^{-1} + 1,79z^{-2} + 4,01z^{-3} + 3,39z^{-4} + 2,88z^{-5} + 4,94z^{-6} + \dots$$

Коэффициенты этого разложения есть значения функции $y(kT)$ в дискретных точках $k=0..6$, следующих через интервалы времени $1/3$ сек. График зависимости выходного сигнала системы от времени приведен на рис. 3.14**.

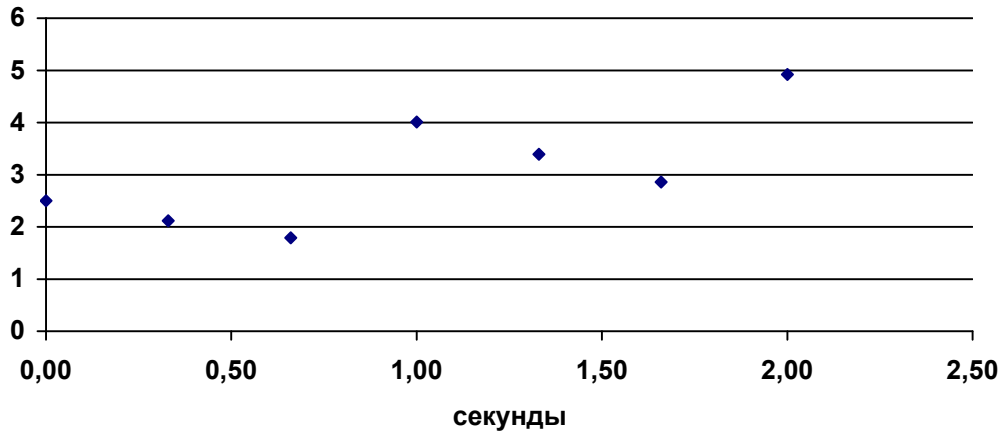


Рисунок 3.14**

3.3.2 Метод модифицированного z -преобразования

Идея этого метода также достаточно прозрачна и заключается во введении на выходе системы фиктивного блока задержки на время ΔT , где $0 \leq \Delta < 1$, и фиктивного квантователя, синхронно работающего с основным квантователем на входе (см. рис. 3.15).

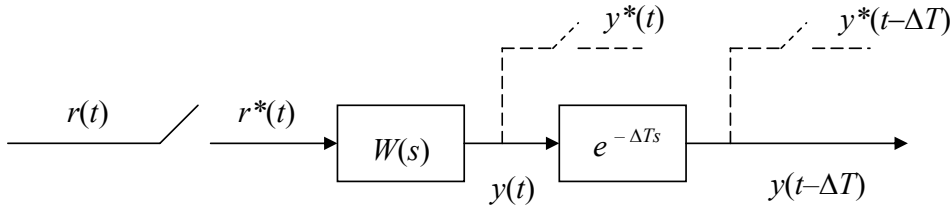


Рисунок 3.15

Передаточная функция звена постоянного запаздывания равна $e^{-\Delta Ts}$. Обозначив z -преобразование выходного сигнала фиктивного квантователя с временной задержкой через $Y(z, \Delta)$, получим:

$$Y(z, \Delta) = Z\{y(t - \Delta T)\}.$$

Так как z -преобразование есть преобразование Лапласа импульсной функции после замены $z = e^{Ts}$, последнее выражение можно продолжить:

$$\begin{aligned} Y(z, \Delta) &= L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} y(kT - \Delta T)\delta(t - kT)\right\}\Bigg|_{z=e^{Ts}} = L\left\{y(t - \Delta T) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right\}\Bigg|_{z=e^{Ts}} = \\ &= L\{y(t - \Delta T)\} * L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right\}\Bigg|_{z=e^{Ts}}, \end{aligned}$$

где через $*$ обозначена свертка изображений (согласно теореме о свертке в области изображений).

Используя теорему о сдвиге во временной области, изображение гребенки дельта-функций и запись свертки в явном виде, получим:

$$Y(z, \Delta) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(\xi) \cdot e^{-\Delta T\xi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi \Bigg|_{z=e^{Ts}}. \quad (3.33)$$

Интеграл (3.33) можно вычислить, воспользовавшись теоремой о вычетах. Для этого необходимо получить замкнутый контур, дополнив линию интегрирования в интеграле (3.33) дугой бесконечно большого радиуса либо в левой, либо в правой полуплоскости комплексной переменной ξ . При этом, для того чтобы интеграл (3.33) не изменился, должно выполняться условие: соответствующий интеграл при $\xi \rightarrow -\infty$ должен равняться нулю (при замыкании контура через левую полуплоскость) либо этот же интеграл должен

обращаться в нуль при $\xi \rightarrow +\infty$ (при замыкании контура интегрирования через правую полуплоскость).

Рассмотрим вначале замыкание пути интегрирования через бесконечную дугу в левой полуплоскости.

Непосредственное вычисление интеграла (3.33) и применение теоремы о вычетах в данном случае становится невозможным, так как подынтегральная функция за счет множителя $e^{-\Delta T}$ имеет особенность в точке $\xi \rightarrow -\infty$. Преодолеть эту трудность помогает, может быть, и не совсем корректный с точки зрения математики, но зато наглядный и понятный с инженерной точки зрения прием. Введем параметр $m = 1 - \Delta$. Так же, как и Δ , параметр m может меняться от нуля до единицы. С учетом обозначения:

$$Y(z, m) = Y(z, \Delta) \Big|_{\Delta = 1 - m},$$

выражение (3.33) примет вид:

$$\begin{aligned} Y(z, m) &= \frac{1}{2\pi j} \oint Y(\xi) \cdot e^{-T\xi} \cdot e^{mT\xi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi \Big|_{z = e^{Ts}} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint L\{y(t - T)\} \cdot e^{mT\xi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi. \end{aligned}$$

К последнему интегралу с полным правом применима теорема о вычетах. Учитывая теорему сдвига во временной области на величину T (это равносильно умножению z -изображения на z^{-1}), получим:

$$Y(z, m) = z^{-1} \sum \operatorname{Res} \left\{ Y(\xi) \cdot \frac{e^{mT\xi}}{1 - e^{T\xi} \cdot z^{-1}} \right\} \Big|_{\text{в полюсах } Y(\xi)}. \quad (3.34)$$

Формулу (3.34) можно принять за одно из определений модифицированного z -преобразования сигнала $y(t)$.

Рассмотрим второй случай, то есть замкнем контур интегрирования дугой бесконечно большого радиуса в правой полуплоскости комплексной переменной ξ . В этом случае теорема о вычетах применима, если:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} Y(\xi) = 0. \quad (3.35)$$

Условие (3.35), по сути, означает, что степень полинома числителя $Y(\xi)$ должна быть меньше степени полинома знаменателя, а это выполняется для физически реализуемых сигналов $y(t)$. При этом не возникает необходимости вводить параметр m . Таким образом, из формулы (3.33) имеем:

$$Y(z, \Delta) = \frac{1}{2\pi j} \oint Y(\xi) e^{-\Delta T \xi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi \Big|_{z=e^{Ts}} =$$

$$= - \sum \operatorname{Res} \left\{ Y(\xi) e^{-\Delta T \xi} \cdot \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} \right\} \Big|_{\text{в полюсах } 1/(1 - e^{-T(s-\xi)})}. \quad (3.36)$$

Полюса функции $1/(1 - e^{-T(s-\xi)})$ имеют вид $\xi_n = s + jn\omega_s$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и являются простыми, поэтому формула (3.36) дает в итоге:

$$Y(z, \Delta) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s + jn\omega_s) e^{-\Delta T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}}.$$

Для единообразия в последнем выражении можно заменить $\Delta = 1 - m$ и получить следующую формулу*:

$$Y(z, m) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}}. \quad (3.37)$$

Наконец, третья формула может быть получена, если непосредственно применить z -преобразование к $y^*(t - \Delta T)$. В этом случае получаем:

$$Y(z, m) = Z\{y^*(t - \Delta T)\} \Big|_{\Delta = 1 - m} = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT + mT - T) z^{-k},$$

или с учетом теоремы о запаздывании:

$$Y(z, m) = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} y((k + m)T) z^{-k}. \quad (3.38)$$

Таким образом, получены три выражения для модифицированного z -преобразования: (3.34), (3.37) и (3.38). Первая формула

* Строго говоря, в правой части формулы (3.37) должно еще быть слагаемое $\frac{1}{2} y(+0)$ (ср. с выражением (2.27)).

(3.34) справедлива для любого сигнала $y(t)$, имеющего преобразование Лапласа $Y(s)$, и этой формулой удобно пользоваться, если задано (или его легко найти) изображение сигнала $Y(s)$. Формула (3.37) справедлива, только если $y(0) = 0$. И, наконец, формула (3.38) является наиболее общей, поскольку никаких ограничений на временные ряды при ее выводе не накладывалось.

Необходимо сделать еще одно замечание, касающееся модифицированного z -преобразования. Хотя при $\Delta=0$ ($m=1$) модифицированное z -преобразование переходит в обычное z -преобразование, это не означает, что непременно должно выполняться равенство:

$$Y(z, m) \Big|_{m=1} = Y(z). \quad (3.39)$$

Действительно, положив в выражении (3.38) $m = 1$, получим:

$$Y(z, m) \Big|_{m=1} = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} y((k+1)T) z^{-k} = Y(z) - y(0),$$

то есть равенство (3.39) справедливо, только если $y(0) = 0$.

Значения сигнала между моментами квантования можно определить из $Y(z, m)$ при варьировании величины m от единицы до нуля.

С помощью модифицированного z -преобразования можно найти передаточную функцию системы, изображенной на рисунке 3.15. Преобразование Лапласа от выходного сигнала $y(t)$ равно:

$$Y(s) = W(s) \cdot R^*(s).$$

Подставляя это выражение в формулу (3.37), получим:

$$\begin{aligned} Y(z, m) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s) \cdot R^*(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}} = \\ &= R(z) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s) e^{-(1-m)T(s + jn\omega_s)} \Big|_{z=e^{Ts}} = R(z) \cdot W(z, m), \end{aligned} \quad (3.40)$$

где $W(z, m)$ является модифицированным z -преобразованием от $W(s)$ и вычисляется по формуле, аналогичной (3.37).

Пример 3.3. Рассмотрим ту же систему, что и в примере 3.2. Воспользуемся формулой (3.40). Изображение входного единичного сигнала равно $R(z) = \frac{z}{z-1}$. Для определения модифицированного z -

преобразования от передаточной функции применим выражение (3.34):

$$\begin{aligned} W(z, m) &= z^{-1} \sum \operatorname{Res} \left[W(s) \cdot \frac{e^{mTs}}{1 - e^{Ts} \cdot z^{-1}} \right]_{\text{в полюсах } W(s)} = \\ &= z^{-1} \operatorname{Res} \left[\frac{2,5}{(s + 0,5)} \cdot \frac{e^{mTs}}{1 - e^{Ts} \cdot z^{-1}} \right]_{s=-0,5} = \frac{2,5e^{-mT/2}}{z - e^{-T/2}}. \end{aligned}$$

Альтернативный метод определения модифицированного z -преобразования заключается в том, что сначала от передаточной функции переходим к оригиналу

$$L^{-1}\{W(s)\} = 2,5 \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s + 0,5}\right\} = 2,5e^{-t/2},$$

а затем применяем формулу (3.38):

$$W(z, m) = 2,5z^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+m)T/2} \cdot z^{-k}.$$

Используя формулу суммы бесконечного ряда (сумма геометрической прогрессии), замечаем, что последнее выражение совпадает с уже полученным ранее:

$$W(z, m) = 2,5z^{-1} \cdot \frac{e^{-mT/2}}{1 - e^{-T/2}} = \frac{2,5e^{-mT/2}}{z - e^{-T/2}}.$$

Далее запишем модифицированное z -преобразование выходного сигнала системы:

$$Y(z, m) = 2,5 \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{e^{-mT/2}}{z - e^{-T/2}}.$$

Можно показать, что при разложении $Y(z, m)$ в ряд по степеням z^{-1} коэффициент при z^{-k} равен $\frac{e^{-mT/2} \cdot (1 - e^{-kT/2})}{1 - e^{-T/2}}$. Это выражение

определяет значение переходной функции для интервала времени $(k-1)T < t \leq kT, k \geq 1$, при изменении параметра m от нуля до единицы. Переходная функция при этом будет такая же, как и на рисунке 3.14*.

Точно таким же образом, как и для разомкнутой системы, может быть определена реакция замкнутой системы между моментами

квантования. Рассмотрим пример замкнутой системы, структурная схема которой приведена на рисунке 3.16.

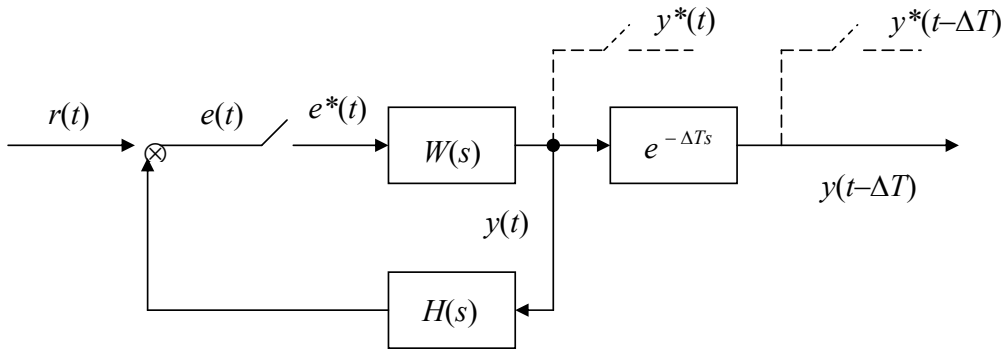


Рисунок 3.16

Составляем уравнение системы:

$$\begin{aligned} Y(z, m) &= W(z, m) \cdot E(z), \\ E(z) &= R(z) - WH(z) \cdot E(z), \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $WH(z)$ есть z -преобразование от произведения $W(s) \cdot H(s)$.

Из уравнений (3.41) получаем $Y(z, m)$:

$$Y(z, m) = \frac{W(z, m)}{1 + WH(z)} \cdot R(z). \quad (3.42)$$

3.4 Структурный анализ дискретных систем

С помощью аппарата z -преобразований и импульсных передаточных функций удобно проводить структурный анализ цифровых систем. Определение передаточных функций в простых случаях параллельного, последовательного соединения или соединения звеньев обратной связью, а также в простых одноконтурных системах уже проводилось с помощью алгебраических преобразований (см., например, раздел 4.2.2). Однако метод эквивалентных структурных преобразований может оказаться достаточно сложным в применении к дискретным системам со сложной структурой и несколькими квантователями. Известная формула Мейсона, являющаяся основой метода графов, также не может быть непосредственно применима к дискретным (цифровым) системам, так как в большинстве циф-

ровых систем управления присутствуют как цифровые, так и непрерывные сигналы.

Один из подходов, расширяющих аппарат метода графов для цифровых систем, основан на формировании так называемого «дискретного графа», в котором все узловые переменные являются дискретными. Тогда формула Мейсона справедлива и может быть применена. Метод дискретного графа можно разбить на ряд шагов.

1. По структурной схеме составляется эквивалентный граф системы. На рисунке 3.17, б приведен простой пример построения эквивалентного графа по структурной схеме системы (рис. 3.17, а).

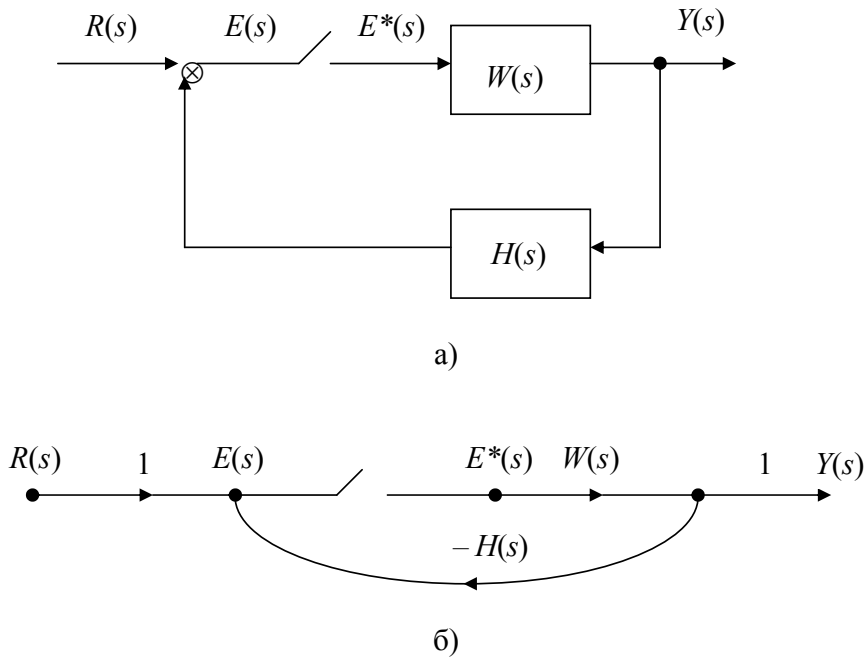


Рисунок 3.17

2. На основе полученного эквивалентного графа производят построение дискретного графа. Для этого запишем систему уравнений для всех вершин графа, показанного на рисунке 3.17, б:

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - W(s)H(s) \cdot E^*(s), \\ Y(s) &= W(s) \cdot E^*(s). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Если рассматривать выходной сигнал квантователя как входную переменную, то сам квантователь может быть удален из графа системы.

В уравнениях (3.43) перейдем в правых и левых частях к дискретному преобразованию:

$$\begin{aligned} E^*(s) &= R^*(s) - WH^*(s)E^*(s), \\ Y^*(s) &= W^*(s) \cdot E^*(s), \end{aligned} \quad (3.44)$$

где $WH^*(s)$, $Y^*(s)$, $E^*(s)$ и $W^*(s)$ вычисляются, например, по формулам, аналогичным выражениям (2.25) или (3.9).

Уравнения (3.44) содержат только дискретные переменные, поэтому граф, соответствующий этим уравнениям, можно назвать «дискретным графом». Полученный граф приведен на рисунке 3.18.

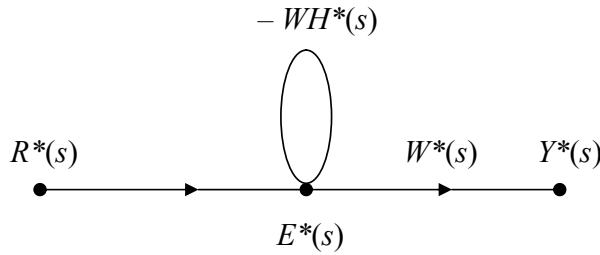


Рисунок 3.18

3. В полученном дискретном графе связь между любым входным и выходным сигналом может быть определена по формуле Мейсона. Например, для дискретного графа, приведенного на рисунке 3.18, применение формулы Мейсона к входу системы $Y^*(s)$ и к ошибке $E^*(s)$ дает:

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \frac{W^*(s)}{1 + WH^*(s)} R^*(s), \\ E^*(s) &= \frac{1}{1 + WH^*(s)} R^*(s). \end{aligned}$$

4. Если необходимо связать непрерывные выходные сигналы с входными, то это можно сделать с помощью составного графа, который является комбинацией эквивалентного непрерывного и дискретного графов. Для его получения необходимо соединить дугой с единичным весом выходной узел квантователя эквивалентного графа с аналогичным узлом дискретного графа. Для нашего примера составной граф представлен на рисунке 3.19.

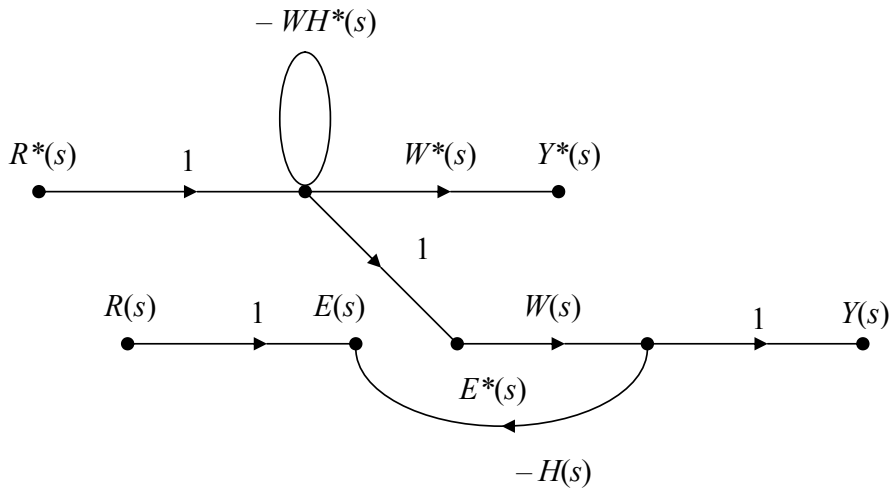


Рисунок 3.19

Формула Мейсона, примененная к выходным вершинам составного графа, позволяет определить передаточные функции для всех цифровых и непрерывных выходных сигналов. Таким образом, из рисунка 3.19 имеем:

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + WH^*(s)} R^*(s),$$

$$E(s) = R(s) - \frac{W(s) \cdot H(s)}{1 + WH^*(s)} R^*(s). \quad (3.45)$$

Вышеизложенная процедура применима также к линейным многоконтурным системам с несколькими синхронно работающими квантователями.

Модифицированное z -преобразование может быть получено непосредственно из выражений (3.45).

Существуют и другие методы вычисления передаточной функции сложной многоконтурной системы с дискретными и непрерывными сигналами, например, метод прямого графа, разработанный Седлером и Бэки (Sedlar M. and Bekey G.).

Подведем определенный итог применению метода z -преобразования для исследования цифровых систем. После того как введены z -преобразование и модифицированное z -преобразование,

можно построить формальную алгебру для работы с цифровыми системами. Вначале составляется блок-схема исследуемой системы. Каждый аналого-цифровой преобразователь представляется как идеальный квантователь, а цифро-аналоговый преобразователь – как устройство выборки и хранения. Линейные стационарные элементы описывают их передаточными функциями, а линейные вычисления в ЦВМ – импульсными передаточными функциями. Участки между квантователями свертывают по обычным правилам эквивалентных преобразований линейных стационарных систем. В случае, если имеются сложные перекрещивающиеся связи, для вычисления передаточных функций применяют, например, метод дискретных графов. После этого можно записать уравнение системы, которое преобразуют, используя теоремы z -преобразования.

Рассмотрим в качестве примера стандартную конфигурацию простейшей цифровой системы управления (см. рис. 3.20).

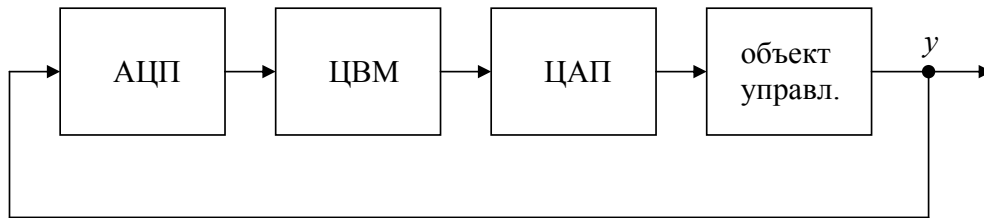


Рисунок 3.20

Объект управления характеризуется передаточной функцией $W(s)$, а вычисления, выполняемые ЦВМ, – импульсной передаточной функцией $H(z)$. Как обычно, аналоговая и цифровая части соединены посредством аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразователей. Чтобы применить формализм, аналого-цифровой преобразователь представляем в виде идеального квантователя, ЦВМ – как устройство, преобразующее один импульсно-модулированный сигнал в другой, в виде блока с импульсной передаточной функцией $H(z)$, цифро-аналоговый преобразователь – как идеальный квантователь, последовательно соединенный с фиксатором нулевого порядка. Выделяя еще элемент сравнения (датчик), получим схему, изображенную на рисунке 3.21.

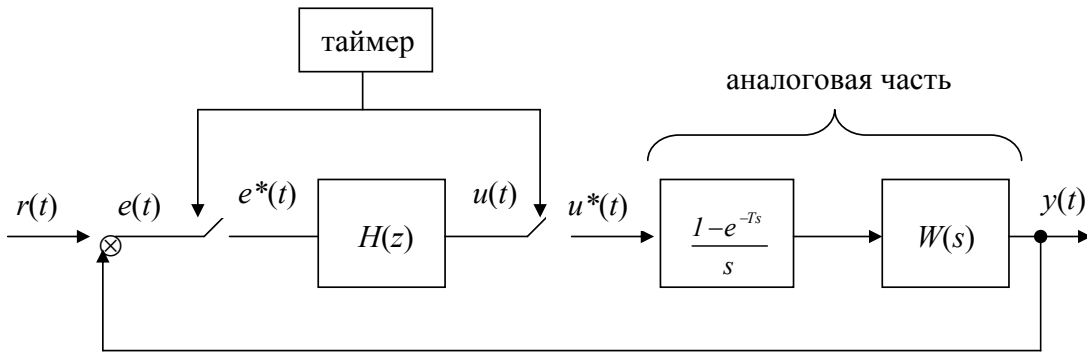


Рисунок 3.21

Аналоговая часть имеет передаточную функцию:

$$F(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} W(s).$$

Преобразование Лапласа выхода $y(t)$ будет:

$$Y(s) = F(s) \cdot U^*(s). \quad (3.46)$$

Переходя к дискретному преобразованию Лапласа, из формулы (3.46) получим:

$$Y^*(s) = F^*(s) \cdot U^*(s),$$

или в форме z -преобразования после замены переменной $z = e^{Ts}$:

$$Y(z) = F(z) \cdot U(z).$$

Окончательно структурная схема системы предстанет такой, как она изображена на рисунке 3.22.

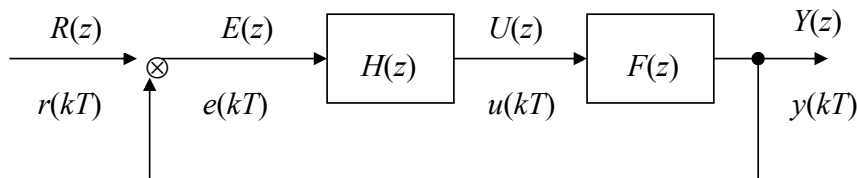


Рисунок 3.22

Таким образом, введение импульсной передаточной функции и рассмотрение сигналов в дискретные моменты времени позволяет представить систему аналогично обычной структурной схеме непрерывной системы.

4 МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Метод пространства состояний, применяемый для исследования непрерывных систем, с успехом может быть использован и для цифровых систем. Если непрерывная система описывается в пространстве состояний системой дифференциальных уравнений первого порядка (нормальная форма Коши), то цифровая система только с дискретными элементами – системой разностных уравнений первого порядка. В общем случае цифровая система может содержать как цифровые, так и аналоговые элементы, поэтому уравнения состояния будут состоять одновременно из дифференциальных и разностных уравнений первого порядка.

Метод пространства состояний имеет определенные преимущества перед классическим частотным методом:

- удобство решения задач на ЦВМ;
- унификация описания цифровых систем с различными типами квантования;
- единообразие описания одномерных и многомерных систем;
- возможность применения к некоторым типам нелинейных и нестационарных систем.

4.1 Уравнения состояния

В общем случае состояние системы можно определить как минимальную информацию о системе, необходимую для определения (при известной входной функции) ее выхода, а также ее состояния в будущем.

Для систем с только дискретными переменными совокупность переменных \mathbf{x} образует вектор состояния системы, если можно найти такие две однозначные функции f и g , что:

$$\mathbf{x}(kT + T) = f(\mathbf{x}(kT), \mathbf{r}(kT)), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(kT) = g(\mathbf{x}(kT), \mathbf{r}(kT)), \quad (4.2)$$

где $\mathbf{y}(kT)$ – выходной вектор в момент времени kT , а $\mathbf{r}(kT)$ – вектор входных воздействий в момент времени kT .

Соотношение (4.1) называется уравнением состояния, а выражение (4.2) – уравнением выхода.

4.1.1 Уравнения динамики систем, содержащих только цифровые элементы

В случае линейной многомерной системы, содержащей только цифровые элементы, уравнения (4.1), (4.2) записываются в виде линейных векторно-матричных разностных уравнений:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{A}(kT) \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}(kT) \cdot \mathbf{r}(kT), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}(kT) \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}(kT) \cdot \mathbf{r}(kT), \quad (4.4)$$

где $\mathbf{x}(kT)$ – вектор-столбец состояний системы размерностью n , $\mathbf{r}(kT)$ – вектор-столбец входных воздействий размерностью p , $\mathbf{y}(kT)$ – вектор-столбец выходных сигналов размерностью m ; $\mathbf{A}(kT)$, $\mathbf{B}(kT)$, $\mathbf{C}(kT)$, $\mathbf{D}(kT)$ – матрицы соответствующей размерности с изменяющимися в общем случае во времени элементами. Значения этих элементов могут меняться только в дискретные моменты времени kT ($k = 0, 1, 2, \dots$). Если уравнения (4.3), (4.4) описывают стационарную систему, элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} не зависят от времени.

Уравнения (4.3), (4.4) могут быть записаны и в другой форме, если дискретное время нормировать, то есть положить $T = 1$:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{r}(k), \quad (4.5)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \cdot \mathbf{r}(k). \quad (4.6)$$

На практике уравнения динамики (4.5) и (4.6) могут описывать систему, в которой k обозначает «шаги» или «последовательность действий», при этом шаги могут следовать необязательно через равные промежутки времени. Тогда уравнения состояния (4.5) и выхода (4.6) можно представить в таком виде:

$$\mathbf{x}(k_{j+1}) = \mathbf{A}(k_j) \cdot \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{B}(k_j) \cdot \mathbf{r}(k_j), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{y}(k_j) = \mathbf{C}(k_j) \cdot \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{D}(k_j) \cdot \mathbf{r}(k_j). \quad (4.8)$$

Общая блок-схема системы, соответствующая, например, уравнениям (4.5), (4.6), представлена на рисунке 4.1.

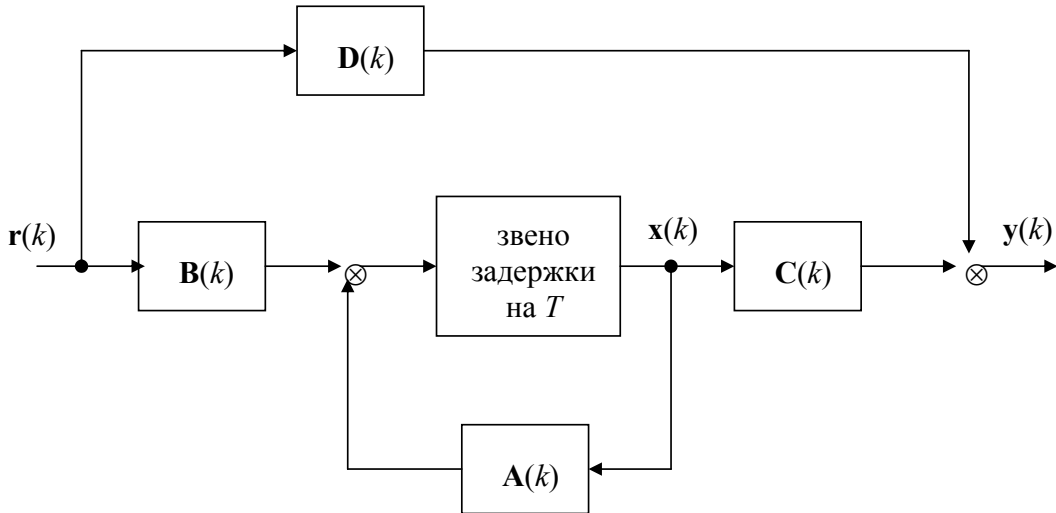


Рисунок 4.1

4.1.2 Уравнения динамики систем с квантователем и фиксатором

Пусть на каждом из входов непрерывной линейной системы имеется устройство выборки и хранения, то есть присутствует идеальный квантователь и экстраполятор нулевого порядка – ЭНП (фиксатор). Такая система изображена на рисунке 4.2.

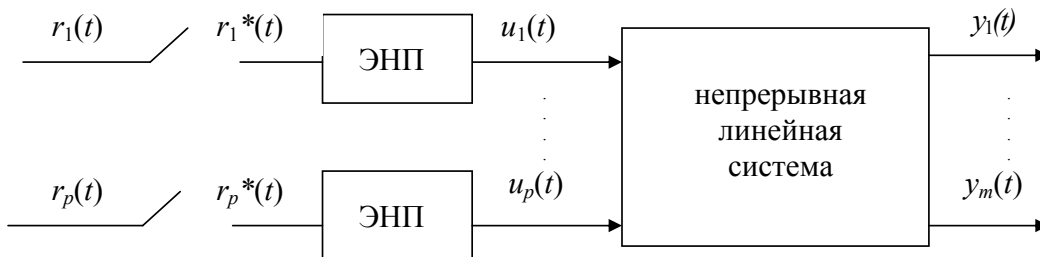


Рисунок 4.2

Так как $u_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, p$ являются выходными сигналами устройств выборки и хранения, они постоянны на каждом интервале квантования:

$$u_i(t) = u_i(kT) = r_i(kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T. \quad (4.9)$$

Пусть динамика непрерывной системы описывается уравнениями состояния:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{u}(t), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{u}(t). \quad (4.11)$$

Как известно [1], решение уравнения состояния (4.10) имеет вид:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0) \cdot \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (4.12)$$

где $\Phi(t, t_0)$ – переходная (фундаментальная) матрица, соответствующая матрице $\mathbf{A}(t)$.

Соотношение (4.12) справедливо для любых t и t_0 , поэтому положим в решении (4.12) $t_0 = kT$ и $t = (k+1)T$. С учетом равенства (4.9) входное воздействие $\mathbf{u}(\tau)$ можно вынести за знак интеграла, и окончательно из выражения (4.12) получим:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \Phi[(k+1)T, kT] \cdot \mathbf{x}(kT) + \theta[(k+1)T, kT] \cdot \mathbf{r}(kT), \quad (4.13)$$

где
$$\theta[(k+1)T, kT] = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi[(k+1)T, \tau] \cdot \mathbf{B}(\tau) d\tau. \quad (4.14)$$

Выражение (4.13) является, по сути, дискретным уравнением состояния цифровой системы, представленной на рисунке 4.2. Оно описывает динамику состояния системы только в дискретные моменты времени. Естественным будет переход к дискретному времени и в уравнении выхода (4.11), которое при замене $t = kT$ имеет вид:

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}(kT) \cdot \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}(kT) \cdot \mathbf{r}(kT). \quad (4.15)$$

Уравнения (4.13) и (4.15) в совокупности являются уравнениями динамики цифровой системы с квантованием и фиксацией.

Уравнения (4.13) и (4.15) можно записать в более простом виде для нормированного времени, положив $T = 1$:

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k+1, k) \cdot \mathbf{x}(k) + \theta(k+1, k) \cdot \mathbf{r}(k), \quad (4.16)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k) \cdot \mathbf{r}(k), \quad (4.17)$$

где
$$\theta(k+1, k) = \int_k^{k+1} \Phi(k+1, \tau) \cdot \mathbf{B}(\tau) d\tau. \quad (4.18)$$

Наконец, эти же уравнения динамики можно записать, если в соотношениях (4.11) и (4.12) положить $t_0 = t_k$, а $t = t_{k+1}$, где t_k и t_{k+1} – соседние моменты замыкания квантователя (в этом случае моменты замыкания квантователя не обязаны следовать через равные промежутки времени):

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k) \cdot \mathbf{x}(t_k) + \Theta(t_{k+1}, t_k) \cdot \mathbf{r}(t_k), \quad (4.19)$$

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{C}(t_k) \cdot \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{D}(t_k) \cdot \mathbf{r}(t_k), \quad (4.20)$$

где

$$\Theta(t_{k+1}, t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) \cdot \mathbf{B}(\tau) d\tau. \quad (4.21)$$

4.1.3 Прямое и обратное время в уравнениях состояния

Прежде чем приступить к решению уравнений состояния, подчеркнем еще раз общее и различие в уравнениях состояния систем только с цифровыми сигналами (4.5) и систем с непрерывной частью и квантователем и фиксатором (4.13). Прежде всего, обратим внимание, что решение непрерывного уравнения состояния (4.12) справедливо для любых t и t_0 , поскольку переходная матрица $\Phi(t, t_0)$ является невырожденной для конечной непрерывной по времени матрицы $\mathbf{A}(t)$. Следовательно, решение (4.12) справедливо как для $t > t_0$ (для «прямого» времени), так и для $t < t_0$ (для «обратного» времени). Поскольку уравнения состояния цифровой системы (4.13), (4.16) и (4.19) были получены из уравнения (4.12), то они также двунаправлены по дискретному времени.

Перейти к обратному времени, например, в уравнении (4.16) можно следующим образом. Решим уравнение (4.16) относительно $\mathbf{x}(k)$:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi^{-1}(k+1, k) \cdot \mathbf{x}(k+1) - \Phi^{-1}(k+1, k) \cdot \Theta(k+1, k) \cdot \mathbf{r}(k).$$

Воспользовавшись свойствами переходной матрицы, из последнего соотношения получим:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k+1) \cdot \mathbf{x}(k+1) + \Theta(k, k+1) \cdot \mathbf{r}(k),$$

где

$$\Theta(k, k+1) = \int_{k+1}^k \Phi(k, \tau) \cdot \mathbf{B}(\tau) d\tau. \quad (4.22)$$

Уравнение (4.22) описывает изменение состояния системы от «будущего» времени $k+1$ к «прошлому» времени k . Это же уравне-

ние можно получить, если в соотношении (4.12) подставить $t_0 = k + 1$ и $t = k$.

В отличие от уравнения (4.13), в уравнении (4.5) никаких физических ограничений на элементы матриц $\mathbf{A}(k)$ и $\mathbf{B}(k)$ не существует. Это означает, что матрица $\mathbf{A}(k)$ для некоторых значений k может быть вырожденной. Если матрица $\mathbf{A}(k)$ является невырожденной для $k \leq N$, то уравнение (4.5) можно записать как в прямом, так и в обратном времени для всех k , не превышающих N . В этом случае будет справедливо соотношение:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^{-1}(k) \cdot \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{A}^{-1}(k) \cdot \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{r}(k), \text{ для } k \leq N.$$

4.2 Решение уравнений состояния

Сравнение уравнений (4.3)–(4.8) и (4.13)–(4.20) позволяет сделать вывод о том, что все эти уравнения совпадают по форме, то есть, например, если в уравнениях (4.5), (4.6) заменить матрицу $\mathbf{A}(k)$ на матрицу $\Phi(k+1, k)$, а матрицу $\mathbf{B}(k)$ на матрицу $\Theta(k+1, k)$, то они совпадут с уравнениями (4.16) и (4.17) соответственно. Следовательно, за основу для дальнейшего исследования можно взять любое из уравнений (4.3), (4.5), (4.7), (4.13), (4.16) или (4.19).

В дальнейшем будем пользоваться уравнениями в форме (4.5) и (4.6) из-за более простых обозначений. Нужно только помнить, что искомое решение будет удовлетворять любой форме дискретных уравнений состояния при соответствующем переобозначении матриц и аргументов.

4.2.1 Переходная матрица состояния

Рассмотрим разностное однородное уравнение, соответствующее уравнению состояния (4.5):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k) \cdot \mathbf{x}(k). \quad (4.23)$$

Если заданы начальные условия $\mathbf{x}(k_0)$, то из уравнения (4.23) находим:

$$\mathbf{x}(k_0+1) = \mathbf{A}(k_0) \cdot \mathbf{x}(k_0).$$

Подобным образом:

$$\mathbf{x}(k_0+2) = \mathbf{A}(k_0+1) \cdot \mathbf{A}(k_0) \cdot \mathbf{x}(k_0).$$

Итерационная процедура дает:

$$\mathbf{x}(k) = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(n) \cdot \mathbf{x}(k_0), \quad k > k_0. \quad (4.24)$$

Переходная матрица $\Phi(k, k_0)$, по определению, удовлетворяет однородному уравнению (4.23), следовательно, на основании выражения (4.24) можно записать:

$$\Phi(k, k_0) = \begin{cases} \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}(n), & \text{при } k > k_0; \\ \mathbf{E}, & \text{при } k = k_0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Если матрица $\mathbf{A}(k)$ не зависит от времени, то есть $\mathbf{A}(k) = \mathbf{A}_0$ (случай стационарной цифровой системы), то переходная матрица состояния равна:

$$\Phi_0(k, k_0) = \Phi_0(k - k_0) = \mathbf{A}_0^{(k-k_0)} \quad (4.26)$$

и соответствует стационарному разностному уравнению состояния:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{x}(k). \quad (4.27)$$

Матрица (4.26), как и в непрерывном случае, зависит лишь от разности моментов времени действия причины и наблюдения следствия.

В случае малой нестационарности, то есть когда изменения матрицы $\mathbf{A}(k)$ незначительны, можно представить матрицу $\mathbf{A}(k)$ в виде суммы постоянной матрицы \mathbf{A}_0 и некоторой матрицы $\mathbf{A}_1(k)$. Тогда для вычисления переходной матрицы можно воспользоваться методом возмущений. Получим:

$$\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(k)] \cdot \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_1(k) \cdot \mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{r}(k). \quad (4.28)$$

Уравнение (4.28) можно рассматривать как уравнение с постоянной матрицей \mathbf{A}_0 и малой вынуждающей функцией $\mathbf{r}(k) = \mathbf{A}_1(k) \cdot \mathbf{x}(k)$.

Решение уравнения (4.28) можно найти с помощью такой же итерационной процедуры, как и для уравнения (4.23). В результате имеем:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_0^{(k-k_0)} \cdot \mathbf{x}(k_0) + \sum_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}_0^{(k-n-1)} \cdot \mathbf{r}(n).$$

Подстановка в последнее выражение:

$$\mathbf{r}(n) = \mathbf{A}_1(n) \cdot \mathbf{x}(n)$$

дает:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_0^{(k-k_0)} \cdot \mathbf{x}(k_0) + \sum_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}_0^{(k-n-1)} \cdot \mathbf{A}_1(n) \cdot \mathbf{x}(n). \quad (4.29)$$

Решаем уравнение (4.29) итерационным методом.

Первая итерация после подстановки вместо $\mathbf{x}(n)$ самого выражения (4.29) дает:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) = & \mathbf{A}_0^{(k-k_0)} \cdot \mathbf{x}(k_0) + \sum_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}_0^{(k-n-1)} \cdot \mathbf{A}_1(n) \cdot \left[\mathbf{A}_0^{(k-k_0)} \cdot \mathbf{x}(k_0) + \right. \\ & \left. + \sum_{m=k_0}^{n-1} \mathbf{A}_0^{(n-m-1)} \cdot \mathbf{A}_1(m) \cdot \mathbf{x}(m) \right]. \end{aligned}$$

Дальнейшие итерации дадут результат:

$$\mathbf{x}(k) = [\mathbf{E} + S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1) + S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1 \cdot S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1)) + S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1 \cdot S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1 \times S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1))) + \dots] \cdot \Phi_0 \cdot \mathbf{x}(k_0), \quad (4.30)$$

где S обозначает суммирование всех членов, стоящих справа.

Переходная матрица состояния, как видно из уравнения (4.30), будет равна:

$$\Phi(k, k_0) = [\mathbf{E} + S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1) + S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1 \cdot S(\Phi_0 \cdot \mathbf{A}_1)) + \dots] \cdot \Phi_0, \quad (4.31)$$

где Φ_0 определяется выражением (4.26).

Ряд (4.31) аналогичен ряду Неймана для непрерывных систем, только вместо операции интегрирования используются операции суммирования. В случае малости \mathbf{A}_1 по сравнению с \mathbf{A} этот ряд сходится быстро, и для нахождения $\Phi(k, k_0)$ требуется лишь несколько членов.

Свойства переходной матрицы $\Phi(k, k_0)$ непосредственно вытекают из аналогичных свойств непрерывной переходной матрицы.

Это следующие свойства.

1. Переходная матрица от одинаковых аргументов равна единичной:

$$\Phi(k_0, k_0) = \mathbf{E}. \quad (4.32)$$

$$2. \quad \Phi(k_2, k_1) \cdot \Phi(k_1, k_0) = \Phi(k_2, k_0), \quad (4.33)$$

если матрица $\mathbf{A}(k)$ невырождена для всех k , удовлетворяющих неравенству:

$$\min(k_0, k_1, k_2) < k < \max(k_0, k_1, k_2).$$

Если матрица $\mathbf{A}(k)$ является вырожденной для $k \geq N$, то равенство (4.33) справедливо только при $\max(k_0, k_1, k_2) < N$.

$$3. \quad \Phi(k_1, k_2) = \Phi^{-1}(k_2, k_1), \quad (4.34)$$

если матрица $\mathbf{A}(k)$ невырождена для:

$$k = k_2 - 1, k_2 - 2, \dots, k_1 \quad (k_2 > k_1),$$

$$k = k_1 - 1, k_1 - 2, \dots, k_2 \quad (k_1 > k_2).$$

4. Для стационарных систем из свойства (4.33) следует:

$$\Phi(k+n) = \Phi(k) \cdot \Phi(n). \quad (4.35)$$

5. Для стационарных систем из свойства (4.34) получаем:

$$\Phi(k) = \Phi^{-1}(-k). \quad (4.36)$$

Вычисление переходной матрицы нестационарной системы в общем случае – задача чрезвычайно трудоемкая. Уравнение (4.25) при больших n становится очень громоздким. Вычисление $\Phi(k, k_0)$ по формуле (4.31) эффективно только при достаточной малости матрицы $\mathbf{A}_1(k)$ по сравнению с матрицей \mathbf{A}_0 (квазистационарный случай) и также достаточно утомительно. Как правило, приходится пользоваться при получении решения вычислительными средствами.

Получение переходной матрицы в аналитическом виде возможно (за редким исключением) только для стационарных систем. Применяемые при этом методы аналогичны соответствующим методам при нахождении непрерывной переходной матрицы. Перечислим эти методы.

1. *Применение модальной матрицы.* Очень просто находить переходную матрицу, если уравнение состояния (4.27) задано в канонической (нормальной) форме, то есть матрица \mathbf{A}_0 является диагональной.

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Тогда переходная матрица $\Phi(k - k_0)$ будет равна:

$$\Phi(k - k_0) = \mathbf{A}^{(k - k_0)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{(k - k_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(k - k_0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{(k - k_0)} \end{bmatrix}.$$

Для произвольной матрицы \mathbf{A} с различными собственными значениями либо когда дефект характеристической матрицы $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ равен кратности корня λ_i , переход к диагональной матрице $\mathbf{\Lambda}$ осуществляется, как известно, преобразованием подобия с использованием модальной матрицы \mathbf{M} :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}.$$

Воспользовавшись последним соотношением, для переходной матрицы $\Phi(k - k_0)$ можно записать:

$$\Phi(k - k_0) = \mathbf{A}^{(k - k_0)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Lambda}^{(k - k_0)} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1^{(k - k_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(k - k_0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{(k - k_0)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}^{-1}.$$

Пример 4.1. Задана матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Требуется вычис-

лить переходную матрицу, соответствующую этой матрице. Для этого составим модальную матрицу, предварительно определив собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{A} . Составляем характеристическое уравнение:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 3) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения (собственные числа) равны $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$. Собственные векторы найдем как любой ненулевой столбец присоединенной матрицы

$Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ при $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$:

$$Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]_{\lambda = -1} = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}_{\lambda = -1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{Adj}[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]_{\lambda=-2} = \begin{bmatrix} \lambda+3 & 1 \\ -2 & \lambda \end{bmatrix}_{\lambda=-2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, модальная матрица будет иметь вид:
 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Обратная к модальной матрица будет $\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Теперь запишем переходную матрицу

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. *Метод Кэли-Гамильтона.* Применение этого метода аналогично соответствующей процедуре для вычисления непрерывной переходной матрицы. Как следствие теоремы Кэли-Гамильтона, произвольную степенную матричную функцию можно представить как полином $(n-1)$ -й степени, где n – размерность матрицы, участвующей в образовании указанного многочлена. Таким образом, для переходной матрицы $\Phi(k-k_0)$ получим:

$$\Phi(k-k_0) = \mathbf{A}^{(k-k_0)} = \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A}^{(n-1)}.$$

Неизвестные коэффициенты α_i определяются из системы уравнений:

$$\lambda_i^{(k-k_0)} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \alpha_2 \lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda_i^{(n-1)}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

если все λ_i различны.

В случае наличия кратного корня (например, корень λ_j имеет кратность m) соответствующие уравнения для определения α_i будут выглядеть так:

$$s! \lambda_j^{k-k_0-s} = \frac{d^s}{d\lambda^s} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i \bigg|_{\lambda=\lambda_j}, \quad s=0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Пример 4.2. Рассмотрим ту же задачу, что и в примере 4.1.

Найдем переходную матрицу для матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ методом

Кэли-Гамильтона. Поскольку матрица \mathbf{A} имеет размерность (2×2) , переходную матрицу можно представить как матричный полином первого порядка $\Phi(k) = \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A}$, где коэффициенты α_0, α_1 определяются из системы уравнений

$$\lambda_1^k = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1,$$

$$\lambda_2^k = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2.$$

Подставляя в эту систему уравнений численные данные, получим

$$(-1)^k = \alpha_0 - \alpha_1,$$

$$(-2)^k = \alpha_0 - 2\alpha_1.$$

Вычитая из первого уравнения второе, найдем α_1 , а вычитая из удвоенного первого уравнения второе, определим α_0 : $\alpha_0 = 2(-1)^k - (-2)^k$, $\alpha_1 = (-1)^k - (-2)^k$. Осталось подставить найденные коэффициенты в выражение для переходной матрицы:

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= \alpha_0 \mathbf{E} + \alpha_1 \mathbf{A} = \alpha_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = (2(-1)^k - (-2)^k) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ &+ ((-1)^k - (-2)^k) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & 0 \\ 0 & 2(-1)^k - (-2)^k \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -3(-1)^k + 3(-2)^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Естественно, результат совпал с результатом примера 4.1.

3. Применение z-преобразования. Возьмем z-преобразование от правой и левой частей уравнения (4.27), применив теорему о сдвиге во времени:

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(z).$$

Разрешив это уравнение относительно $\mathbf{X}(z)$, получим:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z\mathbf{x}(0),$$

или, переходя во временную область:

$$\mathbf{x}(k) = Z^{-1} \{ (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \} \cdot \mathbf{x}(0).$$

Таким образом, переходная матрица состояния равна:

$$\Phi(k) = Z^{-1} \{ (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \}. \quad (4.37)$$

Пример 4.3. Теперь найдем переходную матрицу для матрицы $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ методом z -преобразования. Для этого воспользуемся формулой (4.37): $\Phi(k) = Z^{-1} \{ (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \}$.

Вначале запишем матрицу $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})$:

$$[z\mathbf{E} - \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix}.$$

Далее найдем обратную матрицу:

$$[z\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{z(z+3)+2} \cdot \begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}.$$

Умножая последнее выражение на z и проводя небольшие преобразования, получаем:

$$[z\mathbf{E} - \mathbf{A}]^{-1} \cdot z = \frac{z}{(z+1)(z+2)} \cdot \begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z(z+3)}{(z+1)(z+2)} & \frac{z}{(z+1)(z+2)} \\ -\frac{2z}{(z+1)(z+2)} & \frac{z^2}{(z+1)(z+2)} \end{bmatrix}.$$

Осталось взять обратное z -преобразование от каждого элемента последней матрицы, предварительно представив эти элементы в виде суммы простых дробей. Имеем:

$$\begin{aligned} Z^{-1} \left\{ \frac{z(z+3)}{(z+1)(z+2)} \right\} &= Z^{-1} \left\{ z \cdot \left(\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z+2} \right) \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{2z}{z+1} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{1}{z+2} \right\} = \\ &= 2(-1)^k - (-1)^k, \\ Z^{-1} \left\{ \frac{z}{(z+1)(z+2)} \right\} &= Z^{-1} \left\{ z \cdot \left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} \right) \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z+1} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z+2} \right\} = \\ &= (-1)^k - (-2)^k, \\ Z^{-1} \left\{ -\frac{2z}{(z+1)(z+2)} \right\} &= (-2)(-1)^k + 2(-2)^k, \end{aligned}$$

$$Z^{-1} \left\{ \frac{z^2}{(z+1)(z+2)} \right\} = Z^{-1} \left\{ z \cdot \left(\frac{2}{z+2} - \frac{1}{z+1} \right) \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{2z}{z+2} \right\} - Z^{-1} \left\{ \frac{z}{z+1} \right\} =$$

$$= -(-1)^k + 2(-2)^k.$$

Как видим, элементы переходной матрицы и в этом случае совпадают с результатами примеров 4.1 и 4.2.

Наиболее трудоемкая операция в формуле (4.37) – обращение матрицы, что для систем высокого порядка достаточно сложно. Облегчить нахождение матрицы $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ можно с помощью следующего приема.

Положим $(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z = \mathbf{F}$. Тогда:

$$z\mathbf{F} = z\mathbf{E} + \mathbf{A}\mathbf{F}. \quad (4.38)$$

Полученное выражение умножим слева на $(z\mathbf{E} + \mathbf{A})$ и после упрощения имеем:

$$z^2\mathbf{F} = \mathbf{A}^2\mathbf{F} + z\mathbf{A} + z^2\mathbf{E}. \quad (4.39)$$

Повторив умножение на $(z\mathbf{E} + \mathbf{A})$, получим после упрощения:

$$z^3\mathbf{F} = \mathbf{A}^3\mathbf{F} + z\mathbf{A}^2 + z^2\mathbf{A} + z^3\mathbf{E}. \quad (4.40)$$

Продолжая процедуру, будем иметь ряд формул:

$$z^4\mathbf{F} = \mathbf{A}^4\mathbf{F} + z\mathbf{A}^3 + z^2\mathbf{A}^2 + z^3\mathbf{A} + z^4\mathbf{E}, \quad (4.41)$$

.....
.....

$$z^n\mathbf{F} = \mathbf{A}^n\mathbf{F} + z\mathbf{A}^{n-1} + \dots + z^{n-1}\mathbf{A} + z^n\mathbf{E}. \quad (4.42)$$

Добавив к формулам (4.38)–(4.42) тождество $\mathbf{F} = \mathbf{F}$ и умножив их соответственно на коэффициенты a_i характеристического уравнения матрицы \mathbf{A} , получим:

$$a_0\mathbf{F} = a_0\mathbf{F},$$

$$a_1z\mathbf{F} = a_1\mathbf{A}\mathbf{F} + a_1z\mathbf{E},$$

$$a_2z^2\mathbf{F} = a_2\mathbf{A}^2\mathbf{F} + a_2z\mathbf{A} + a_2z^2\mathbf{E},$$

.....

$$a_{n-1}z^{(n-1)}\mathbf{F} = a_{n-1}\mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{F} + a_{n-1}z\mathbf{A}^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}z^{(n-1)}\mathbf{E}, \quad (4.43)$$

$$z^n\mathbf{F} = \mathbf{A}^n\mathbf{F} + z\mathbf{A}^{(n-1)} + \dots + z^{(n-1)}\mathbf{A} + z^n\mathbf{E},$$

где a_i – коэффициенты уравнения

$$a_nz^n + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1z + a_0 = 0 \quad (a_n = 1).$$

Просуммировав левые и правые части соотношений (4.43), получим:

$$\sum_{i=0}^n a_i z^i \mathbf{F} = \sum_{i=0}^n a_i \mathbf{A}^i \mathbf{F} + \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{A}^{(i-1)} z + \sum_{i=2}^n a_i \mathbf{A}^{(i-2)} z^2 + \dots + \sum_{i=n-1}^n a_i \mathbf{A}^{(i-n+1)} z^{(n-1)} + z^n \mathbf{E}, \quad (4.44)$$

где $a_n = 1$.

Первый член в правой части выражения (4.44) есть нулевая матрица в соответствии с теоремой Кэли-Гамильтона. Решая уравнение (4.44) относительно \mathbf{F} , получим:

$$\mathbf{F} = \frac{\sum_{j=1}^n z^j \cdot \sum_{i=j}^n a_i \mathbf{A}^{(i-j)} \quad \sum_{j=1}^n z^j \cdot \sum_{i=j}^n a_i \mathbf{A}^{(i-j)}}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} = \frac{\sum_{j=1}^n z^j \cdot \sum_{i=j}^n a_i \mathbf{A}^{(i-j)}}{|z\mathbf{E} - \mathbf{A}|}. \quad (4.45)$$

Числитель формулы (4.45) – это присоединенная матрица $\text{Adj}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})z$. Вычислив \mathbf{F} по формуле (4.45), определяем переходную матрицу:

$$\Phi(k) = \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{F}).$$

4.2.2 Сопряженная система

Как и для непрерывной системы, для цифровой линейной системы существует понятие сопряженной системы. Уравнение сопряженной системы можно получить, воспользовавшись понятием сопряженного оператора. Сопряженный оператор L^* выражается через оператор системы L с помощью соотношения:

$$\langle \mathbf{a}, L\mathbf{x} \rangle = \langle L^* \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle, \quad (4.46)$$

где \mathbf{a} – сопряженный вектор, а скалярное произведение $\langle \rangle$ обозначает:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=k_0}^{k-1} \mathbf{a}^T(i+1) \cdot \mathbf{b}(i). \quad (4.47)$$

Подставляя в $\langle \mathbf{a}, L\mathbf{x} \rangle$ оператор системы (4.23), получим:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, Lx \rangle &= \sum_{i=k_0}^{k-1} \alpha^T(i+1) [x(i+1) - A(i) \cdot x(i)] = \alpha^T(k) \cdot x(k) + \sum_{i=k_0-1}^{k-2} \alpha^T(i+1) \cdot x(i+1) - \\
&- \alpha^T(k_0) \cdot x(k_0) - \sum_{i=k_0}^{k-1} \alpha^T(i+1) \cdot A(i) \cdot x(i) = \sum_{i=k_0}^{k-1} [\alpha^T(i) - \alpha^T(i+1) \cdot A(i)] \cdot x(i) + \\
&+ \alpha^T(k) \cdot x(k) - \alpha^T(k_0) \cdot x(k_0).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Теперь воспользуемся свойством сопряженного вектора оставлять постоянным скалярное произведение^{*}:

$$\langle \alpha^T(k), x(k) \rangle = \text{const}, \tag{4.49}$$

для всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

Согласно выражению (4.49):

$$\alpha^T(k) \cdot x(k) = \alpha^T(k_0) \cdot x(k_0),$$

и из уравнения (4.48) следует, что:

$$L^*(\alpha) = \alpha^T(i) - \alpha^T(i+1) \cdot A(i),$$

то есть сопряженное уравнение имеет вид:

$$\alpha^T(i) = \alpha^T(i+1) \cdot A(i).$$

Последнее уравнение транспонируем и, предполагая невырожденность матрицы $A(i)$, перепишем в привычной форме:

$$\alpha(i+1) = [A^{-1}(i)]^T \cdot \alpha(i). \tag{4.50}$$

Уравнение (4.50) и является уравнением сопряженной системы.

Найдем теперь переходную матрицу для уравнения сопряженной системы.

По определению переходная матрица исходной системы $\Phi(k, k_0)$ должна удовлетворять уравнению (4.23):

$$\Phi(k+1, k_0) = A(k) \cdot \Phi(k, k_0).$$

Взяв обратную матрицу и транспонировав последнее выражение, получим:

$$[\Phi^{-1}(k+1, k_0)]^T = [A^{-1}(k)]^T \cdot [\Phi^{-1}(k, k_0)]^T. \tag{4.51}$$

Сравнение уравнений (4.51) и (4.50) показывает, что матрица $[\Phi^{-1}(k, k_0)]^T$ удовлетворяет уравнению (4.50) и, следовательно, является переходной матрицей сопряженной системы. Эту матрицу

^{*} Равенство (4.49) можно интерпретировать и как свойство сопряженного вектора, и как его определение.

можно найти путем итерационного решения уравнения (4.50). В результате имеем:

$$\left[\Phi^{-1}(k, k_0)\right]^T = \prod_{n=k_0}^{k-1} \left[\mathbf{A}^{-1}(n)\right]^T, \quad k > k_0. \quad (4.52)$$

Переходную матрицу состояния исходной системы $\Phi(k, k_0)$ при $k_0 > k$ можно найти «обратными итерациями» уравнения (4.23), переписав его в форме:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^{-1}(n) \cdot \mathbf{x}(n+1)$$

и решив итерационной процедурой от $n = k$ до $n = k_0$. В результате имеем:

$$\mathbf{x}(k_0) = \left[\prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}^{-1}(n) \right] \cdot \mathbf{x}(k),$$

следовательно:

$$\Phi(k_0, k) = \prod_{n=k_0}^{k-1} \mathbf{A}^{-1}(n). \quad (4.53)$$

Сравнение уравнений (4.53) и (4.52) лишний раз доказывает свойство (4.34):

$$\Phi^{-1}(k, k_0) = \Phi(k_0, k), \quad k > k_0.$$

Попутно отметим, что вид переходной матрицы для прямого времени (4.25) отличается от вида переходной матрицы для обратного времени (4.53). Это обусловлено тем, что изменение направления течения времени влечет за собой обращение матрицы $\mathbf{A}(k)$ (см. раздел 4.1.3).

4.2.3 Общее решение

Вернемся к уравнениям (4.5) и (4.6). Решение этой системы уравнений нетрудно получить последовательными итерациями аналогично тому, как была найдена переходная матрица. Но для иллюстрации применения сопряженной системы воспользуемся результатами предыдущего раздела.

Транспонируем и затем умножим справа на $\mathbf{A}(k)$ выражение (4.51):

$$\Phi^{-1}(k, k_0) = \Phi^{-1}(k+1, k_0) \cdot \mathbf{A}(k). \quad (4.54)$$

Умножим выражение (4.5) слева на $\Phi^{-1}(k+1, k_0)$, а уравнение (4.54) – справа на $\mathbf{x}(k)$, а затем вычтем из первого второе:

$$\Phi^{-1}(k+1, k_0) \cdot \mathbf{x}(k+1) - \Phi^{-1}(k, k_0) \cdot \mathbf{x}(k) = \Phi^{-1}(k+1, k_0) \cdot \mathbf{B}(k) \cdot \mathbf{r}(k).$$

Заменим в последнем соотношении k на m и просуммируем по m от k_0 до $k-1$ обе части этого соотношения. В левой части все члены, кроме первого и последнего, попарно сократятся, и в результате получим:

$$\Phi^{-1}(k, k_0) \cdot \mathbf{x}(k) - \Phi^{-1}(k_0, k_0) \cdot \mathbf{x}(k_0) = \sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi^{-1}(m+1, k_0) \cdot \mathbf{B}(m) \cdot \mathbf{r}(m). \quad (4.55)$$

Умножим уравнение (4.55) слева на $\Phi(k, k_0)$ и учтем, что $\Phi^{-1}(k_0, k_0) = \mathbf{E}$ – единичная матрица (также не забудем свойства (4.33) и (4.34)):

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k, k_0) \cdot \mathbf{x}(k_0) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi(k, m+1) \cdot \mathbf{B}(m) \cdot \mathbf{r}(m). \quad (4.56)$$

Соотношение (4.56) есть решение неоднородного нестационарного уравнения состояния (4.5). Первое слагаемое в этом решении характеризует реакцию системы, обусловленную начальными условиями, а все остальное представляет совмещение реакций, вызванных входными воздействиями.

В случае стационарной системы матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} в уравнениях (4.5) и (4.6) не зависят от времени и решение для $\mathbf{x}(k)$ будет представлять из себя сумму реакций от начальных условий и сумму свертывания (аналог интеграла свертки для непрерывных систем):

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k - k_0) \cdot \mathbf{x}(k_0) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \Phi(k - m - 1) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}(m). \quad (4.57)$$

Решение для выхода системы $\mathbf{y}(k)$ получается подстановкой уравнения (4.56) или (4.57) в случае стационарной системы в уравнение выхода (4.6):

- для нестационарных систем:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k) \cdot \Phi(k, k_0) \cdot \mathbf{x}(k_0) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \mathbf{C}(k) \cdot \Phi(k, m+1) \cdot \mathbf{B}(m) \cdot \mathbf{r}(m) + \mathbf{D}(k) \cdot \mathbf{r}(k), \quad (4.58)$$

- для стационарных систем:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \Phi(k - k_0) \cdot \mathbf{x}(k_0) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \mathbf{C} \cdot \Phi(k - m - 1) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}(m) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{r}(k). \quad (4.59)$$

Подчеркнем, что для систем с постоянными параметрами часто удобнее пользоваться для решения уравнений (4.5) и (4.6) методом z -преобразования. Применим z -преобразование к правым и левым частям уравнений (4.5) и (4.6) и разрешим их относительно $\mathbf{X}(z)$ и $\mathbf{Y}(z)$:

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \cdot \mathbf{x}(0) + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}\mathbf{R}(z), \quad (4.60)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \cdot \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C} \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}] \cdot \mathbf{R}(z). \quad (4.61)$$

Вычислив обратное z -преобразование от выражений (4.60) и (4.61), определим $\mathbf{x}(k)$ и $\mathbf{y}(k)$.

Пример 4.4. Пусть цифровая система описывается уравнениями:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(k),$$

$$y(k) = [1 \quad 1] \cdot \mathbf{x}(k).$$

Входное воздействие – единичная ступенька

$$r(k) = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0. \end{cases}$$

Начальные значения нулевые: $y(0)=0$, $y'(1)=0$. Требуется найти выходной сигнал в моменты времени $k=2,3$.

Для записи решения пользуемся формулой (4.59). При этом для переходной матрицы воспользуемся результатами примера 4.1. Остальные матрицы в формуле (4.59) имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0], \mathbf{D} = [0].$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} y(k) = & [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 2(-1)^k - (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ -2(-1)^k + 2(-2)^k & -(-1)^k + 2(-2)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \\ & + \sum_{m=0}^{k-1} [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 2(-1)^{k-m-1} - (-2)^{k-m-1} & (-1)^{k-m-1} - (-2)^{k-m-1} \\ -2(-1)^{k-m-1} + 2(-2)^{k-m-1} & -(-1)^{k-m-1} + 2(-2)^{k-m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя в последнюю формулу $k=0$, получаем:

$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = x_1(0).$$

Полагая $k=1$, имеем:

$$y(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2(0) \\ -2x_1(0) - 3x_2(0) \end{bmatrix} + 1 = x_2(0) + 1.$$

Учитывая начальные условия для выхода $y(k)$, получим начальные условия для вектора состояния $\mathbf{x}(k)$: $x_1(0) = 0, x_2(0) = -1$. Для того чтобы получить значения выхода в произвольный момент времени, необходимо подставить конкретное значение k и найденное значение $\mathbf{x}(0)$ в выражение для выходного сигнала. Для $k=2, 3$ получим

$$y(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 + 1 = 4,$$

$$y(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -14 & -15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -7 - 3 + 1 = -9.$$

4.3 Передаточные функции и уравнения состояния

4.3.1 Матричная импульсная передаточная функция

Для линейных стационарных многомерных систем интересно проследить взаимосвязь z -преобразования и метода пространства состояния.

Пусть многомерная система описывается с помощью импульсной передаточной функции:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{W}(z) \cdot \mathbf{R}(z), \quad (4.62)$$

где $\mathbf{Y}(z) = \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \dots \\ Y_m(z) \end{bmatrix}$ представляет z -преобразование m -мерного век-

тор-столбца выходных сигналов $y(k)$,

$$\mathbf{R}(z) = \begin{bmatrix} R_1(z) \\ R_2(z) \\ \dots \\ R_p(z) \end{bmatrix} \quad \text{есть } z\text{-преобразование } p\text{-мерного вектор-}$$

столбца входных сигналов $\mathbf{r}(k)$, а:

$$\mathbf{W}(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) & \dots & W_{1p}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) & \dots & W_{2p}(z) \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ W_{m1}(z) & W_{m2}(z) & \dots & W_{mp}(z) \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

есть матрица, элементами которой являются $W_{ij}(z)$ – импульсные передаточные функции от j -го входа к i -му выходу. Эта матрица (4.63) называется матричной импульсной передаточной функцией.

Применение z -преобразования к уравнению состояния выхода стационарной системы дает уравнения (4.60) и (4.61):

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \cdot \mathbf{x}(0) + (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{R}(z),$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C} \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot z \cdot \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C} \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}] \cdot \mathbf{R}(z).$$

Сравнивая последнее из приведенных уравнений с уравнением (4.62) и учитывая, что импульсная передаточная функция определена для нулевых начальных условий $\mathbf{x}(0) = 0$, получим матричную импульсную передаточную функцию в виде

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{C} \cdot (z\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (4.64)$$

Переход от частотной области во временную в уравнении (4.64) с учетом соотношения (4.37) дает:

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{C} \cdot \Phi(k-1) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \delta(0), \quad (4.65)$$

где $\mathbf{w}(k)$ – матричная импульсная переходная (весовая) функция, а

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

С учетом равенства нулю матричной весовой функции при отрицательном аргументе из (4.65) получаем:

$$\mathbf{w}(k) = \begin{cases} \mathbf{C} \cdot \Phi(k-1) \cdot \mathbf{B}, & \text{при } k \geq 1, \\ \mathbf{D}, & \text{при } k = 0, \\ [0], & \text{при } k < 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

В более общем случае, если начальный момент времени не нулевой, а равен k_0 , соотношение (4.66) будет иметь вид:

$$\mathbf{w}(k - k_0) = \begin{cases} \mathbf{C} \cdot \Phi(k - k_0 - 1) \cdot \mathbf{B}, & \text{при } k \geq k_0 + 1, \\ \mathbf{D}, & \text{при } k = k_0, \\ [0], & \text{при } k < k_0. \end{cases} \quad (4.67)$$

Можно показать, что в случае нестационарной системы, описываемой уравнениями (4.5) и (4.6), матричная весовая функция будет равна:

$$\mathbf{w}(k, k_0) = \begin{cases} \mathbf{C} \cdot \Phi(k, k_0 + 1) \cdot \mathbf{B}, & \text{при } k \geq k_0 + 1, \\ \mathbf{D}, & \text{при } k = k_0, \\ [0], & \text{при } k < k_0. \end{cases}$$

4.3.2 Диаграмма состояний

Традиционный метод графов, который использовался в разделе 3.4 для структурного анализа цифровых систем, может быть применен только для описания соотношений входных и выходных сигналов в области изображений, то есть для алгебраических уравнений. Распространим этот метод на разностные уравнения состояний.

Переходный граф состояния системы (в дальнейшем для краткости – диаграмма состояния) для непрерывных систем по структуре совпадает со схемой моделирования системы на аналоговой вычислительной машине. Аналогичная диаграмма состояния для цифровой системы будет отражать линейные операции, производимые цифровой вычислительной машиной. К таким операциям относятся: умножение на константу, суммирование, временная задержка или запоминание.

Запишем уравнения, связывающие переменные во всех этих операциях. Структурные схемы и диаграммы состояния, соответствующие этим операциям, приведены на рисунке 4.3.

1. Умножение на константу (рис. 4.3, а):

$$\begin{aligned} x_2(k) &= ax_1(k), \\ X_2(z) &= aX_1(z). \end{aligned}$$

2. Суммирование (рис. 4.3, б):

$$x_3(k) = x_1(k) + x_2(k),$$

$$X_3(z) = X_1(z) + X_2(z).$$

3. Временная задержка или запоминание (рис. 4.3, в):

$$x_2(k) = x_1(k+1),$$

$$X_2(z) = zX_1(z) - zx_1(0)$$

или, решая последнее уравнение относительно $X_1(z)$:

$$X_1(z) = z^{-1}X_2(z) + x_1(0).$$

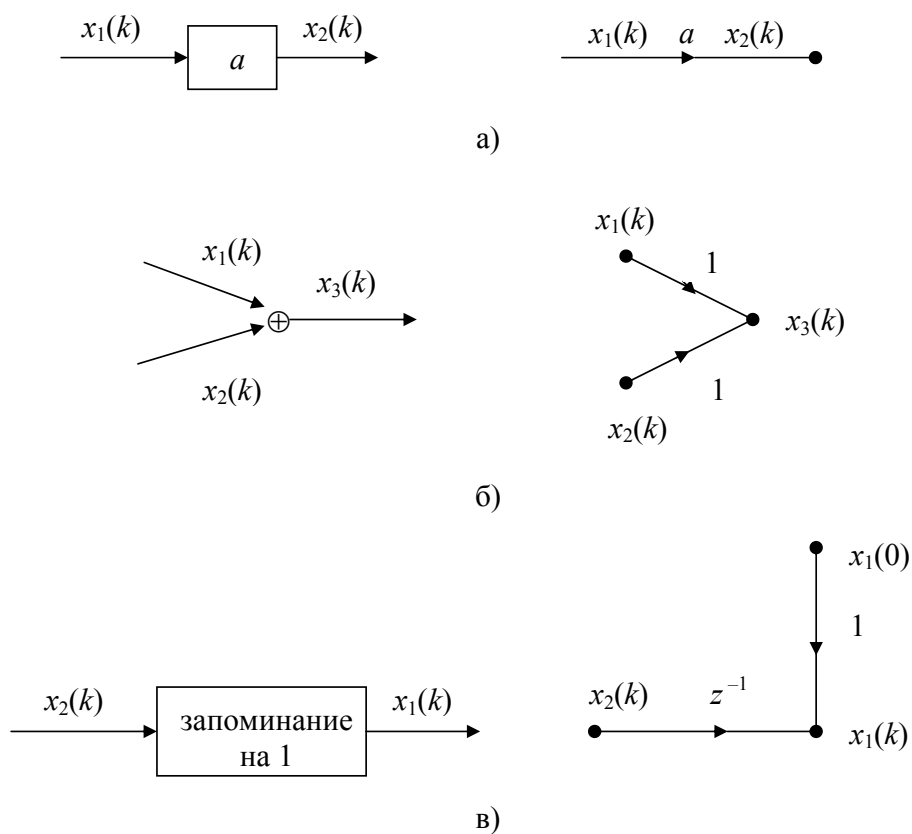


Рисунок 4.3

По диаграмме состояния цифровой системы (как и в непрерывном случае) можно получить:

- а) переменные состояния;
- б) уравнения состояния и выхода;
- в) решение уравнения состояния;

г) импульсную передаточную функцию.

Пример 4.5. Пусть цифровая система описывается разностным уравнением:

$$y(k+2) + 5y(k+1) + 6y(k) = r(k). \quad (4.68)$$

Решаем уравнение (4.68) относительно $y(k+2)$:

$$y(k+2) = r(k) - 5y(k+1) - 6y(k). \quad (4.69)$$

Дважды применяя временную задержку к последнему выражению, находим $y(k)$. Используя элементы диаграмм состояния, представленные на рисунке 4.3, получаем диаграмму состояния, соответствующую уравнению (4.68). Она представлена на рисунке 4.4.

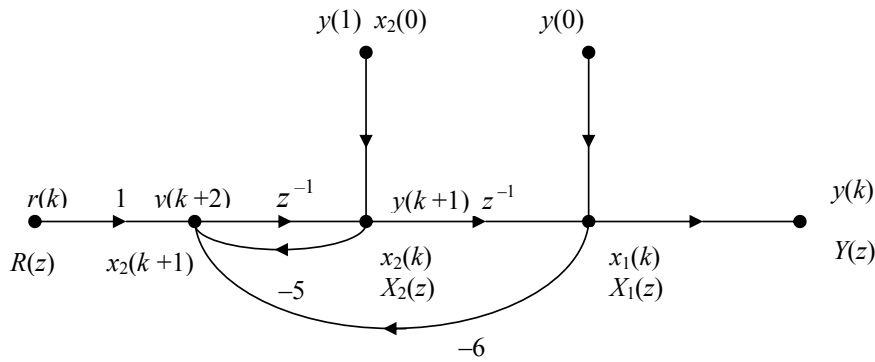


Рисунок 4.4

Переменные состояния определяются как выходные сигналы каждого блока задержки.

Уравнения состояния и выхода получают из диаграммы состояния, не учитывая ребер с весом z^{-1} и начальных условий:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(k), \quad (4.70)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Решение уравнения состояния (4.70) получаем из диаграммы состояния на основе формулы Мейсона, при этом выходными величинами берем $X_1(z)$ и $X_2(z)$, а входными – $R(z)$, $x_1(0)$, $x_2(0)$:

$$\begin{bmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1+5z^{-1} & z^{-1} \\ -6z^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} z^{-2} \\ z^{-1} \end{bmatrix} \cdot R(z), \quad (4.72)$$

где $\Delta = 1 + 6z^{-2} + 5z^{-1}$.

Из выражения (4.72) видно, что переходная матрица состояния получается из диаграммы состояния без утомительной операции обращения матрицы, как это требуется делать при использовании формулы (4.37).

Применение обратного z -преобразования к выражению (4.72) дает решение уравнения состояния во временной области.

Импульсная передаточная функция системы может быть получена применением формулы Мейсона к выходу системы с учетом нулевых начальных условий:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z^{-2}}{\Delta} = \frac{z^{-2}}{1+6z^{-2}+5z^{-1}} = \frac{1}{z^2+5z+6}.$$

Впрочем, последнее выражение можно получить и непосредственно по уравнению (4.68).

4.3.3 Переход к уравнениям состояния от передаточной функции

Если цифровая система или отдельные ее элементы описаны своей импульсной передаточной функцией, то переход к уравнениям состояния имеет своей целью либо дальнейшее исследование методом пространства состояний, либо реализацию на ЦВМ, либо моделирование системы с применением цифровой вычислительной техники.

Переход от импульсной передаточной функции к уравнениям состояния может быть в общем случае осуществлен одним из трех методов декомпозиции: непосредственным, параллельным или последовательным.

При *непосредственной декомпозиции* удобнее передаточную функцию представить в виде отношения полиномов по степеням z^{-1} :

$$W(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{Y(z)}{R(z)}, \quad (4.73)$$

где n и m – положительные целые числа, а условие физической реализуемости – неравенство нулю коэффициента a_0 .

Умножим числитель и знаменатель формулы (4.73) на вновь введенную переменную $X(z)$:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m})X(z)}{(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})X(z)}.$$

Приравняв отдельно числители и знаменатели правой и левой частей последнего соотношения, получим два уравнения:

$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \dots + b_m z^{-m} X(z), \quad (4.74)$$

$$R(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + \dots + a_n z^{-n} X(z). \quad (4.75)$$

Решив уравнение (4.75) (с учетом причинно-следственных связей между $R(z)$ и $X(z)$) относительно $X(z)$, получим:

$$X(z) = \frac{1}{a_0} R(z) - \frac{a_1}{a_0} z^{-1} X(z) - \dots - \frac{a_n}{a_0} z^{-n} X(z). \quad (4.76)$$

По уравнениям (4.74) и (4.76) строим диаграмму состояния, из которой обычным путем получаем уравнения состояния и выхода.

Пример такой диаграммы состояния для $m = n = 3$ приведен на рисунке 4.5.

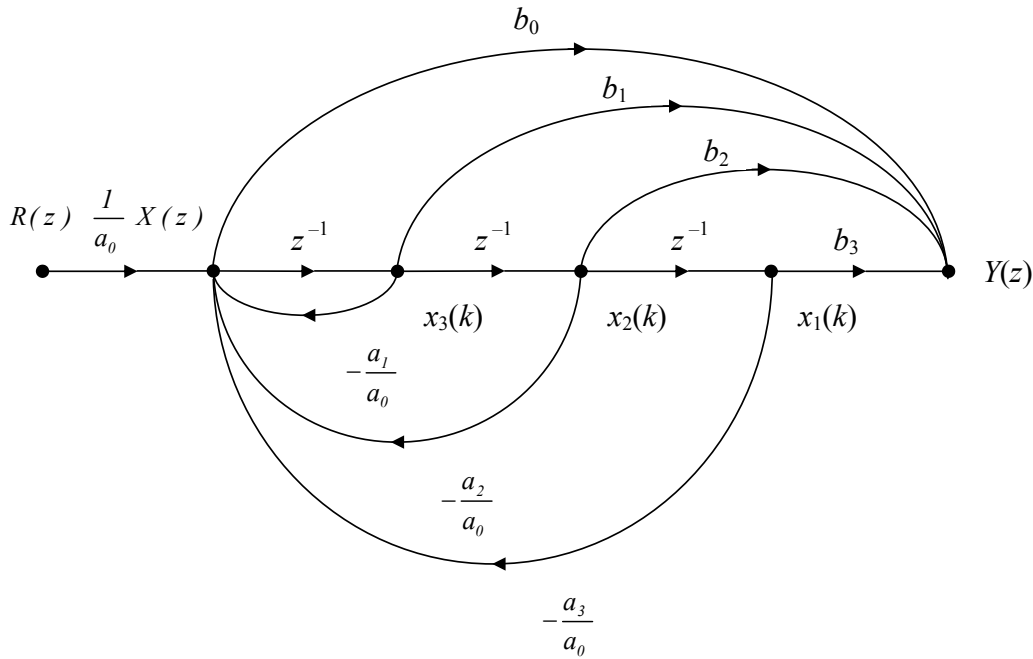


Рисунок 4.5

Уравнения состояния, полученные по диаграмме, изображенной на рисунке 4.5, будут иметь вид:

$$x_1(k+1) = x_2(k),$$

$$x_2(k+1) = x_3(k),$$

$$x_3(k+1) = -\frac{a_3}{a_0}x_1(k) - \frac{a_2}{a_0}x_2(k) - \frac{a_1}{a_0}x_3(k) + \frac{1}{a_0}r(k).$$

Из этих уравнений состояния видно, что матрица \mathbf{A} имеет форму матрицы Фробениуса:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}.$$

Обобщая полученный результат, приходим к выводу, что непосредственная декомпозиция всегда приводит к уравнениям состояния системы в стандартной форме, или, как ее еще называют, к канонической форме фазовой переменной.

Пример 4.6. Передаточная функция системы равна

$$W(z) = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,6z - 0,05} = \frac{Y(z)}{R(z)},$$

где $Y(z)$ и $R(z)$ – z -изображения выходного и входного сигнала соответственно.

Преобразуем передаточную функцию к виду отношения полиномов по степеням z^{-1} , разделив числитель и знаменатель на z^2 :

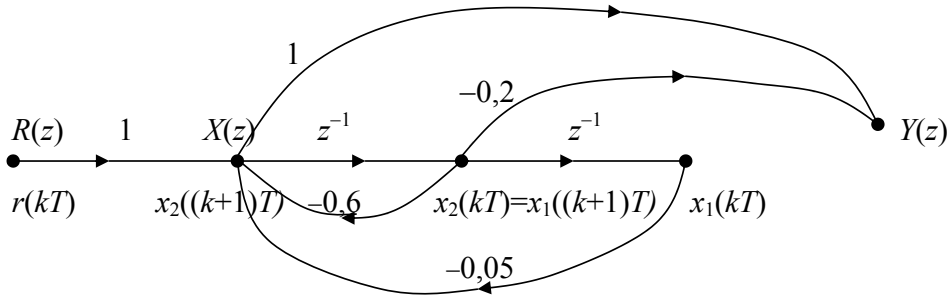
$$W(z) = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,6z - 0,05} = \frac{1 - 0,2z^{-1}}{1 - 0,6z^{-1} - 0,05z^{-2}}.$$

Умножив числитель и знаменатель передаточной функции на вспомогательную переменную $X(z)$, получим уравнения, аналогичные уравнениям (4.74), (4.75):

$$Y(z) = X(z) \cdot (1 - 0,2z^{-1}),$$

$$R(z) = X(z) \cdot (1 - 0,6z^{-1} - 0,05z^{-2}).$$

По последним уравнениям рисуем диаграмму состояния системы.



Переменные состояния вводим после каждого ребра с весом z^{-1} . По полученной диаграмме записываем уравнения состояния и уравнение выхода, не учитывая ребер с весом z^{-1} :

$$x_1((k+1)T) = x_2(kT),$$

$$x_2((k+1)T) = -0,05 \cdot x_1(kT) - 0,6 \cdot x_2(kT) + r(kT),$$

$$y(kT) = -0,05x_1(kT) - (0,2 + 0,6)x_2(kT) + r(kT).$$

Из уравнений состояния и уравнения выхода видно, что соответствующие матрицы равны:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,05 & -0,6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-0,05 \quad -0,8], \quad \mathbf{D} = [1].$$

Параллельная декомпозиция предполагает разложение импульсной передаточной функции на простые дроби. Особенно удобно это при действительных полюсах передаточной функции.

При различных характеристических числах (полюсах) z_k передаточной функции такое разложение имеет вид:

$$W(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z - z_k} = \sum_{k=1}^n \frac{z^{-1}}{A_k^{-1} - A_k^{-1} z_k z^{-1}}, \quad (4.77)$$

где A_k – как обычно, вычет функции $W(z)$ в полюсе z_k .

Диаграмма состояния системы, описываемой импульсной передаточной функцией (4.77), будет представлять собой параллельно соединенные цепочки, каждая из которых имеет вид, представленный на рисунке 4.6.

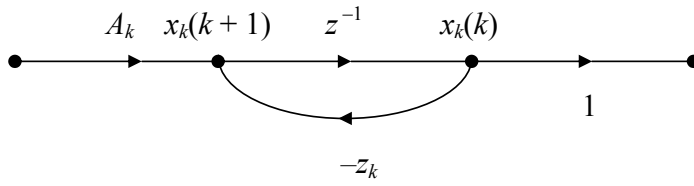


Рисунок 4.6

При наличии нулевого корня числителя разложение передаточной функции на простые дроби имеет несколько другой вид:

$$W(z) = \sum_k \frac{A_k \cdot z}{z - z_k} = \sum_k \frac{1}{A_k^{-1} - A_k^{-1} \cdot z_k \cdot z^{-1}}.$$

Диаграмма состояния для каждой из параллельных цепочек этого случая приведена на рис. 4.6*.

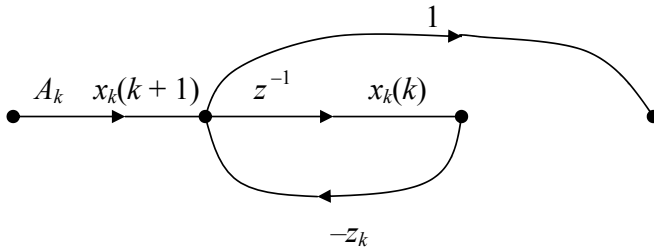


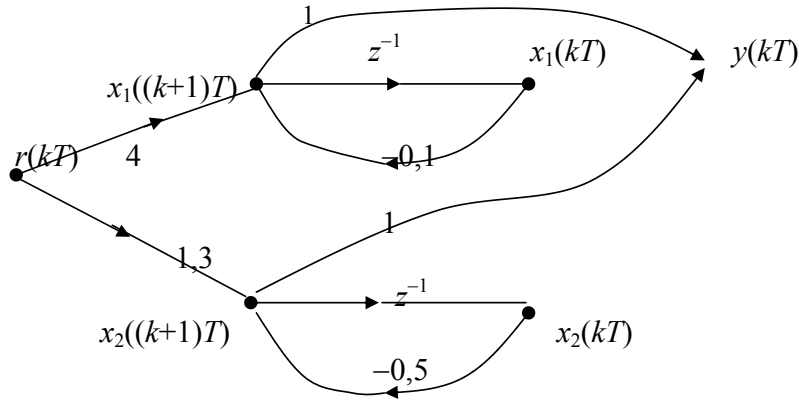
Рисунок 4.6*

При параллельной декомпозиции каждая компонента вектора состояния x_k зависит только от самой себя в предшествующий момент времени, и матрица \mathbf{A} будет иметь диагональный вид со своими характеристическими числами на главной диагонали. Таким образом, уравнения состояния будут представлены в нормальной (канонической) форме.

Пример 4.7. Рассмотрим ту же систему, что и в примере 4.6. Передаточную функцию представим в виде суммы простых дробей, используя обычные правила разложения на простые дроби:

$$W(z) = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,6z + 0,05} = \frac{z(z - 0,2)}{(z - 0,1) \cdot (z - 0,5)} = \frac{0,25z}{z - 0,1} + \frac{0,75z}{z - 0,5} = \frac{1}{4 - 0,4z^{-1}} + \frac{1}{1,3 - 0,6z^{-1}}.$$

Диаграмма состояния, соответствующая этой передаточной функции, имеет следующий вид.



Вводя переменные состояния после каждого ребра с весом z^{-1} , составим уравнения состояния и уравнение выхода:

$$x_1((k+1)T) = -0,1x_1(kT) + 4r(kT),$$

$$x_2((k+1)T) = -0,5x_2(kT) + 1,3r(kT),$$

$$y(kT) = -0,1x_1(kT) - 0,5x_2(kT) + 5,3r(kT).$$

Соответствующие матрицы в привычных обозначениях будут равны:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1,3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-0,1 \quad -0,5], \quad \mathbf{D} = [5,3].$$

Если передаточная функция имеет кратные полюса, например, полюс z_i кратности p , то в разложении $W(z)$ на простые дроби будут слагаемые:

$$\sum_{j=0}^{p-1} \frac{A_{p-j}}{(z - z_i)^{p-j}},$$

которые представлены на диаграмме состояний (рис. 4.7).

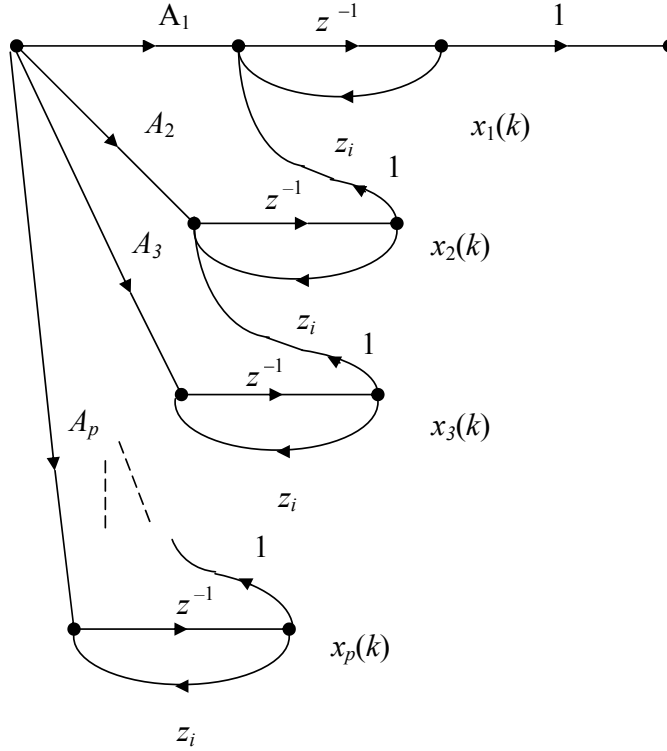


Рисунок 4.7

В этом, более общем случае матрица \mathbf{A} будет представлять собой матрицу Жордана, а уравнения состояния будут иметь жорданову каноническую форму.

Последовательную декомпозицию лучше всего использовать для действительных полюсов и нулей импульсной передаточной функции. В этом случае представим $W(z)$ в виде:

$$W(z) = \frac{k(z - c_1)(z - c_2) \dots (z - c_m)}{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)}, \quad (4.78)$$

где c_i ($i = 1, 2, \dots, m$) – нули $W(z)$, z_j ($j = 1, 2, \dots, n$) – полюсы $W(z)$, а условия физической реализуемости требуют, чтобы $m \leq n$.

Выражение (4.78) представим в виде:

$$W(z) = k \cdot W_1(z) \cdot W_2(z) \cdot \dots \cdot W_n(z),$$

где

$$W_k(z) = \frac{z - c_k}{z - z_k} = \frac{1 - c_k z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}}, \quad \text{при } k \leq m. \quad (4.79)$$

$$W_k(z) = \frac{1}{z - z_k} = \frac{z^{-1}}{1 - z_k z^{-1}}, \quad \text{при } m+1 \leq k \leq n. \quad (4.80)$$

Диаграммы состояний для выражений (4.79) и (4.80) приведены на рисунке 4.8, а и 4.8, б соответственно.

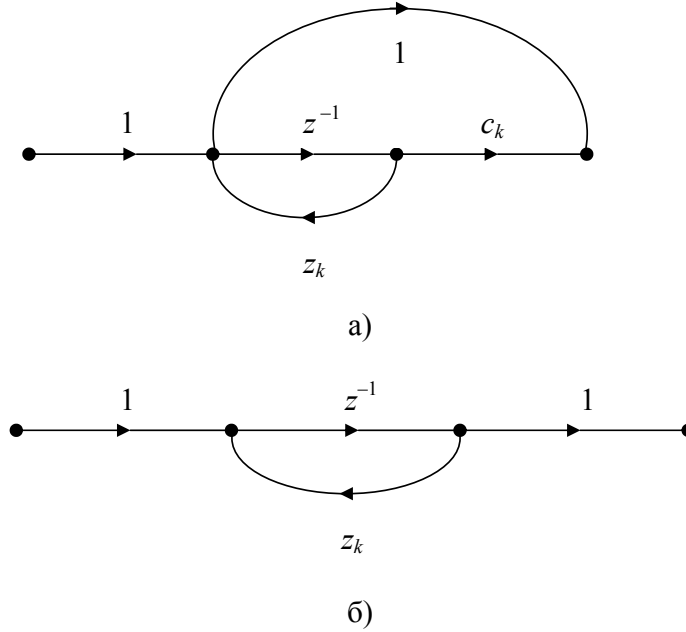


Рисунок 4.8

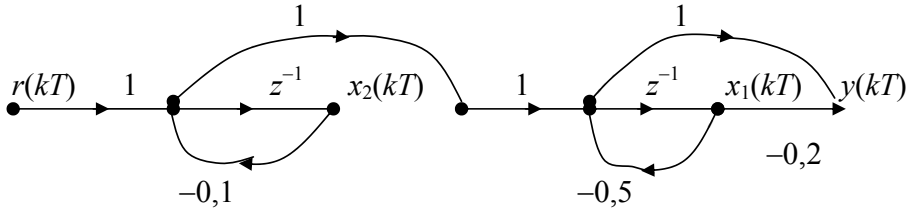
Диаграмма состояния всей системы, описываемой передаточной функцией (4.78), будет являться последовательным соединением диаграмм, представленных на рисунке 4.8.

Пример 4.8. Опять возьмем систему из примера 4.6. Передаточную функцию системы представим в форме (4.78):

$$W(z) = \frac{z^2 - 0,2z}{z^2 - 0,6z + 0,05} = \frac{z(z - 0,2)}{(z - 0,1) \cdot (z - 0,5)} = W_1(z) \cdot W_2(z),$$

где $W_1(z) = \frac{z}{z - 0,1} = \frac{1}{1 - 0,1z^{-1}}, \quad W_2(z) = \frac{z - 0,2}{z - 0,5} = \frac{1 - 0,2z^{-1}}{1 - 0,5z^{-1}}.$

Составляем диаграмму состояния в виде последовательно соединенных цепочек.



По диаграмме состояния записываем уравнения состояния и уравнение выхода:

$$x_1((k+1)T) = -0,5x_1(kT) - 0,1x_2(kT) + r(kT),$$

$$x_2((k+1)T) = -0,1x_2(kT) + r(kT),$$

$$y(kT) = -(0,5 + 0,2)x_1(kT) - 0,1x_2(kT) + r(kT).$$

Окончательно матрицы в уравнениях системы будут иметь вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,5 & -0,1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-0,7 \quad -0,1], \quad \mathbf{D} = [1].$$

4.3.4 Диаграмма состояний цифровых систем с непрерывной частью

В общем случае цифровые системы могут содержать как цифровые, так и аналоговые элементы. Интерфейсом между ними является устройство выборки и хранения.

Прежде чем получать диаграмму состояния всей системы, представим диаграмму состояния экстраполятора нулевого порядка. Обозначая входной и выходной сигналы экстраполятора через $u^*(t)$ и $h(t)$ соответственно, для интервала времени $kT \leq t < (k+1)T$ имеем:

$$h(t) = u(kT).$$

Применяя преобразование Лапласа к последнему выражению, получаем:

$$H(s) = \frac{u(kT)}{s}. \quad (4.81)$$

Диаграмма состояния для уравнения (4.81) состоит из единственного ребра с весом s^{-1} , соединяющего вершины $H(s)$ и $u(kT)$ (см. рис. 4.9).

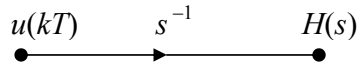


Рисунок 4.9

Далее получаем диаграмму состояния всей системы, которая будет являться соединением диаграммы состояния цифровой части с диаграммой состояния непрерывной части. Это соединение осуществляется через диаграмму состояния экстраполятора нулевого порядка. Момент времени t_0 для задания начальных условий в диаграмме состояния непрерывной части полагаем равным kT , как и при выводе уравнения (4.13) на основе выражения (4.12).

Пример 4.9. В качестве примера рассмотрим получение диаграммы состояния и уравнений состояния для системы, представленной на рисунке 4.10.

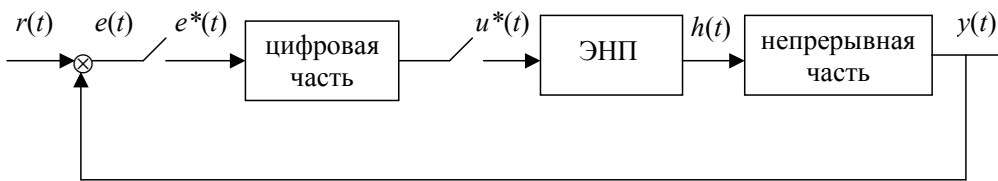


Рисунок 4.10

Цифровая часть описывается импульсной передаточной функцией:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{z^2 + 5z + 6}, \quad (4.82)$$

а непрерывная часть – передаточной функцией:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{5}{s + 2}. \quad (4.83)$$

Диаграмма состояния для выражения (4.82) уже составлялась (см. рис. 4.4), а диаграмма состояния непрерывной части приведена на рисунке 4.11.

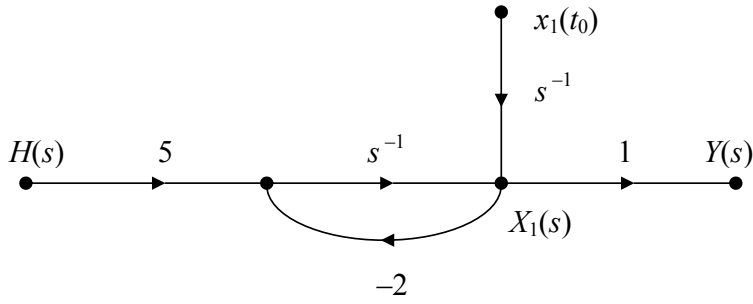


Рисунок 4.11

Соединяя диаграммы состояния, представленные на рисунке 4.4, 4.9 и 4.11, получим диаграмму состояния всей системы (см. рис. 4.12).

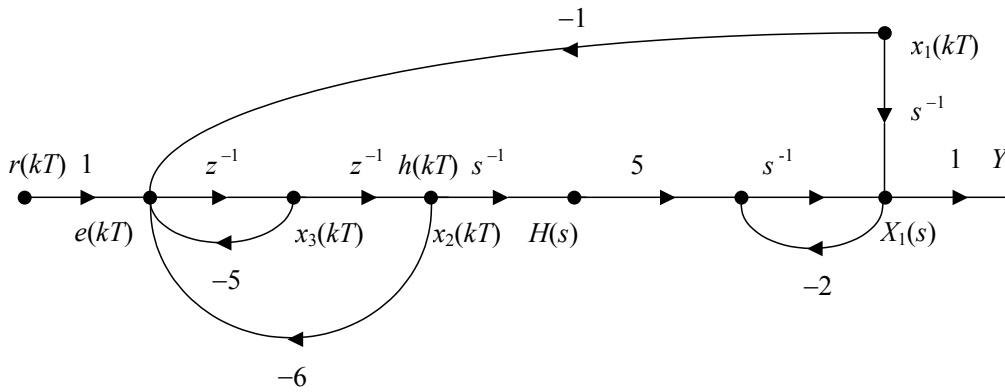


Рисунок 4.12

На полученной диаграмме состояний учтено, что $t_0 = kT$ и $x_1(kT) = y(kT)$.

Применяя формулу Мейсона для выходных вершин $X_1(s)$, $x_2(kT)$, $x_3(kT)$, получим:

$$X_1(s) = \frac{1}{s} x_1(kT) + \frac{5}{s(s+2)} x_2(kT),$$

$$x_2((k+1)T) = x_3(kT),$$

$$x_3((k+1)T) = -x_1(kT) - 6x_2(kT) - 5x_3(kT) + r(kT). \quad (4.84)$$

Переходя в первом из уравнений (4.84) к функции времени, получим:

$$x_1(t) = x_1(kT) + \frac{5}{2} [1 - e^{-2(t-t_0)}] \cdot x_2(kT).$$

Полагая в последнем уравнении $t_0 = kT$, а $t = (k+1)T$ и учитывая оставшиеся уравнения (4.84), получим уравнения состояния системы:

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \\ x_3[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2}(1 - e^{-2T}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r(kT).$$

Уравнение выхода будет иметь вид:

$$y(kT) = x_1(kT).$$

4.4 Управляемость и наблюдаемость цифровых систем

4.4.1 Понятия управляемости и наблюдаемости

При исследовании систем методом пространства состояния большое значение имеют понятия управляемости и наблюдаемости системы, которые, по сути, не отличаются для дискретных и непрерывных систем. Под управляемостью системы понимают возможность целенаправленного воздействия на переменные состояния системы и на ее выход. Дуальным является понятие наблюдаемости, под которой понимают возможность восстановления некоторого начального состояния по наблюдениям (измерениям) выхода системы при известном входном сигнале.

Формализуем понятия наблюдаемости и управляемости для цифровой системы, описываемой, например, уравнениями (4.7), (4.8):

$$\mathbf{x}(k_{j+1}) = \mathbf{A}(k_j) \cdot \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{B}(k_j) \cdot \mathbf{r}(k_j),$$

$$\mathbf{y}(k_j) = \mathbf{C}(k_j) \cdot \mathbf{x}(k_j) + \mathbf{D}(k_j) \cdot \mathbf{r}(k_j).$$

Система называется *полностью управляемой по состоянию*, если для произвольного начального момента времени k_0 существует последовательность неограниченных входных воздействий $\mathbf{r}(k_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, переводящая каждое начальное состояние $\mathbf{x}(k_0)$ в некоторое конечное состояние $\mathbf{x}(k_N)$ за ограниченное время $k_N \geq k_0$.

Система называется *полностью управляемой по выходу*, если для произвольного начального момента времени k_0 существует последовательность неограниченных входных воздействий $\mathbf{r}(k_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$, с помощью которой может быть достигнуто некоторое конечное значение выхода $\mathbf{y}(k_N)$ из произвольного начального значения $\mathbf{y}(k_0)$ за ограниченное время $k_N \geq k_0$.

Система называется *абсолютно управляемой* (по состоянию или по выходу), если она полностью управляема (по состоянию или по выходу) для всех k_0 и всех $k_N \geq k_0$.

Полная управляемость, как видно из определений, требует управляемости для *всех* начальных условий (но не обязательно для *всех* конечных состояний). Абсолютная же управляемость подразумевает также и все конечные состояния, то есть является более сильным понятием. Если элементы матрицы $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{B}(k)$, $\mathbf{C}(k)$, $\mathbf{D}(k)$ являются аналитическими функциями времени k , то понятия полной и абсолютной управляемости совпадают. Тем более они совпадают для стационарных систем.

Система называется *полностью наблюдаемой*, если для некоторого момента времени k_0 состояние $\mathbf{x}(k_0)$ может быть определено по известным выходным $\mathbf{y}(k)$ и входным $\mathbf{r}(k)$ сигналам для $k_0 \leq k < k_N$, где k_N – ограниченное время.

Система называется *глобально (абсолютно) наблюдаемой*, если она полностью наблюдаема для всех k_0 и всех $k_N > k_0$.

Для стационарных систем понятия полной и глобальной наблюдаемости совпадают.

4.4.2 Определение управляемости по уравнениям динамики

Теорема 4.1. Для того чтобы система, описываемая уравнением состояния (4.7), была полностью управляема по состоянию, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости \mathbf{Q} был бы равен n . Матрица управляемости \mathbf{Q} равна в блочной записи:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_0 \ \mathbf{Q}_1 \ \dots \ \mathbf{Q}_{N-1}], \quad (n \times N \cdot p), \quad (4.85)$$

где $\mathbf{Q}_i = \Phi(k_N, k_{i+1}) \mathbf{B}(k_i)$, $(n \times p)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Доказательство. Решение уравнения состояния (4.7) представлено в виде (4.56). Перепишем это решение в виде:

$$\mathbf{x}(k_N) - \Phi(k_N, k_0)\mathbf{x}(k_0) = \sum_{i=0}^{N-1} \Phi(k_N, k_{i+1})\mathbf{B}(k_i)\mathbf{r}(k_i). \quad (4.86)$$

Левую часть последнего выражения можно представить как n -мерный вектор-столбец, зависящий от k_0 и k_N , переписав уравнение (4.86) в виде:

$$\mathbf{X}(k_N, k_0) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}, \quad (4.86')$$

где \mathbf{Q} – матрица, определяемая соотношениями (4.85), а \mathbf{R} – вектор-столбец размерностью $N \cdot p$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(k_0) \\ \mathbf{r}(k_1) \\ \dots \\ \mathbf{r}(k_{N-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Полная управляемость по состоянию требует для любого k_0 существования управления, переводящего систему из состояния $\mathbf{x}(k_0)$ в некоторое состояние $\mathbf{x}(k_N)$, другими словами, для произвольной левой части уравнений (4.86') должно существовать управление \mathbf{R} , являющееся решением уравнения (4.86'). Выражение (4.86') является, по сути, компактной формой записи системы n неоднородных уравнений с $N \cdot p$ неизвестными компонентами вектора управления \mathbf{R} . Как известно из линейной алгебры, решение такой системы уравнений существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов при неизвестном совпадает с рангом расширенной матрицы.* Чтобы произвольный вектор $\mathbf{X}(k_N, k_0)$ не менял ранга матрицы коэффициентов \mathbf{Q} , последний должен быть максимальным, то есть равным n . Что и требовалось доказать.

Иногда установление ранга матрицы – занятие довольно утомительное, поэтому равенство ранга матрицы \mathbf{Q} величине n можно определить по невырожденности соответствующей матрицы Грама:

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{Q}_i^T = \sum_{i=1}^{N-1} \Phi(k_N, k_{i+1})\mathbf{B}(k_i)\mathbf{B}^T(k_i)\Phi^T(k_N, k_{i+1}). \quad (4.88)$$

* Расширенная матрица – это матрица коэффициентов при неизвестных, в которую добавлен столбец, определяющий неоднородность уравнений, в данном случае – вектор $\mathbf{X}(k_N, k_0)$.

Теорема 4.2. Для полной управляемости по выходу системы, описываемой уравнением (4.7), необходимо и достаточно, чтобы матрица \mathbf{T} управляемости по выходу имела ранг, равный m . Матрица \mathbf{T} задается выражением:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_0 \ \mathbf{T}_1 \ \dots \ \mathbf{T}_N], \quad (m \times (N+1)p), \quad (4.89)$$

$$\text{где } \mathbf{T}_i = \begin{cases} \mathbf{C}(k_N) \cdot \Phi(k_N, k_{i+1}) \mathbf{B}(k_i), & 0 \leq i \leq N-1, \\ \mathbf{D}(k_N), & i = N. \end{cases}$$

Доказательство. Подставим решение уравнения состояния (4.56) в уравнение выхода (4.7) и запишем это решение в форме, аналогичной выражению (4.86):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k_N) - \mathbf{C}(k_N) \Phi(k_N, k_0) \mathbf{x}(k_0) &= \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{C}(k_N) \Phi(k_N, k_{i+1}) \mathbf{B}(k_i) \mathbf{r}(k_i) + \\ &+ \mathbf{D}(k_N) \mathbf{r}(k_N). \end{aligned}$$

Левую часть полученного выражения представим как m -мерный вектор-столбец $\mathbf{Y}(k_N, k_0)$, а правую часть запишем с использованием обозначений (4.89):

$$\mathbf{Y}(k_N, k_0) = \sum_{i=0}^N \mathbf{T}_i \mathbf{r}(k_i) = \mathbf{T} \mathbf{R}^*, \quad (4.90)$$

где \mathbf{R}^* – вектор-столбец размерностью $(N+1)p$:

$$\mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(k_0) \\ \mathbf{r}(k_1) \\ \dots \\ \mathbf{r}(k_N) \end{bmatrix}.$$

Полная управляемость системы по выходу означает, что для произвольного начального $\mathbf{y}(k_0)$ и конечного $\mathbf{y}(k_N)$ значения выхода (то есть для произвольного $\mathbf{Y}(k_N, k_0)$) должна существовать последовательность управлений \mathbf{R}^* , переводящая $\mathbf{y}(k_0)$ в $\mathbf{y}(k_N)$, то есть должно существовать решение уравнений (4.90) для любых $\mathbf{Y}(k_N, k_0)$.

Выражение (4.90) – это система m неоднородных уравнений с $(N+1)p$ неизвестными компонентами вектора \mathbf{R}^* .

Решение такой системы уравнений существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов \mathbf{T} равен рангу расширенной матрицы. Последнее условие при произвольном векторе $\mathbf{Y}(k_N,$

k_0) будет выполнено, если только ранг матрицы \mathbf{T} равен m , что и требовалось доказать.

Управляемость по выходу можно установить и по невырожденности соответствующей матрицы Грама:

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{T}_i \mathbf{T}_i^T.$$

Для стационарных систем определение управляемости по состоянию и по выходу облегчается. Кроме того, для стационарного случая существует ряд теорем, которые часто более удобны в практическом применении. Эти теоремы приводятся без подробных пояснений в доказательствах.

Теорема 4.3. Линейная стационарная система:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k_{i+1}) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k_i) + \mathbf{B} \mathbf{r}(k_i), \\ \mathbf{y}(k_i) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k_i) + \mathbf{D} \mathbf{r}(k_i), \end{aligned} \quad (4.91)$$

полностью управляема по состоянию, если и только если $(n \times N \cdot p)$ -мерная матрица

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}]$$

имеет ранг n или матрица Грама $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ является невырожденной.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 4.1 для нестационарных систем.

Теорема 4.4. Линейная стационарная цифровая система (4.91) полностью управляема по состоянию, если и только если строки матрицы

$$(\mathbf{zE} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

линейно независимы.

Доказательство следует из анализа уравнения (4.60).

Теорема 4.5. Пусть уравнения состояния представлены в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k_{i+1}) &= \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}(k_i) + \mathbf{B}_n \mathbf{r}(k_i), \\ \mathbf{y}(k_i) &= \mathbf{C}_n \mathbf{x}(k_i) + \mathbf{D}_n \mathbf{x}(k_i), \end{aligned} \quad (4.92)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица.

Тогда для полной управляемости системы по состоянию необходимо и достаточно, чтобы в матрице \mathbf{B}_n отсутствовали строки, полностью состоящие из нулей.

Действительно, в случае диагональной матрицы \mathbf{A} , система уравнений состояния (4.92) является несвязанной. Поэтому при наличии нулевой строки в матрице \mathbf{B}_n соответствующая компонента вектора \mathbf{x} не будет зависеть от входного воздействия \mathbf{r} и, следовательно, будет неуправляемой.

Если уравнения состояния записаны в нормальной форме Жордана (при кратных собственных числах), то нулевыми не должны быть строки матрицы \mathbf{B}_n , соответствующие последним строкам каждой клетки Жордана для кратных собственных чисел.

Теорема 4.6. Для полной управляемости системы (4.91) по выходу необходимо и достаточно, чтобы матрица:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{C}\mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}\mathbf{B} \quad \mathbf{D}]$$

имела ранг m или матрица Грама $\mathbf{T}\mathbf{T}^T$ была невырожденной.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 4.2 для нестационарного случая.

4.4.3 Определение наблюдаемости по уравнениям динамики

Теорема 4.7. Для полной наблюдаемости системы, описываемой уравнениями динамики (4.7), (4.8), необходимо и достаточно, чтобы матрица наблюдаемости \mathbf{L} имела ранг n . Матрица наблюдаемости в блочной записи имеет вид:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{C}^T(k_0) \quad \Phi^T(k_1, k_0) \mathbf{C}^T(k_1) \quad \dots \quad \Phi^T(k_{N-1}, k_0) \mathbf{C}^T(k_{N-1})]. \quad (4.92)$$

Доказательство. Представим решение уравнения выхода (4.8) в форме (4.58):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k_i) = & \mathbf{C}(k_i)\Phi(k_i, k_0)\mathbf{x}(k_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{C}(k_i)\Phi(k_i, k_{j+1})\mathbf{B}(k_j)\mathbf{r}(k_j) + \\ & + \mathbf{D}(k_i)\mathbf{r}(k_i). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Объединив уравнения (4.93) для всех $i = 1, 2, \dots, N - 1$ и добавив уравнение $\mathbf{y}(k_0) = \mathbf{C}(k_0) \mathbf{x}(k_0) + \mathbf{D}(k_0) \mathbf{r}(k_0)$, перепишем их в виде матричного уравнения:

$$\mathbf{Y}(k_{N-1}, k_0) = \mathbf{L}^T \mathbf{x}(k_0) + \mathbf{G}\mathbf{R}, \quad (4.93')$$

где $\mathbf{Y}(k_{N-1}, k_0) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k_0) \\ \mathbf{y}(k_1) \\ \dots \\ \mathbf{y}(k_{N-1}) \end{bmatrix},$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(k_0) & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{C}(k_1)\mathbf{B}(k_0) & \mathbf{D}(k_1) & \dots & 0 \\ \mathbf{C}(k_2)\Phi(k_2, k_1)\mathbf{B}(k_0) & \mathbf{C}(k_2)\mathbf{B}(k_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}(k_{N-1})\Phi(k_{N-1}, k_1)\mathbf{B}(k_0) & \mathbf{C}(k_{N-1})\Phi(k_{N-1}, k_2)\mathbf{B}(k_1) & \dots & \mathbf{D}(k_{N-1}) \end{bmatrix},$$

а \mathbf{L} и \mathbf{R} определяются выражениями (4.92) и (4.87) соответственно.

Наблюдаемость системы означает возможность восстановления вектора состояния $\mathbf{x}(k_0)$ по наблюдению выхода $\mathbf{Y}(k_{N-1}, k_0)$, другими словами, для наблюдаемости системы необходимо и достаточно существования решения уравнений (4.93') относительно $\mathbf{x}(k_0)$ при заданных $\mathbf{Y}(k_{N-1}, k_0)$, \mathbf{L} , \mathbf{G} и \mathbf{R} . Выражение (4.93') – это система из $(m \cdot N)$ уравнений относительно n неизвестных компонент вектора $\mathbf{x}(k_0)$. Решение такой системы неоднородных уравнений существует тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен количеству неизвестных, то есть n (предполагается, что $m \cdot N \geq n$). Отсюда следует, что ранг матрицы \mathbf{L}^T должен равняться n или, что то же самое, ранг матрицы \mathbf{L} также должен быть равен n , что и требовалось доказать.

Для стационарных систем также можно сформулировать ряд теорем о наблюдаемости.

Теорема 4.8. Линейная стационарная система (4.91) является полностью наблюдаемой, только если матрица:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T \quad (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T \quad \dots \quad (\mathbf{A}^T)^{N-1} \mathbf{C}^T]$$

имеет ранг n .*

Доказательство следует из теоремы 4.7 для нестационарного случая.

Теорема 4.9. Линейная стационарная цифровая система (4.91) полностью наблюдаема, если и только если столбцы матрицы $C(zE - A)^{-1}$ линейно независимы.

Доказательство следует из анализа уравнения (4.61).

Теорема 4.10. Линейная стационарная цифровая система, заданная уравнениями состояния в нормальной форме (4.92), полностью наблюдаема, если при различных собственных числах системы матрица C_n не имеет столбцов, целиком состоящих из нулей.

Если имеются кратные собственные значения, то нулю не должны равняться столбцы, соответствующие первым столбцам каждой клетки Жордана.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.5.

4.4.4 Блочное разбиение системы

Исследование управляемости и наблюдаемости системы облегчается существованием ряда теорем, которые здесь приводятся без доказательств.

Теорема 4.11 (Калмана). Произвольная линейная система всегда может быть разбита на четыре подсистемы S_1, S_2, S_3, S_4 (рисунок 4.13):

- S_1 – полностью управляемая и наблюдаемая подсистема;
- S_2 – полностью управляемая и ненаблюдаемая подсистема;
- S_3 – неуправляемая, но полностью наблюдаемая подсистема;
- S_4 – неуправляемая и ненаблюдаемая подсистема.

Управляемость и наблюдаемость всей системы в целом предполагает существование только подсистемы S_1 . Необходимо подчеркнуть, что неучет составляющих S_2, S_3, S_4 может привести иссле-

* Эквивалентное требование – невырожденность соответствующей матрицы Грама LL^T .

- необходимым (но не достаточным) условием управляемости (наблюдаемости) системы с обратной связью является управляемость (наблюдаемость) и S_a , и S_b ;

- если S_a и S_b управляемы (наблюдаемы), то любые из неуправляемых (ненаблюдаемых) координат системы с обратной связью являются неуправляемыми (ненаблюдаемыми) координатами S_{ab} (S_{ba}) и порождаются подсистемой обратной связи S_h .

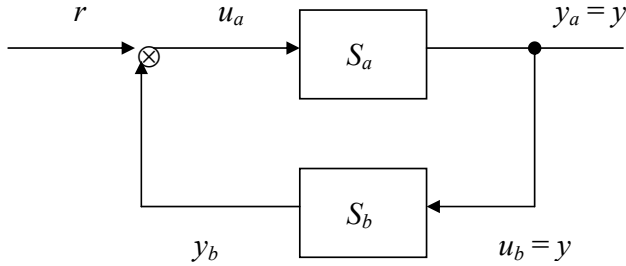


Рисунок 4.14

Непосредственным следствием теоремы Гильберта являются теоремы об управляемости и наблюдаемости замкнутых систем с обратной связью по состоянию.

Теорема 4.13. Если цифровая линейная система:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.94)$$

является полностью управляемой по состоянию, то замкнутая система, получаемая с помощью обратной связи по состоянию (рисунок 4.15) и описываемая уравнением состояния:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{r}(k),$$

также полностью управляема по состоянию.

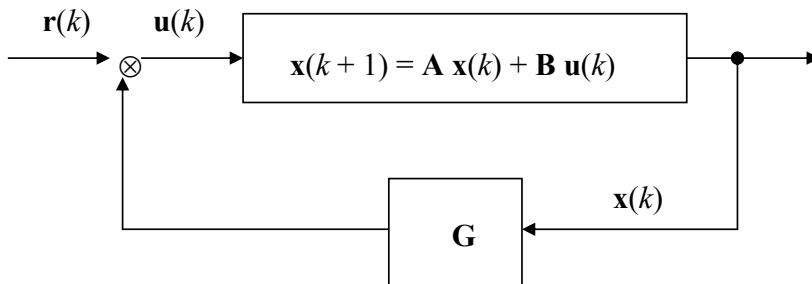


Рисунок 4.15

Если же разомкнутая система неуправляема, то сделать ее управляемой не сможет никакая обратная связь \mathbf{G} .

Теорема 4.14. Если линейная цифровая система (4.94) полностью управляема по состоянию и наблюдаема, то обратная связь по состоянию (рисунок 4.15)

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}(k) - \mathbf{G} \mathbf{x}(k)$$

может сделать систему ненаблюдаемой.

Важное значение при исследовании систем методом пространства состояний имеют различные преобразования координат (например, переход к нормальным координатам или к канонической форме фазовых переменных). Практически значимой поэтому является теорема об инвариантности управляемости и наблюдаемости.

Теорема 4.15. Если система является полностью управляемой (наблюдаемой), то невырожденное преобразование не меняет управляемости (наблюдаемости) системы.

Как известно, передаточная функция (матричная передаточная функция – в случае многомерных систем) является конечным итогом математического описания систем классическим частотным методом, и получается она путем описания звеньев системы и дальнейшего структурного анализа. При этом могут происходить сокращения одинаковых нулей и полюсов передаточной функции в результате преобразований передаточных функций звеньев. О том, как это связано с управляемостью и наблюдаемостью системы, говорит следующая теорема.

Теорема 4.16. Если в передаточной функции, связывающей входной и выходной сигналы стационарной цифровой системы, имеется компенсация нулей и полюсов, то в зависимости от выбора системы координат (переменных состояния) система может быть либо неуправляемой по состоянию, либо ненаблюдаемой, либо и то и другое одновременно.

Если в передаточной функции отсутствует компенсация нулей и полюсов, то всегда можно выбрать систему координат, в которой система будет описываться как полностью управляемая и наблюдаемая.

Для цифровых систем с квантованием и фиксацией существует дополнительное требование, определяющее управляемость и наблюдаемость. Если в передаточной функции непрерывной части есть комплексные полюса, то в ее разложении на простые дроби будет слагаемое $\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$. В случае, если период квантования вы-

брать равным $T = k\pi / \omega$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), z -преобразование от такого слагаемого будет:

$$Z\left\{\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}\right\} = \frac{z^{-1}e^{-\alpha T} \sin \omega T}{1 - 2z^{-1}e^{-\alpha T} \cos \omega T + z^{-2}e^{-2\alpha T}} = 0.$$

Таким образом, даже неустойчивость системы (при $\alpha < 0$) нельзя определить по наблюдаемости ее выхода. Нетрудно показать, что в таком случае $\Phi(iT) = \Phi(jT)$ $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ и, согласно теоремам 4.3 и 4.8, система будет неуправляемой и ненаблюдаемой.

Дополнительное требование для полной управляемости и наблюдаемости цифровых систем с квантованием и фиксацией состоит, таким образом, в том, чтобы при комплексных полюсах $-\alpha \pm j\omega$ непрерывной передаточной функции период квантования $T \neq k\pi / \omega$, где $k = 0, 1, 2, \dots$.

Пример 4.10. Пусть линейная цифровая система управления описывается разностным уравнением:

$$y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = r(k+1) + r(k).$$

Введем переменные состояния таким образом, чтобы получить уравнения состояния в канонической форме фазовой переменной. Тогда уравнения состояния и уравнение выхода можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}r(k),$$

$$y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k),$$

$$\text{где } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 1].$$

Составляя матрицу управляемости по состоянию \mathbf{Q} , убеждаемся, что ранг этой матрицы равен 2 (матрица \mathbf{Q} не вырождена) и со-

гласно теореме 4.3 исследуемая система полностью управляема по состоянию:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Теперь исследуем наблюдаемость системы, составив матрицу наблюдаемости \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица является вырожденной, т.е. ее ранг равен единице, и, согласно теореме 4.8, система является ненаблюдаемой.

Далее составим матрицу управляемости по выходу:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{CAB} \quad \mathbf{CB}] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет ранг, равный 1, и, следовательно, система является управляемой по выходу.

Переопределим теперь переменные состояния системы таким образом, чтобы матрицы коэффициентов приняли бы другой, например, следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0]$$

Составляя соответствующие матрицы аналогично проделанному ранее, убеждаемся, что

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ — система неуправляема по состоянию;}$$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ — система наблюдаема;}$$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{CAB} \quad \mathbf{CB}] = [1 \quad 1] \text{ — система управляема по выходу.}$$

Различия в управляемости и наблюдаемости системы в зависимости от выбора переменных состояния обусловлены тем, что в передаточной функции системы

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z+1}{z^2+2z+1} = \frac{z+1}{(z+1)^2} = \frac{1}{z+1}$$

имеется компенсация полюса и нуля, что в соответствии с теоремой 4.16 и объясняет поведение системы.

5 МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При любом исследовании систем автоматики, будь то анализ или синтез, возникает необходимость моделирования процессов, происходящих в системе. Моделирование систем с цифровыми элементами уже было рассмотрено в разделах 3 и 4. Моделирование же непрерывных систем рассматривается в данном разделе. Это моделирование может осуществляться либо с применением аналоговых вычислительных машин, либо цифровыми методами. В последнем случае необходимо описание динамики непрерывной системы с помощью дискретной передаточной функции или с помощью дискретных уравнений состояния.

Еще один важный аспект необходимости описания непрерывной системы дискретными уравнениями состоит в следующем. К настоящему времени разработано и эксплуатируется большое число аналоговых систем управления промышленного назначения. Характеристики этих систем вполне удовлетворительны, но развитие и совершенствование технологии микропроцессоров и вообще цифровой техники вызывает желание реализовать эти системы управления на новой, цифровой элементной базе. Вместо совершенно нового проектирования таких систем с применением теории цифровых систем управления проще и дешевле воспользоваться методикой преобразования уже готовой системы на базе ЭВМ для создания эквивалентной цифровой системы.

Из множества методов замены непрерывной системы на эквивалентную цифровую рассмотрим следующие наиболее часто применяемые методы:

- введение в непрерывную систему устройств выборки и хранения;
- методы численного интегрирования;
- метод z -форм;
- метод пространства состояний с использованием УВХ.

5.1 Применение УВХ

Этот метод наиболее простой и состоит в том, что в соответствующих точках структурной схемы непрерывной системы вводятся

фиктивные устройства выборки и хранения. В этом случае систему можно описать импульсными передаточными функциями, используя алгебраические преобразования или метод дискретного графа, либо разностными уравнениями состояния.

При этом совсем не обязательно применять экстраполятор именно нулевого порядка, может быть использован и линейный экстраполятор.

Пример 5.1. Пусть дана непрерывная система, представленная на рисунке 5.1.

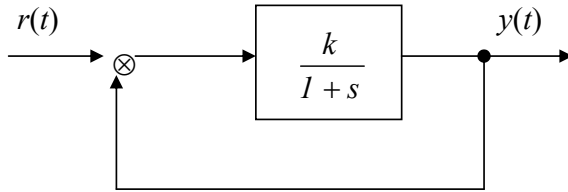


Рисунок 5.1

Устройство выборки и хранения, состоящее из квантователя и фиксатора нулевого порядка с передаточной функцией $W(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$, можно ввести либо в канал ошибки (рисунок 5.2, а), либо в обратную связь (рисунок 5.2, б).

Рассмотрим оба эти случая.

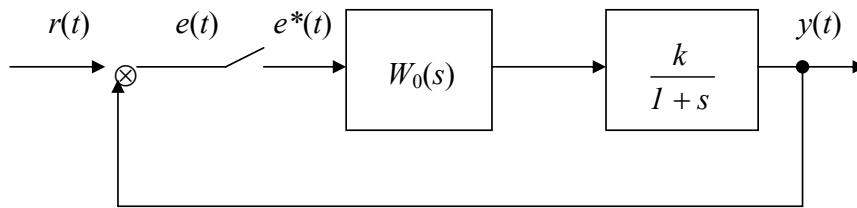
Для схемы, представленной на рисунке 5.2, а, запишем уравнения, связывающие переменные в s -плоскости:

$$E(s) = R(s) - Y(s),$$

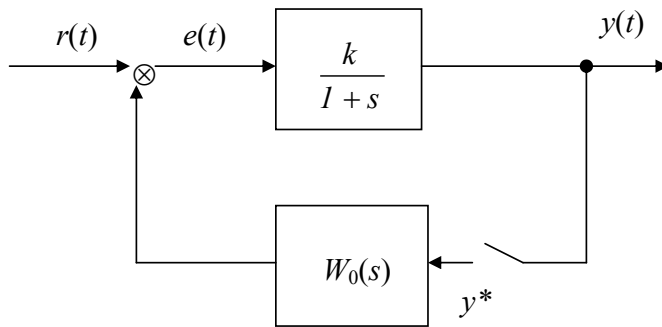
$$Y(s) = W_0(s) \cdot \frac{k}{1+s} \cdot E^*(s) = \frac{(1 - e^{-Ts})k}{s(s+1)} E^*(s).$$

Переходя в этих уравнениях к дискретным переменным, составим дискретный граф системы (рисунок 5.3). На рисунке 5.3 введено обозначение:

$$W_1^*(s) = \left[\frac{(1 - e^{-Ts})k}{s(s+1)} \right]^*.$$



а)



б)

Рисунок 5.2

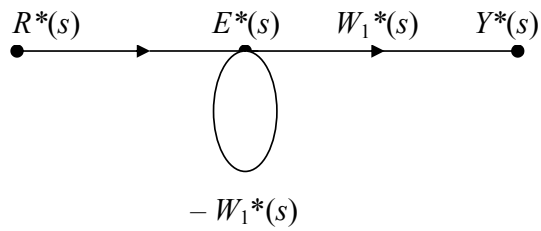


Рисунок 5.3

Из дискретного графа системы определяем выходной сигнал, переходя к переменной z :

$$Y(z) = \frac{Z \left\{ \frac{(1 - e^{-Ts})k}{s(s+1)} \right\}}{1 + Z \left\{ \frac{(1 - e^{-Ts})k}{s(s+1)} \right\}}, \quad R(z) = \frac{k(1 - e^{-T})}{z - e^{-T} + k(1 - e^{-T})} R(z). \quad (5.1)$$

Конкретизируем в последней формуле $R(z)$, задав входное воздействие в виде линейной функции:

$$r(t) = V \cdot t.$$

Тогда из выражения (5.1) получим:

$$Y(z) = \frac{V \cdot k \cdot z \cdot T(1 - e^{-T})}{[z - e^{-T} + k(1 - e^{-T})](z - 1)^2}. \quad (5.2)$$

Проделявая аналогичные операции с системой, представленной на рисунке 5.2, б, можно получить выражение для выхода системы:

$$Y(z) = \frac{Z \left\{ R(s) \frac{k}{1+s} \right\}}{1 + Z \left\{ W_0(s) \frac{k}{1+s} \right\}} = \frac{V \cdot k \cdot z [T(z - e^{-T}) + (z - 1)(e^{-T} - 1)]}{[z - e^{-T} + k(1 - e^{-T})](z - 1)^2}. \quad (5.3)$$

Сравнивая выражения (5.2) и (5.3) из приведенного примера, замечаем, что они отличаются, следовательно, результат моделирования зависит от точек структурной схемы, в которые вводятся устройства выборки и хранения.

Важным моментом при использовании этого метода моделирования является также выбор величины периода квантования T , который непосредственно влияет на точность и устойчивость получаемой при этом цифровой системы.

5.2 Численное интегрирование

Самой сложной и трудоемкой операцией при решении дифференциальных уравнений, описывающих непрерывные системы, является интегрирование. Цифровую систему можно получить, заменив непрерывную операцию интегрирования дискретными численными методами вычисления интеграла. Операцию интегрирования в явном виде нетрудно заметить, воспользовавшись диаграммой состояния непрерывной системы. Ребра с весом s^{-1} как раз и означают интегрирование соответствующей переменной. Поэтому поставленную задачу можно также сформулировать, как замену интеграторов s^{-1} на диаграмме состояния непрерывной системы на соответствующую выбранному методу численного интегрирования импульсную передаточную функцию.

Моделирование по рассматриваемому методу состоит, таким образом, из двух этапов: на первом составляется диаграмма состояния непрерывной системы, а на втором заменяются все ребра с весом s^{-1} на импульсную передаточную функцию выбранного метода численного интегрирования.

Наиболее простыми, а следовательно, и наиболее часто применяемыми, являются метод прямоугольников и метод трапеций.

5.2.1 Метод прямоугольников

Метод прямоугольников заключается в приближенной замене интеграла, то есть площади под кривой, описывающей интегрируемую функцию, на сумму площадей прямоугольников с основанием, равным периоду квантования, и высотой, равной значению функции в начале периода квантования (обычный метод прямоугольников) или в конце периода квантования (метод прямоугольников с упреждением).

Метод прямоугольников эквивалентен введению квантователя и экстраполятора нулевого порядка перед каждым интегратором s^{-1} .

Структурная схема этого метода интегрирования приведена на рисунке 5.4, а (метод прямоугольников) и на рисунке 5.4, б (метод прямоугольников с упреждением).

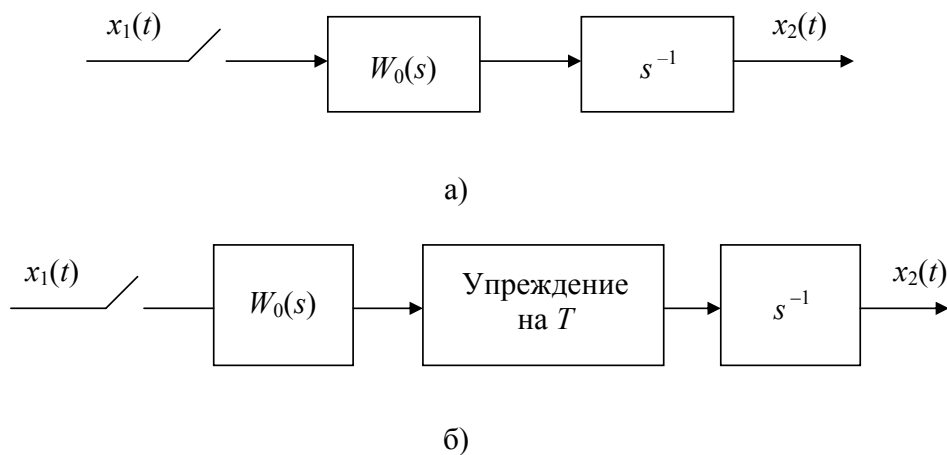


Рисунок 5.4

Согласно рисунку 5.4, а, импульсная передаточная функция интегрирования по методу прямоугольников равна:

$$\frac{X_2(z)}{X_1(z)} = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{T}{z - 1}. \quad (5.4)$$

На основании полученной передаточной функции (5.4) запишем уравнение состояния:

$$x_2[(k + 1)T] = x_2(kT) + T x_1(kT).$$

Импульсная передаточная функция интегрирования по рисунку 5.4, б будет равна:

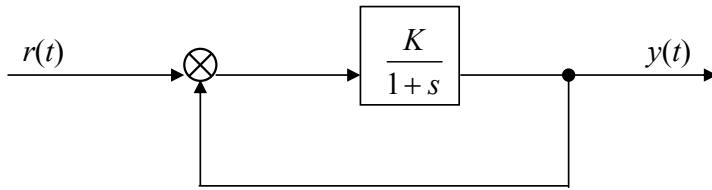
$$\frac{X_2(z)}{X_1(z)} = z \cdot (1 - z^{-1}) \cdot Z \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = \frac{Tz}{z - 1}. \quad (5.5)$$

При получении последней формулы учтено, что упреждение на T равносильно умножению изображения на z .

Уравнение состояния по выражению (5.5) имеет вид:

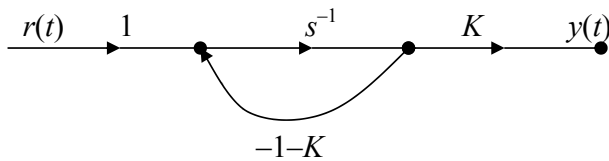
$$x_2[(k + 1)T] = x_2(kT) + T x_1[(k + 1)T].$$

Пример 5.2. Рассмотрим систему из примера 5.1.

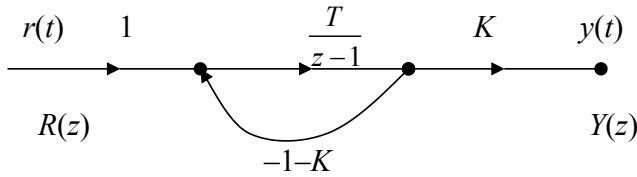


Заменяем эту непрерывную систему на цифровую модель, применив метод численного интегрирования по методу прямоугольников.

Для применения метода численного интегрирования по структурной схеме составляем диаграмму состояния.



В соответствии с методом прямоугольников заменяем ребро с весом s^{-1} на ребро с передаточной функцией $\frac{T}{z-1}$.



Применяя формулу Мейсона, записываем передаточную функцию дискретной модели:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{T}{z-1} \cdot K}{1 + \frac{T}{z-1} \cdot (1+K)} = \frac{TK}{z-1+T+TK}.$$

Конкретизируя входное воздействие, например, в виде единичной ступеньки, получаем z-изображение выходного сигнала:

$$Y(z) = W(z) \cdot R(z) = \frac{TK}{z-1+T+TK} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{TKz}{z^2 + (T+TK-2)z + (1-T-TK)}.$$

5.2.2 Метод трапеций

Этот метод основан на кусочно-линейной аппроксимации, то есть на замене интеграла суммой площадей трапеций с основанием, равным T . Это эквивалентно введению перед каждым интегратором на диаграмме состояний квантователя и экстраполятора первого порядка (линейного экстраполятора). Соответствующая схема приведена на рисунке 5.5.

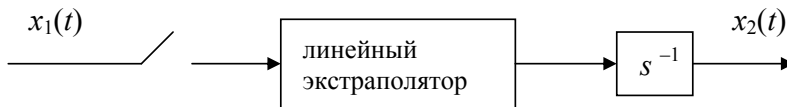


Рисунок 5.5

Передаточная функция экстраполятора первого порядка согласно формуле (2.44) равна:

$$W_1(s) = \frac{e^{Ts} + e^{-Ts} - 2}{Ts^2},$$

поэтому импульсная передаточная функция численного интегрирования по методу трапеций на основании рисунка 5.5 будет иметь вид:

$$\frac{X_2(z)}{X_1(z)} = \frac{z + z^{-1} - 2}{T} \cdot Z\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{T}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}. \quad (5.6)$$

Относительная точность различных численных методов зависит от конкретной передаточной функции, но все же при прочих равных условиях метод трапеций в этом смысле предпочтительнее.

С точки зрения влияния на устойчивость получаемой цифровой системы, наихудшим, как правило, является метод прямоугольников.

Недостатком методов численного интегрирования является необходимость предварительного выделения в передаточной функции непрерывной системы интеграторов в чистом виде (этап получения диаграммы состояния). От этого недостатка свободен следующий метод – метод z -форм.

5.3 Метод z -форм

Для пояснения этого метода запишем связь непрерывной функции $f(t)$ с ее преобразованием Лапласа:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (5.7)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds. \quad (5.8)$$

Путь интегрирования в формуле (5.8) разобьем на три части и представим правую часть в виде суммы трех интегралов:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\omega_s/2} F(s)e^{st} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s)e^{st} ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds. \quad (5.9)$$

Если период квантования достаточно мал (частота квантования ω_s достаточно большая), то первым и последним слагаемым в фор-

муле (5.9) можно пренебречь вследствие ограниченности частотного спектра реального сигнала, описываемого функцией $f(t)$. Тогда можно приближенно записать:

$$f(t) \approx \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s)e^{st} ds.$$

Рассматривая последнее выражение в дискретных точках $t = kT$ и обозначая правую часть через $f_A(kT)$, получим:

$$f(kT) \approx f_A(kT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega_s/2}^{c+j\omega_s/2} F(s)e^{skT} ds.$$

Перейдем в последней формуле к переменной z , сделав замену переменной $s = \frac{1}{T} \ln z$:

$$f_A(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F\left(\frac{1}{T} \ln z\right) e^{k \ln z} d\left(\frac{1}{T} \ln z\right) = \frac{1}{2\pi j T} \oint_{\Gamma} F\left(\frac{1}{T} \ln z\right) z^{k-1} dz, \quad (5.10)$$

где контур интегрирования Γ – это окружность с центром в начале координат и радиусом e^{cT} .

Сравнивая полученное выражение (5.10) с формулой обращения (формулой обратного z -преобразования):

$$f(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz, \quad (5.11)$$

нетрудно заметить, что они совпадают с точностью до множителя $\frac{1}{T}$. Но в z -преобразовании $f(kT)$ – коэффициенты разложения $F(z)$ в ряд по степеням z^{-1} . Поэтому значение $f_A(kT)$ по выражению (5.10), то есть приближенное значение $f(kT)$, может быть получено разложением в ряд по степеням z^{-1} функции $F\left(\frac{1}{T} \ln z\right)/T$.

Таким образом, метод z -форм состоит в замене s^{-1} в изображении Лапласа выхода системы на $T / \ln z$ и разложении полученного выражения (с учетом множителя $1 / T$) в ряд по степеням z^{-1} для получения выхода в дискретных точках. Предварительно требуется представить выражение $F[(1 / T) \ln z]$ в виде рациональной функции от z , для чего можно воспользоваться разложением $\ln z$ в степенной ряд. Воспользуемся таким разложением. Тогда при $|z| > 0$ имеем:

$$\ln z = 2 \left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right] = 2 \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^5 + \dots \right] = 2 \left(u + \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + \dots \right),$$

где $u = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

Запишем выражение для s^{-1} :

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{\ln z} = \frac{T/2}{u + \frac{1}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5 + \dots}.$$

Осуществляя деление числителя на знаменатель, из последнего выражения получим:

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{2} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3} u - \frac{4}{45} u^3 - \frac{44}{945} u^5 - \dots \right). \quad (5.12)$$

Правая часть выражения (5.12) есть разложение функции $T / \ln z$ в ряд Лорана по степеням переменной u .

Для произвольной целой положительной степени n из выражения (5.12) будем иметь:

$$\frac{1}{s^n} = \left(\frac{T}{2} \right)^n \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{3} u - \frac{4}{45} u^3 - \frac{44}{945} u^5 - \dots \right)^n. \quad (5.13)$$

При возведении в степень правой части выражения (5.13) также получим ряд Лорана.

Ограничиваясь постоянным членом и основной частью* ряда Лорана (5.13), получаем:

$$\frac{1}{s^n} \approx \frac{N_n(z^{-1})}{(1-z^{-1})^n} = G_n(z^{-1}), \quad (5.14)$$

* Основная или главная часть ряда Лорана – это слагаемые с отрицательными степенями переменной, то есть нисходящая часть ряда. Отбрасывание остальных членов ряда обусловлено следующим соображением. При $s = 0$ $z = 1$, то есть полюса правой и левой частей выражения (5.14) соответствуют друг другу. Поэтому учет дополнительных членов ряда приведет к появлению дополнительных полюсов в z -плоскости и к увеличению, а не уменьшению ошибки.

где $N_n(z^{-1})$ – полином от z^{-1} степени не выше n , а $G_n(z^{-1})$ носит название z -формы от s^{-n} .

При $n = 1$ для получения $G_n(z^{-1})$ в формуле (5.12) ограничиваемся первым слагаемым:

$$s^{-1} \approx G_1(z^{-1}) = \frac{T}{2} \cdot \frac{1}{u} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

При $n = 2$ из выражения (5.13) получим:

$$s^{-2} \approx G_2(z^{-1}) = \left(\frac{T}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{u}\right)^2 - \frac{2}{3} \right] = \frac{T^2}{12} \cdot \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}.$$

Аналогичным образом получаем и z -формы для более высоких порядков. Эти выражения для $n \leq 4$ приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

s^{-n}	$G_n(z^{-1})$
s^{-1}	$\frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
s^{-2}	$\frac{T^2}{12} \cdot \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}$
s^{-3}	$\frac{T^3}{2} \cdot \frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$
s^{-4}	$\frac{T^4}{6} \cdot \frac{z^{-1}+4z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^4} - \frac{T^4}{720}$

Резюмируя вышеизложенное, применение метода z -форм можно сформулировать следующим образом:

- определяем преобразование Лапласа выхода системы $Y(s)$ по известному входному воздействию $R(s)$ и заданной передаточной функции замкнутой системы $W(s)$:

$$Y(s) = R(s) \cdot W(s);$$

- преобразуем $Y(s)$ к виду дробно-рациональной функции по степени s^{-1} ;
- заменяем s^{-n} соответствующими z -формами^{*};
- учитываем множитель $1/T$ для получения $Y_A(z)$;
- применяя обратное z -преобразование, определяем $y_A(kT)$.

Пример 5.3. Опять рассмотрим ту же систему, что и в примерах 5.1 и 5.2. Для составления цифровой модели вначале записываем преобразование Лапласа выходного сигнала системы, полагая в качестве входного сигнала единичную ступенчатую функцию:

$$Y(s) = W(s) \cdot R(s) = \frac{K}{1+K+s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{(1+K)s+s^2} = \frac{K \cdot s^{-2}}{(1+K)s^{-1}+1}.$$

Заменяя в полученном выражении s^{-1} и s^{-2} соответствующими z -формами из таблицы 5.1 и учитывая множитель $1/T$, получаем окончательное выражение для z -преобразования выходного сигнала цифровой модели системы:

$$Y_A(z) = \frac{1}{T} \cdot \frac{K \cdot \frac{T^2(1+10z^{-1}+z^{-2})}{12(1-z^{-1})^2}}{(1+K) \cdot \frac{T(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})} + 1} = \frac{KT(1+10z^{-1}+z^{-2})}{12(T+KT+1-2z^{-1}-(T+KT-1)z^{-2})}.$$

5.4 Метод пространства состояний с применением УВХ

Если исследование системы ведется методом пространства состояний, то естественным является применение метода перехода к цифровой системе, рассматриваемого в данном разделе.

Пусть непрерывная система имеет вид, изображенный на рисунке 5.6. Предполагается, что любую линейную систему можно представить в такой форме.

Уравнение состояния системы с обратной связью по состоянию, согласно рисунку 5.6, равно:

^{*} Замена на z -формы степеней s^{-1} , а не s имеет следующее обоснование. С физической точки зрения, s^{-1} представляет собой интегратор, значительно менее подверженный влиянию помех в виде усечения ряда (5.13), чем дифференциатор s .

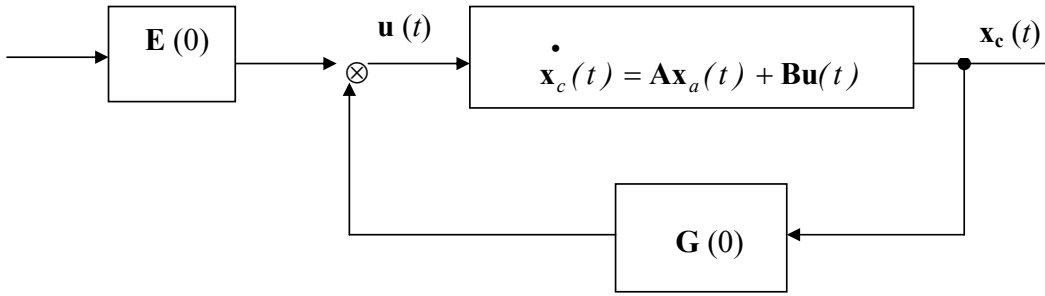


Рисунок 5.6

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)]\mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}\mathbf{E}(0) \cdot \mathbf{r}(t), \quad (5.15)$$

где $\mathbf{x}_c(t)$, $\mathbf{r}(t)$ – вектор-столбцы состояния и задающего воздействия соответственно размерностями n и m ; \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{G}(0)$ и $\mathbf{E}(0)$ – матрицы соответствующих размерностей.

Решение уравнения (5.15) равно:

$$\mathbf{x}_c(t) = \Phi_c(t - t_0)\mathbf{x}_c(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_c(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{E}(0)\mathbf{r}(\tau)d\tau, \quad (5.16)$$

где переходная матрица $\Phi_c(t - t_0)$ есть матричная экспонента:

$$\Phi_c(t - t_0) = e^{[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)](t - t_0)}.$$

Рассматриваемую непрерывную систему можно приближенно заменить на цифровую систему, применив квантователь и фиксатор нулевого порядка и изменив соответствующую матрицу $\mathbf{E}(0)$ на $\mathbf{E}(T)$, а $\mathbf{G}(0)$ на $\mathbf{G}(T)$ (см. рисунок 5.7). Уравнение объекта остается неизменным.

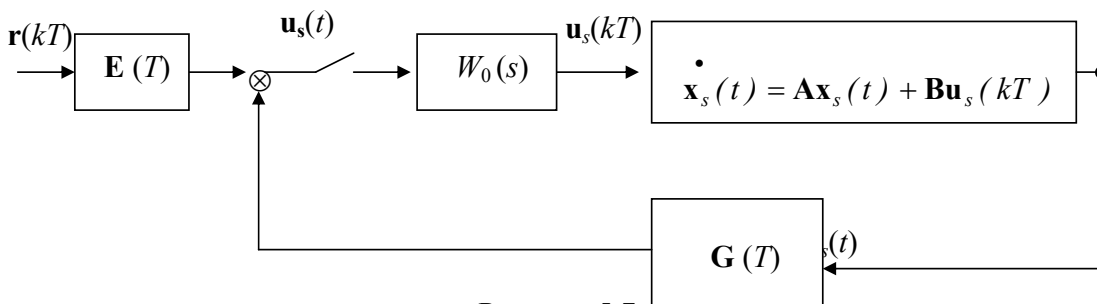


Рисунок 5.7

Требуется таким образом подобрать матрицы $\mathbf{E}(T)$ и $\mathbf{G}(T)$, чтобы при заданном входном воздействии $\mathbf{r}(t)$ состояния цифровой и непрерывной систем совпадали в дискретные моменты времени.

Уравнение состояния цифровой системы, согласно рисунку 5.7, равно:

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_s(kT), \quad (5.17)$$

где $kT \leq t \leq (k+1)T$, и

$$\mathbf{u}_s(kT) = \mathbf{E}(T)\mathbf{r}(kT) - \mathbf{G}(T) \cdot \mathbf{x}_s(kT). \quad (5.18)$$

Объединение уравнений (5.17) и (5.18) дает:

$$\dot{\mathbf{x}}_s(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_s(t) + \mathbf{B}\mathbf{E}(T)\mathbf{r}(kT) - \mathbf{B}\mathbf{G}(T) \cdot \mathbf{x}_s(kT).$$

Решение последнего уравнения при $t = (k+1)T$ и $t_0 = kT$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s[(k+1)T] = & \left[\Phi(T) - \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(kT + T - \tau) d\tau \cdot \mathbf{B}\mathbf{G}(T) \right] \mathbf{x}_s(kT) + \\ & + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(kT + T - \tau) d\tau \cdot \mathbf{B}\mathbf{E}(T)\mathbf{r}(kT), \end{aligned} \quad (5.19)$$

где переходная матрица $\Phi(T)$ есть матричная экспонента:

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T}.$$

Предположим далее, что входное воздействие $\mathbf{r}(t)$ на протяжении каждого периода квантования постоянно, то есть изменениями $\mathbf{r}(t)$ в течение периода T можно пренебречь. Тогда, полагая в решении (5.16) $t=(k+1)T$, а $t_0 = kT$, имеем:

$$\mathbf{x}_c[(k+1)T] = \Phi_c(T) \cdot \mathbf{x}_c(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi_c(kT + T - \tau) d\tau \cdot \mathbf{B}\mathbf{E}(0)\mathbf{r}(kT). \quad (5.20)$$

Сравнивая решения, определяемые формулами (5.19) и (5.20), делаем вывод, что эти решения будут совпадать, если выполняются два условия:

$$\Phi_c(T) = \Phi(T) - \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(kT + T - \tau) d\tau \cdot \mathbf{B}\mathbf{G}(T), \quad (5.21)$$

и

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \Phi(kT + T - \tau) d\tau \cdot \mathbf{B}\mathbf{E}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi_c(kT + T - \tau) d\tau \cdot \mathbf{B}\mathbf{E}(0). \quad (5.22)$$

Вводя обозначения:

$$\boldsymbol{\theta}(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\Phi}(kT + T - \tau) \mathbf{B} d\tau$$

и

$$\boldsymbol{\theta}_c(T) = \int_{kT}^{(k+1)T} \boldsymbol{\Phi}_c(kT + T - \tau) \mathbf{B} d\tau,$$

уравнения (5.21) и (5.22) представим соответственно в виде:

$$\boldsymbol{\Phi}_c(T) = \boldsymbol{\Phi}(T) - \boldsymbol{\theta}(T) \mathbf{G}(T), \quad (5.23)$$

и

$$\boldsymbol{\theta}(T) \mathbf{E}(T) = \boldsymbol{\theta}_c(T) \mathbf{E}(0). \quad (5.24)$$

При выполнении соотношения (5.23) совпадают в дискретных точках переходные составляющие вектора состояния непрерывной и эквивалентной цифровой системы, а при выполнении соотношения (5.24) – установившиеся составляющие.

Начнем с соотношения (5.23). Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\boldsymbol{\theta}(T) \mathbf{G}(T) = \boldsymbol{\Phi}(T) - \boldsymbol{\Phi}_c(T) = \mathbf{D}(T) = [\mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \dots \mathbf{d}_n] \quad (5.25)$$

и отметим, что оно представляет собой систему из $(n \cdot n)$ неоднородных алгебраических уравнений относительно $(p \cdot n)$ неизвестных элементов матрицы $\mathbf{G}(T)$. Система уравнений (5.25) имеет решение либо при совпадении числа уравнений и неизвестных ($p = n$), и в этом случае при невырожденности матрицы коэффициентов при неизвестных* (то есть матрицы $\boldsymbol{\theta}(T)$) оно записывается в виде:

$$\mathbf{G}(T) = [\boldsymbol{\theta}(T)]^{-1} \mathbf{D}(T),$$

либо при равенстве ранга матрицы $\boldsymbol{\theta}(T)$ рангу расширенной матрицы:

$$[\boldsymbol{\theta}(T) \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_2 \dots \mathbf{d}_n]. \quad (5.26)$$

Если условие (5.26) не выполняется (а чаще всего так и бывает), то решения уравнения (5.25) не существует, то есть добиться совпадения всех n состояний невозможно и тогда приходится ограничиваться совпадением только некоторых состояний или взвешенных алгебраических сумм всех n состояний. Последнее достигается переходом к новой системе координат с применением матрицы \mathbf{H} размерностью $(p \times n)$:

* Решение в этом случае можно записать и по правилу Крамера.

$$\mathbf{q} = \mathbf{H} \mathbf{x}. \quad (5.27)$$

В новой системе координат соотношение (5.25) примет вид:

$$\mathbf{H} \boldsymbol{\theta}(T) \cdot \mathbf{G}(T) = \mathbf{H} \mathbf{D}(T) \quad (5.28)$$

и будет являться уже системой $(p \cdot n)$ уравнений с таким же числом неизвестных. Если выбрать матрицу \mathbf{H} таким образом, чтобы матрица $\mathbf{H} \boldsymbol{\theta}(T)$ была неособенной, то из соотношения (5.28) можно определить матрицу обратной связи. Учитывая то, что получающаяся при этом матрица не удовлетворяет уравнению (5.25), обозначим ее $\mathbf{G}_W(T)$:

$$\mathbf{G}_W(T) = [\mathbf{H} \boldsymbol{\theta}(T)]^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}(T). \quad (5.29)$$

Найти матрицу обратной связи по соотношению (5.29) достаточно сложно, но можно применить упрощенную процедуру, воспользовавшись разложением $\mathbf{G}(T)$ в ряд Тейлора около точки $T = 0$:

$$\mathbf{G}(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{G}^{(j)}(T) \cdot T^j}{j!}, \quad (5.30)$$

где $\mathbf{G}^{(j)}(T) = \left. \frac{\partial^j \mathbf{G}(T)}{\partial T^j} \right|_{T=0}$.

Подставляя выражение (5.30) в формулу (5.23) и записывая переходные матрицы в форме матричных экспонент, получим:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)]^i \cdot T^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i \cdot T^i}{i!} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i \cdot T^{i+1}}{(i+1)!} \cdot \mathbf{B} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{G}^{(j)}(T) \cdot T^j}{j!}$$

или

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)]^i T^i}{i!} - \frac{\mathbf{A}^i T^i}{i!} + \frac{\mathbf{A}^i T^{i+1}}{(i+1)!} \cdot \mathbf{B} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{G}^{(j)}(T) T^j}{j!} \right\} = 0.$$

Приравняв в последнем выражении коэффициенты при T в одинаковых степенях, получим:

$$\frac{[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)]^i}{i!} - \frac{\mathbf{A}^i}{i!} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\mathbf{A}^{i-j-1} \mathbf{B}\mathbf{G}^{(j)}(T)}{(i-j)! j!} = 0, \quad (5.31)$$

где $i = 1, 2, \dots$.

Разрешив уравнение (5.31) относительно слагаемого, включающего старшую производную $\mathbf{G}^{(i-1)}(T)$, получим:

$$\frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^{(i-1)}}{(i-1)!} = \frac{\mathbf{A}^i}{i!} - \frac{[\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}(0)]^i}{i!} - \sum_{j=0}^{i-2} \frac{\mathbf{A}^{i-j-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^{(j)}(T)}{(i-j)! j!}. \quad (5.32)$$

Матрица \mathbf{B} в общем случае не квадратная матрица, поэтому для определения старшей производной из уравнения (5.32) применим весовую матрицу \mathbf{H} размерностью $(p \times n)$ с условием невырожденности \mathbf{HB} . Умножая выражение (5.32) на матрицу \mathbf{H} слева и решая полученное уравнение относительно $(i-1)$ -й производной матрицы обратной связи, будем иметь итерационную процедуру для нахождения производных матрицы $\mathbf{G}_W(T)$:

$$\mathbf{G}_W^{(i-1)}(T) = (\mathbf{HB})^{-1} \mathbf{H} \left\{ \frac{\mathbf{A}^i}{i} - \frac{[\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)]^i}{i} - (i-1)! \sum_{j=0}^{i-2} \frac{\mathbf{A}^{i-j-1} \mathbf{BG}_W^{(j)}(T)}{(i-j)! j!} \right\}. \quad (5.33)$$

Результаты вычислений для $i = 1, 2, 3$ по формуле (5.33) приведены в таблице 5.2.

Таблица 5.2

i	$\mathbf{G}_W^{(i-1)}(T)$
1	$\mathbf{G}(0)$
2	$1/2 \mathbf{G}(0) [\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)]$
3	$(\mathbf{HB})^{-1} \mathbf{H} \left[-\frac{1}{6} \mathbf{ABG}(0) [\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)] + \frac{1}{3} \mathbf{BG}(0) [\mathbf{A} - \mathbf{BG}(0)]^2 \right]$

Приведенная таблица позволяет получить нулевое, линейное и квадратичное приближение ряда (5.30):

$$\mathbf{G}_0(T) = \mathbf{G}^{(0)}(T) = \mathbf{G}(0),$$

$$\mathbf{G}_1(T) = \mathbf{G}(0) + \mathbf{T} \mathbf{G}^{(1)}(T),$$

$$\mathbf{G}_2(T) = \mathbf{G}(0) + \mathbf{T} \mathbf{G}^{(1)}(T) + \frac{\mathbf{T}^2}{2} \mathbf{G}^{(2)}(T).$$

Вместо точных матриц можно использовать их приближенные аналоги, то есть матрицы $\mathbf{G}_W^{(0)}(T)$, $\mathbf{G}_W^{(1)}(T)$ и $\mathbf{G}_W^{(2)}(T)$. Из таблицы 5.2 видно, что $\mathbf{G}_W^{(0)}(T)$ и $\mathbf{G}_W^{(1)}(T)$ не зависят от матрицы \mathbf{H} , поэтому приближенные значения $\mathbf{G}(T)$, полученные при нулевом и линейном

приближении, применяются для согласования всех состояний непрерывной и эквивалентной системы.

При увеличении числа членов ряда (5.30), используемого для аппроксимации $\mathbf{G}(T)$, полученное решение будет стремиться к точному значению $\mathbf{G}_W(T)$ по формуле (5.29).

Для согласования состояний в установившемся режиме рассмотрим уравнение (5.24). Эта система уравнений также имеет единственное решение при $p = n$:

$$\mathbf{E}(T) = [\boldsymbol{\theta}(T)]^{-1} \boldsymbol{\theta}_c(T) \mathbf{E}(0),$$

или если ранг матрицы $\boldsymbol{\theta}(T)$ совпадает с рангом расширенной матрицы.

В общем случае для частичного согласования состояний матрица $\mathbf{E}_W(T)$ будет иметь вид:

$$\mathbf{E}_W(T) = [\mathbf{H} \boldsymbol{\theta}(T)]^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}_c(T) \mathbf{E}(0). \quad (5.34)$$

Как и в случае матрицы обратной связи, решение уравнения (5.34) можно представить при разложении $\mathbf{E}(T)$ в ряд Тейлора:

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}^{(j)}(T) T^j}{j!},$$

где $\mathbf{E}^{(j)}(T) = \left. \frac{\partial^j \mathbf{E}}{\partial T^j} \right|_{T=0}.$

Проводя процедуры, аналогичные процедурам при получении формулы (5.33), получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_W^{(i-1)}(T) = (\mathbf{H}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{H} \cdot & \left\{ \frac{[\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}(0)]^{i-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}(0)}{i} - (i-1)! \times \right. \\ & \left. \times \sum_{j=0}^{i-2} \frac{\mathbf{A}^{i-j-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}_W^{(j)}(T)}{(i-j)! j!} \right\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.35)$$

Результаты вычислений по формуле (5.35) для $i = 1, 2, 3$ сведены в таблице 5.3.

Таблица 5.3

i	$\mathbf{E}_W^{(i-1)}(T)$
1	$\mathbf{E}(0)$
2	$-1/2 \mathbf{G}(0) \mathbf{B} \mathbf{E}(0)$
3	$(\mathbf{H}\mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{H} \cdot \left[\frac{\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{G}(0)\mathbf{B}}{6} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{G}(0)[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{G}(0)] \cdot \mathbf{B}}{3} \right] \cdot \mathbf{E}(0)$

Из таблицы 5.3 видно, что при использовании не более двух членов ряда в разложении $\mathbf{E}(T)$ весовая матрица \mathbf{H} не нужна.

В тех случаях, когда применение весовой матрицы \mathbf{H} не только оправдано, но и необходимо, на ее элементы должны быть наложены определенные ограничения. Действительно, рассмотрим уравнение (5.28), в котором заменим матрицу $\mathbf{G}(T)$ на $\mathbf{G}_W(T)$. Получим:

$$\mathbf{H} \mathbf{D}(T) = \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}(T) \cdot \mathbf{G}_W(T).$$

Транспонируем последнее уравнение:

$$\mathbf{D}^T(T) \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{G}_W^T(T) \cdot \boldsymbol{\theta}^T(T) \cdot \mathbf{H}(T)$$

и перепишем его в виде:

$$[\mathbf{D}^T(T) - \mathbf{G}_W^T(T) \cdot \boldsymbol{\theta}^T(T)] \cdot \mathbf{H}^T.$$

Последнее выражение можно рассматривать как систему из n однородных уравнений относительно n строчек матрицы \mathbf{H}^T . Такая система имеет нетривиальное решение, только если выполняется условие равенства нулю определителя матрицы, находящейся в квадратных скобках:

$$|\mathbf{D}^T(T) - \mathbf{G}_W^T(T) \boldsymbol{\theta}^T(T)| = 0$$

или

$$|\mathbf{D}(T) - \boldsymbol{\theta}(T) \mathbf{G}_W(T)| = 0. \quad (5.36)$$

Примечание [ЛВС1]:

Примечание [ЛВС2]:

Таким образом, условие (5.36) гарантирует существование ненулевой матрицы \mathbf{H} , удовлетворяющей соотношению (5.29).

6 АНАЛИЗ ЦИФРОВЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Анализ цифровых систем, как и непрерывных, включает исследование устойчивости, анализ переходных процессов и анализ ошибок.

6.1 Устойчивость дискретных систем

6.1.1 Необходимое и достаточное условие устойчивости

Методы исследования устойчивости цифровых систем, в известном смысле, аналогичны соответствующим методам в теории непрерывных систем.

Рассмотрим, например, систему, заданную уравнением общего вида:

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \dots + b_m r(k). \quad (6.1)$$

Решение уравнения (6.1) состоит, как известно [1], из общего решения однородного разностного уравнения $y_o(k)$ и частного решения неоднородного уравнения (6.1) $y_n(k)$:

$$y(k) = y_o(k) + y_n(k).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $y_o(k)$ интерпретируется как переходная составляющая, а частное решение $y_n(k)$ – как вынужденная (установившаяся) составляющая.

Переходная составляющая представляется в форме:

$$y_o(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + \dots + c_n z_n^k, \quad (6.2)$$

где c_i – постоянные, определяемые начальными (граничными) условиями, а z_i – различные корни характеристического уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z = 0. \quad (6.3)$$

При наличии кратного корня (например, z_1) соответствующая составляющая общего решения имеет вид:

$$y_o(k) = c_1 z_1^k + c_2 k z_1^k + c_3 k^2 z_1^k + \dots + c_r k^{r-1} z_1^k, \quad (6.4)$$

где r – кратность корня z_1 .

Из выражений (6.2), (6.4) ясно, что переходный процесс будет асимптотически затухать (то есть система будет устойчива), если все z_i располагаются внутри окружности единичного радиуса. Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости

линейной цифровой системы, описываемой уравнением (6.1), является условие:

$$|z_i| < 1, i = 1, \dots, n,$$

где z_i – корни характеристического уравнения (6.3).

К тому же выводу относительно устойчивости системы можно прийти, воспользовавшись z -преобразованием. Импульсная передаточная функция системы (6.1) равна:

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m z}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z} \quad (6.5)$$

и представляет отношение дискретных преобразований Лапласа выхода ко входу после замены переменной:

$$z = e^{Ts}. \quad (6.6)$$

Область устойчивости в плоскости s – это левая полуплоскость, которая преобразованием (6.6) переводится в круг единичного радиуса, следовательно, устойчивой будет та и только та система, корни знаменателя передаточной функции которой (6.5) лежат внутри окружности единичного радиуса.

Если система описывается своими уравнениями состояния:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{r}(k),$$

то переходная матрица состояния $\Phi(k) = \mathbf{A}^k$ стремится к нулю при стремлении k к бесконечности, если характеристические числа матрицы \mathbf{A} расположены внутри единичной окружности. При наличии характеристического числа, лежащего на единичной окружности и являющегося простым, при стремлении k к бесконечности $\Phi(k)$ ограничена. Если же имеется характеристическое число вне окружности единичного радиуса или есть кратные характеристические числа, лежащие на единичной окружности, то при стремлении k к бесконечности $\Phi(k)$ неограниченно возрастает. Действительно, согласно теореме Кэли-Гамильтона матрица \mathbf{A}^k определяется выражением:

$$\mathbf{A}^k = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i,$$

где n – размерность матрицы \mathbf{A} , а коэффициенты α_i находятся из уравнений:

$$\lambda_j^k = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda_j^i$$

в случае различных собственных чисел λ_j или из уравнений:

$$\left. \frac{d^p(\lambda^k)}{d\lambda^p} \right|_{\lambda=\lambda_j} = \left. \frac{d^p}{d\lambda^p} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i \right) \right|_{\lambda=\lambda_j}$$

для кратного собственного числа λ_j .

При различных собственных числах элементы переходной матрицы \mathbf{A}^k состоят из линейных комбинаций элементов $(\lambda_j)^k$. Эти элементы стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$, если $|\lambda_j| < 1$, ограничены, если $|\lambda_j| = 1$, и неограниченно возрастают, если $|\lambda_j| > 1$.

При кратных собственных числах элементы переходной матрицы \mathbf{A}^k состоят из линейных комбинаций $k \lambda_j^{k-1}$. Понятно, что при $k \rightarrow \infty$ эти элементы неограниченно возрастают, если $|\lambda_j| \geq 1$, и стремятся к нулю, если $|\lambda_j| < 1$.

Таким образом, для устойчивости системы опять-таки необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0 \quad (6.7)$$

находились бы внутри окружности единичного радиуса.

Непосредственное вычисление корней путем решения уравнений (6.3) или (6.7) нерационально, поэтому, как и в непрерывных системах, для определения устойчивости разработаны соответствующие критерии.

6.1.2 Алгебраические критерии устойчивости

Применять алгебраические критерии непосредственно к характеристическому уравнению (6.3) нельзя, поскольку эти критерии устанавливают условия нахождения корней полинома в левой полуплоскости. Однако, если воспользоваться преобразованием, отображающим круг единичного радиуса в левую полуплоскость, то все алгебраические критерии применимы в неизменном виде. Таким преобразованием является *билинейное преобразование*:

$$z = \frac{1+w}{1-w}. \quad (6.8)$$

Из соотношения (6.8) следует:

$$w = \frac{z-1}{z+1}. \quad (6.9)$$

При движении изображающей точки в z -плоскости по единичной окружности:

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T, \quad n\omega_s \leq \omega \leq (n+1)\omega_s, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

выражение (6.9) принимает вид:

$$w = \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T - 1}{\cos \omega T + j \sin \omega T + 1} = j \cdot \frac{\sin \omega T}{1 + \cos \omega T} = j \cdot \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (6.10)$$

Таким образом, окружность единичного радиуса в плоскости переменной z отображается на мнимую ось переменной w , а внутренность окружности (область устойчивости) соответствует левой полуплоскости.

Пример 6.1. Рассмотрим в качестве примера уравнение первого порядка:

$$a_0 z + a_1 = 0. \quad (6.11)$$

Сделав в уравнении (6.11) замену переменной (6.8), получим:

$$a_0 \frac{1+w}{1-w} + a_1 = 0$$

или

$$a_0 (1+w) + a_1 (1-w) = (a_0 + a_1) w + (a_0 - a_1) = 0. \quad (6.12)$$

Для устойчивости системы согласно достаточному критерию устойчивости (положительность коэффициентов при переменной) требуется, чтобы

$$a_0 + a_1 > 0,$$

$$a_0 - a_1 > 0.$$

Т.о., необходимое и достаточное условие устойчивости линейной непрерывной системы для уравнений первого и второго порядка – положительность коэффициентов – уже не является не только достаточным, но и необходимым для уравнения (6.11) цифровой системы.

6.3.1 Критерий Михайлова

Условием устойчивости дискретной системы, описываемой импульсной передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{Q(z)}{D(z)}, \quad (6.13)$$

является расположение корней знаменателя (6.13) внутри единичной окружности или, что то же самое, корни уравнения:

$$D(z)|_{z=e^{Ts}} = a_0(e^{Ts})^n + a_1(e^{Ts})^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (6.14)$$

должны иметь отрицательные вещественные части. Поскольку корни уравнения (6.14) повторяются (вследствие периодичности функции e^{Ts}), достаточно исследовать только корни в основной полосе частот $\pm \omega_s / 2$.

Представим полином $D(z)$ в виде сомножителей:

$$D(z) = a_0 (z - z_1) (z - z_2) \times \dots \times (z - z_n)$$

и положим:

$$z = e^{j\omega}, \quad (6.15)$$

тогда

$$D(e^{j\omega}) = a_0 (e^{j\omega} - z_1) (e^{j\omega} - z_2) \cdot \dots \cdot (e^{j\omega} - z_n). \quad (6.16)$$

Будем менять частоту ω в выражении (6.16) от $-\pi$ до $+\pi$ и найдем угол поворота вектора $D(e^{j\omega})$. Изменение фазы вектора $D(e^{j\omega})$ будет равно сумме углов поворота сомножителей, входящих в выражение (6.16). Для каждого из таких сомножителей возможны два случая:

а) точка R конца вектора z_i находится внутри окружности единичного радиуса (см. рис. 6.1, а), что соответствует устойчивой переходной составляющей;

б) точка R конца вектора z_i расположена вне окружности единичного радиуса (см. рис. 6.1, б).

В первом случае угол поворота вектора

$$e^{j\omega} - z_i,$$

как видно из рисунка 6.1, а, будет равен 2π , а суммарный угол поворота вектора (6.16) будет равен $2\pi n$.

Во втором случае угол поворота вектора

$$e^{j\omega} - z_i$$

будет равен нулю, поэтому, если в характеристическом полиноме $D(z)$ имеются корни $|z_i| > 1$, то их вклад в общий угол поворота вектора (6.16) будет нулевой и суммарное изменение фазы вектора $D(e^{j\omega})$ будет меньше, чем $2\pi n$.

Переменная s связана с переменной z соотношением $z = e^{Ts}$, поэтому, чтобы получить соотношение (6.15), нужно положить:

$$s = j \frac{\omega}{T},$$

и при $-\pi < \omega < \pi$ вектор s пробегает значения от $-j \frac{\omega_s}{2}$ до $+j \frac{\omega_s}{2}$, а z меняется вдоль окружности единичного радиуса $|z| = 1$. Если при этом угол поворота годографа Михайлова $D(e^{Ts})$ равен $2\pi n$, то система устойчива, если угол поворота кривой Михайлова меньше, чем $2\pi n$, то система является неустойчивой.

Вообще достаточно исследовать годограф Михайлова только для положительных частот $0 < \omega < \pi$, что соответствует $0 < s < j \frac{\omega_s}{2}$, поскольку при отрицательных частотах картина будет симметрична. Суммарный угол поворота при этом должен быть в два раза меньше.

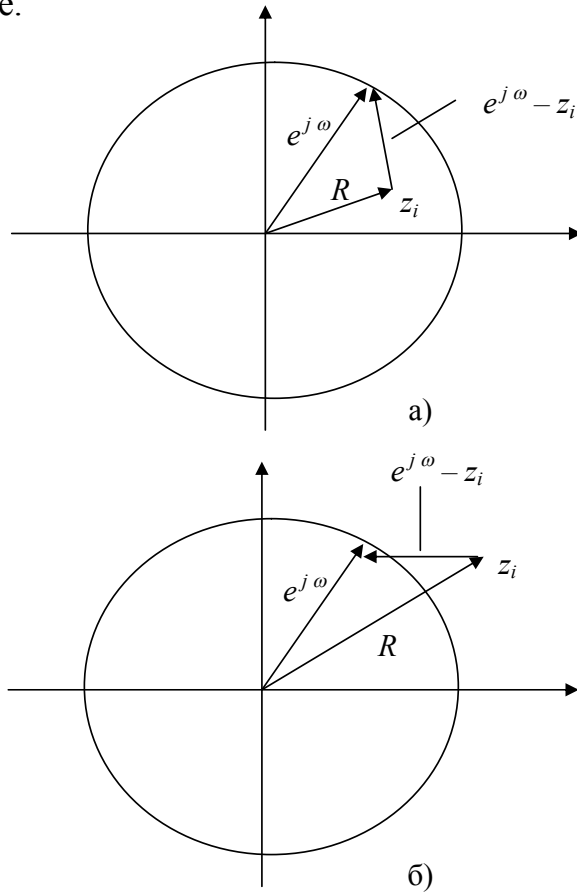
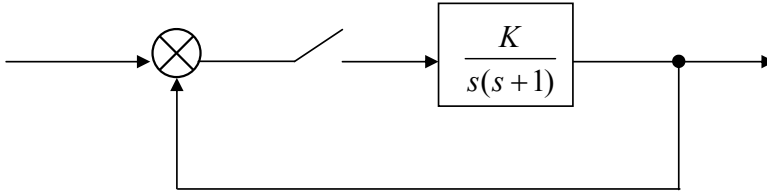


Рисунок 6.1

Таким образом, критерий устойчивости Михайлова для дискретных систем требует, чтобы годограф $D(e^{j\omega})$, определяющийся знаменателем импульсной передаточной функции $W(e^{j\omega})$, начинаясь на положительной действительной полуоси комплексной плоскости, при изменении частоты ω от нуля до $\omega = \pi$ охватывал начало координат, последовательно проходя $2n$ квадрантов, где n – порядок системы.

В отличие от непрерывных систем, годограф Михайлова не уходит в бесконечность, а кончается на действительной оси, проходя при этом в два раза больше квадрантов.

Пример 4.2. Проведем исследование устойчивости системы, представленной на рисунке, с помощью критерия Михайлова.



Составим характеристическое уравнение замкнутой системы. Для этого подсчитаем передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)},$$

где $W(z) = Z\left\{\frac{K}{s(s+1)}\right\}.$

z -передаточную функцию вычислим, как обычно, разложив выражение под знаком z -преобразования на простые дроби:

$$W(z) = Z\left\{\frac{K}{s(s+1)}\right\} = Z\left\{\frac{K}{s} - \frac{K}{s+1}\right\} = \frac{Kz}{z-1} - \frac{Kz}{z-e^{-T}} = \frac{Kz \cdot (1 - e^{-T})}{(z-1) \cdot (z - e^{-T})}.$$

Тогда

$$\Phi(z) = \frac{Kz \cdot (1 - e^{-T})}{(z-1) \cdot (z - e^{-T}) + Kz \cdot (1 - e^{-T})}.$$

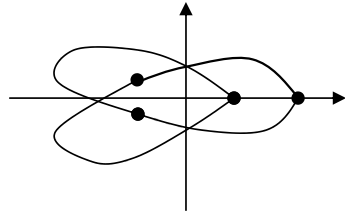
Характеристический полином – это знаменатель последнего выражения:

$$D(z) = (z-1) \cdot (z-e^{-T}) + Kz \cdot (1-e^{-T}).$$

Зададим численное значение $T=1,57$ сек, тогда $e^{-T} \approx 0,2$ и

$$D(z) = 0,8z + (z-1) \cdot (z-0,2).$$

Пусть $K=1$, тогда $D(z) = 0,8z + (z-1)(z-0,2)$. Придавая переменной z значения на окружности единичного радиуса против часовой стрелки, получаем кривую Михайлова.



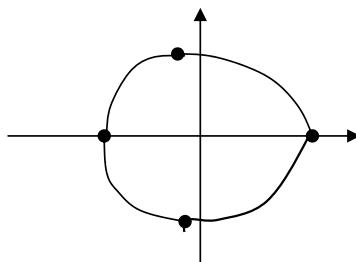
В таблице приведены значения кривой Михайлова для четырех значений z .

z	1	j	-1	$-j$
$D(z)$	0,8	$-0,8-j0,4$	1,6	$-0,8+j0,4$

Видно, что кривая Михайлова совершает два оборота вокруг начала координат против часовой стрелки, а поскольку порядок характеристического полинома равен двум, то и система согласно критерию Михайлова будет устойчивой.

Теперь пусть $K=10$. В этом случае $D(z) = 8z + (z-1)(z-0,2)$. Расчет дает следующую таблицу:

z	1	j	-1	$-j$
$D(z)$	8	$-0,8+j6,8$	-5,6	$-0,8-j6,8$



В данном случае кривая Михайлова совершает только один оборот вокруг начала координат, что свидетельствует о неустойчивости системы.

6.1.4 Критерий Найквиста

Рассмотрим замкнутую систему (рисунок 6.2).

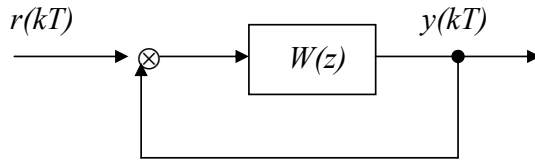


Рисунок 6.2

Как и в случае непрерывной системы, судить об устойчивости замкнутой дискретной системы можно по передаточной функции разомкнутой системы $W(z)$.

При исследовании непрерывной системы переменная s меняется в общем случае по кривой Найквиста Γ_1 (см. рис. 6.3, а), и в зависимости от числа полюсов передаточной функции разомкнутой системы внутри кривой Найквиста (то есть в правой полуплоскости) и от поведения годографа АФЧХ относительно точки $(-1, j0)$ делается вывод об устойчивости замкнутой системы.

Для дискретной системы изменение s в импульсной передаточной функции $W^*(s)$ по тому же контуру не дает ничего конструктивного, поскольку в случае неустойчивой в разомкнутом состоянии системы в правой полуплоскости будет бесконечное число полюсов из-за периодичности $W^*(s)$. Однако в основной полосе частот в правой полуполосе число полюсов по-прежнему будет ограниченным, поэтому, изменяя s по контуру Γ_2 и анализируя поведение кривой $W^*(s)$, можно сделать вывод об устойчивости замкнутой дискретной системы.

Отображение контура Найквиста Γ_2 на z -плоскость приведено на рисунке 6.3, б. Изменение s вдоль мнимой оси соответствует движению изображающей точки по единичной окружности в плоскости z , а изменение s по дуге бесконечного радиуса соответствует

окружности бесконечного радиуса в z -плоскости. Поэтому устойчивость замкнутой системы можно определить по импульсной передаточной функции $W(z)$ разомкнутой системы при изменении z по контуру Найквиста (см. рис. 6.3, б).

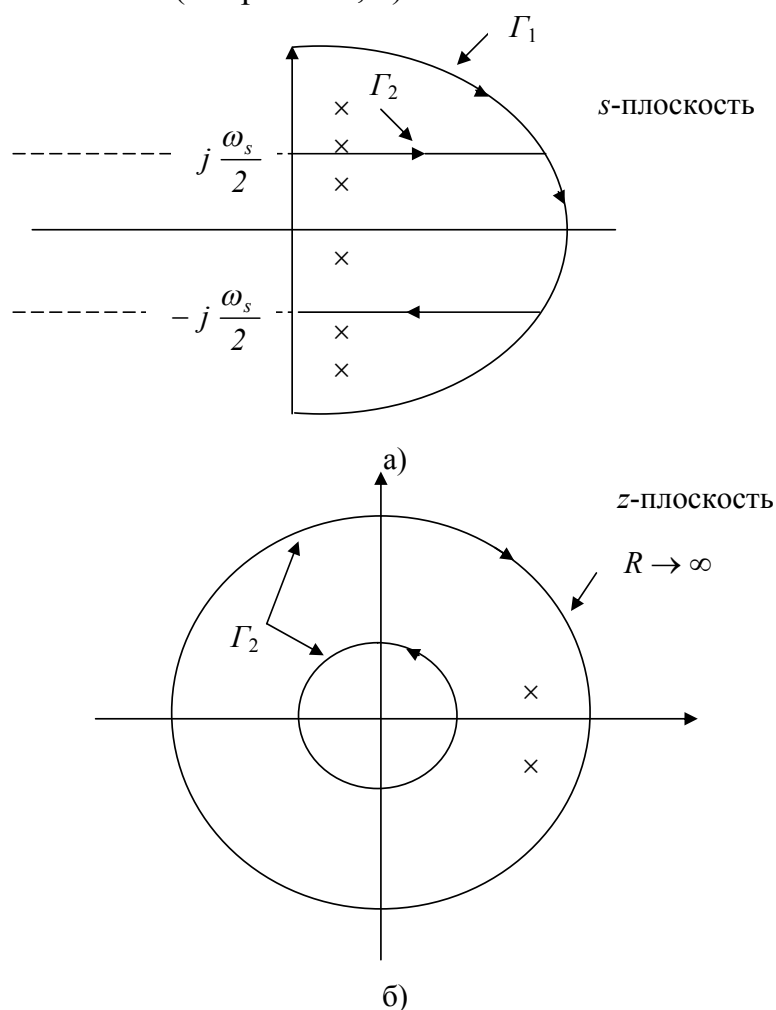


Рисунок 6.3

Передаточная функция замкнутой системы (рис. 6.2) равна:

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)}.$$

Знаменатель этой передаточной функции равен:

$$1 + W(z) = 1 + \frac{Q(z)}{D(z)} = \frac{D(z) + Q(z)}{D(z)}, \quad (6.17)$$

где $D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$,
 $Q(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$.

Числитель выражения (6.17) – это характеристический полином замкнутой системы, а знаменатель – разомкнутой системы. При изменении z вдоль окружности единичного радиуса $|z| = 1$ $D(z)$, согласно критерию Михайлова, получит приращение фазы $2\pi(n - r)$, где r – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, находящихся внутри контура Найквиста (то есть вне единичной окружности), а приращение фазы числителя выражения (6.17) для устойчивости замкнутой системы должно (опять-таки по критерию Михайлова) равняться $2\pi n$. Следовательно, общий угол поворота вектора (6.17) должен равняться:

$$2\pi n - 2\pi(n - r) = 2\pi r. \quad (6.18)$$

При изменении z по дуге бесконечно большого радиуса $|z| = \infty$ имеем:

$$1 + W(z) \Big|_{|z| \rightarrow \infty} = \begin{cases} \frac{a_0 + b_0}{a_0} = \text{const}, & \text{при } m = n, \\ \frac{a_0}{a_0} = 1, & \text{при } m > n, \end{cases}$$

то есть вектор (6.17) в этом случае не вращается.

Выражение (6.17) отличается от импульсной передаточной функции разомкнутой системы $W(z)$ на единицу, поэтому на тот же угол $2\pi r$ должен поворачиваться вектор $W(z)$ ($W^*(s)$) вокруг точки $(-1, j0)$ при изменении $z(s)$ по контуру Найквиста Γ_2 .

Таким образом, формулировки критерия Найквиста для цифровых и непрерывных систем совпадают.

Если разомкнутая система устойчива (то есть $r = 0$), то для устойчивости замкнутой системы годограф $W(z)$ (или $W^*(s)$) вообще не должен охватить точку $(-1, j0)$, а изменение z достаточно производить только вдоль окружности единичного радиуса (соответственно s при этом можно менять от $-j\frac{\omega_s}{2}$ до $+j\frac{\omega_s}{2}$).

Основная трудность применения критерия Найквиста состоит в построении годографа $W(z)$ (или $W^*(s)$). Это построение может быть осуществлено одним из трех нижеизложенных методов.

1. Метод z -преобразования заключается в замене переменной z на $e^{j\omega T}$ в передаточной функции $W(z)$ и изменении ω от $-\omega_s/2$ до $+\omega_s/2$.

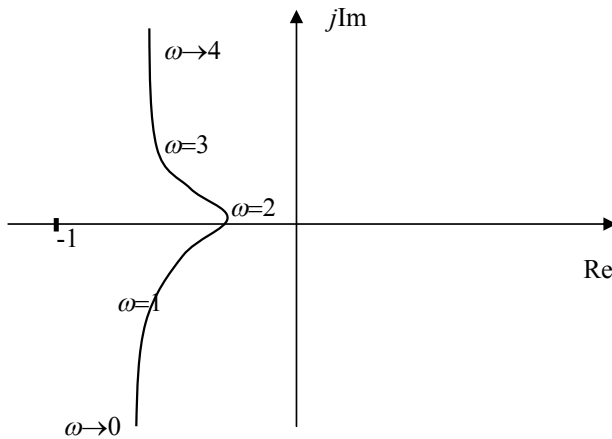
Пример 4.3. Рассмотрим ту же систему, что и в примере 4.2. Передаточная функция разомкнутой системы равна (для $T=0,57$ сек)

$$W(z) = \frac{K \cdot 0,8z}{(z-1)(z-0,8)}.$$

Частотный годограф разомкнутой системы будет равен

$$W(e^{j\omega T}) = \frac{0,8 \cdot e^{j\omega T}}{(e^{j\omega T} - 1)(e^{j\omega T} - 0,2)} = \frac{0,8(\cos\omega T + j\sin\omega T)}{(\cos\omega T + j\sin\omega T - 1)(\cos\omega T + j\sin\omega T - 0,2)}.$$

Поскольку полному обходу по единичной окружности соответствует изменение частоты $-n \frac{\omega_s}{2} \leq \omega \leq n \frac{\omega_s}{2}$, где $n=1,2,\dots$, то в этих интервалах частот годограф $W(e^{j\omega T})$ имеет один и тот же вид. На годографе отмечены только те точки, которые соответствуют отрезку мнимой оси в основной полосе частот.



При $K=1$ годограф $W(e^{j\omega T})$ пересекает отрицательное направление действительной оси в точке $-0,33$; точка $(-1, j0)$ находится

левее, следовательно, не охватывается годографом АФЧХ и замкнутая цифровая система является устойчивой.

При увеличении общего коэффициента усиления K годограф, не меняя своей формы, расширится и указанная кривая охватит критическую точку. Можно показать, что это произойдет при $K > 3$.

2. Метод бесконечного ряда основан на формуле (3.9):

$$W^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W(s + jn\omega_s). \quad (6.19)$$

Для построения годографа АФЧХ производится замена $s = j\omega$, $(-\omega_s/2 < \omega < \omega_s/2)$. Для физически реализуемых систем полоса пропускания ограничена и $|W(s + jn\omega_s)|$ с ростом n уменьшается, поэтому при практическом построении годографа $W^*(s)$ ряд (6.19) ограничивается конечным числом членов.

3. Метод билинейного преобразования использует переход к переменной w по формуле (6.8):

$$z = \frac{1+w}{1-w}.$$

При движении изображающей точки по единичной окружности плоскости z переменная w принимает мнимые значения $w = j\omega_w$, а связь между псевдочастотой ω_w и действительной частотой ω устанавливается, учитывая формулу (6.10), соотношением:

$$\omega_w = \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (6.20)$$

Таким образом, производя в передаточной функции $W(z)$ замену переменной:

$$z = \frac{1 + j\omega_w}{1 - j\omega_w} \quad (6.21)$$

и меняя псевдочастоту ω_w от $-\infty$ до $+\infty$ (или от 0 до ∞ ввиду симметричности картины), получают годограф частотной передаточной функции.

При подобном построении в комплексной плоскости билинейное преобразование преимуществ не дает, но значительно облегчает построение *логарифмических характеристик*, которые как функции

псевдочастоты могут быть построены в виде *асимптотических прямых*.

Из логарифмических псевдочастотных характеристик могут быть получены, в частности, такие показатели качества, как запас устойчивости по амплитуде (по модулю) и по фазе.

6.2 Переходной процесс

Как известно, дискретные преобразования Лапласа входа $R^*(s)$ и выхода $Y^*(s)$ цифровой системы связаны соотношением:

$$Y^*(s) = W^*(s) \cdot R^*(s),$$

где $W^*(s)$ – импульсная передаточная функция системы.

Переходя от изображения $Y^*(s)$ к оригиналу, можно найти процесс $y(nT)$. Оценка реального переходного процесса $y(t)$ по дискретным значениям $y(nT)$ может быть, а может и не быть точной – это определяется периодом квантования и соотношением периода квантования с постоянными времени системы.* Способ непосредственного нахождения переходного процесса $y(nT)$ имеет те же недостатки, что и в непрерывных системах. Поэтому для исследования переходного процесса могут быть применены те же косвенные методы и показатели качества, как и в непрерывных системах: величина перерегулирования, время установления, время нарастания, степень устойчивости, колебательность и так далее. И так же, как и в непрерывных системах, качество переходного процесса может быть исследовано частотными методами, методом корневых годографов, с использованием интегральных оценок.

Возьмем, например, степень устойчивости η , которая определяется удаленностью ближайшего от мнимой оси корня знаменателя передаточной функции. В отличие от непрерывных систем, в цифровых системах имеется принципиальная возможность получения бесконечной степени устойчивости $\eta \rightarrow \infty$. Формально это связано с тем, что при $s_i \rightarrow -\infty$, корни $z_i = e^{s_i T}$ стремятся к нулю. Таким образом, характеристическое уравнение (6.3) принимает вид:

$$a_0 z^n = 0, \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

* Здесь уместно вспомнить еще раз условия импульсной теоремы и эффекты смещения и наложения частот вследствие квантования непрерывного сигнала.

Числитель передаточной функции может быть и не равен нулю, то есть передаточная функция будет равна:

$$W(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n} = \frac{1}{a_0} (b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-n-1} + \dots + b_m z^{-n}). \quad (6.22)$$

Но импульсная передаточная функция $W(z)$ есть z -изображение импульсной переходной (весовой) функции:

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w(kT) z^{-k}. \quad (6.23)$$

При сравнении правых частей выражений (6.22) и (6.23) видно, что весовая функция может иметь не более, чем n первых дискретных отсчетов, не равных нулю. Таким образом, переходной процесс заканчивается спустя конечное время, равное nT . Уменьшая период квантования T , теоретически можно сделать время переходного процесса как угодно малым. И, что самое интересное, система может оставаться в этом случае устойчивой (полюса передаточной функции по-прежнему располагаются внутри окружности единичного радиуса). Однако практическим ограничением здесь выступает невозможность бесконечного увеличения общего коэффициента усиления.

Каким образом добиться конечного времени переходного процесса, будет рассмотрено в разделе, посвященном синтезу цифровых систем.

6.3 Установившийся процесс

Качество установившегося процесса оценивается, как и в непрерывных системах, ошибками в типовых режимах. Последние могут быть определены по теореме о конечном значении.

Рассмотрим, например, систему с квантователем и фиксатором (см. рис. 6.4).

Ошибка $e(t)$ в данном случае определяется как разность входного сигнала и сигнала обратной связи:

$$e(t) = r(t) - z(t).$$

При описании системы с помощью z -преобразования установившаяся ошибка в моменты квантования определяется как:

$$e^*_{уст} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) E(z). \quad (6.24)$$

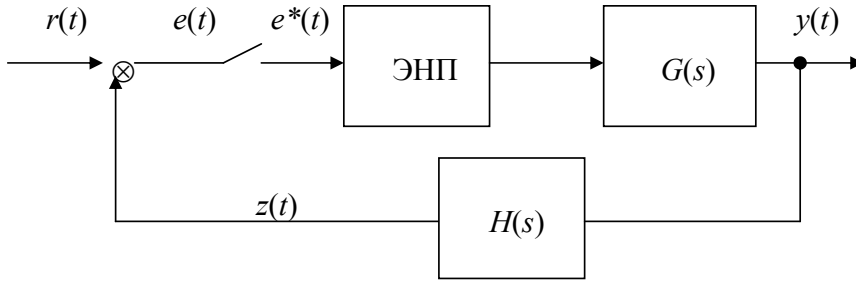


Рисунок 6.4

Согласно структурной схеме рис. 6.4, z -преобразование $E(z)$ вычисляется по формуле:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + GH(z)}, \quad (6.25)$$

где $R(z) = Z\{r(t)\}$, а передаточная функция разомкнутой системы равна:

$$GH(z) = Z\{W_0(s) \cdot G(s) \cdot H(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s) \cdot H(s)}{s}\right\}. \quad (6.26)$$

Подставляя выражение (6.25) в формулу (6.24), получим соотношение:

$$e^*_{y_{cm}} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + GH(z)}, \quad (6.27)$$

которое показывает, что установившаяся ошибка зависит как от свойств системы, так и от задающего входного воздействия.

Известно, что в непрерывных системах ошибка в типовых режимах может быть оценена *добротностями* (для систем с соответствующей степенью астатизма):

а) добротность по положению K_p для статических систем и постоянного входного воздействия $r(t) = R \cdot 1(t)$;

б) добротность по скорости K_v для системы с астатизмом первого порядка и входного воздействия, меняющегося с постоянной скоростью $r(t) = V \cdot t \cdot 1(t)$;

в) добротность по ускорению K_a для системы с астатизмом второго порядка и входного воздействия, меняющегося с постоянным ускорением $r(t) = \frac{At^2}{2}1(t)$;

г) и так далее.

Например, для системы, представленной на рис. 6.4, при условии, что устройство выборки и хранения в ней отсутствует, эти добротности могут быть вычислены по формулам:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \cdot H(s), \quad (6.28)$$

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot G(s) \cdot H(s)], \quad (6.29)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 \cdot G(s) \cdot H(s)], \quad (6.30)$$

а соответствующие установившиеся ошибки – по формулам:

$$\text{а) } e_{уст} = \frac{R}{1 + K_p}, \quad (6.31)$$

$$\text{б) } e_{уст} = \frac{V}{K_V}, \quad (6.32)$$

$$\text{в) } e_{уст} = \frac{A}{K_a}. \quad (6.33)$$

Аналогичным образом дело обстоит и в цифровых системах.

Для постоянного входного воздействия $r(t) = R \cdot 1(t)$ его z -преобразование равно:

$$R(z) = \frac{Rz}{z-1}. \quad (6.34)$$

Подставляя выражение (6.34) в формулу (6.27), получим:

$$e^*_{уст} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{Rz}{(z-1)(1 + GH(z))} = \frac{R}{1 + \lim_{z \rightarrow 1} GH(z)}.$$

Для того чтобы записать полученное выражение в форме (6.31), определим добротность по положению как:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z). \quad (6.35)$$

Тогда:

$$e^*_{уст} = \frac{R}{1 + K_p}. \quad (6.36)$$

Для линейно меняющегося воздействия $r(t) = V \cdot t \cdot 1(t)$ его z -изображение равно:

$$R(z) = \frac{VTz}{(z-1)^2}. \quad (6.37)$$

После подстановки формулы (6.37) в выражение (6.27) имеем:

$$e^*_{ycm} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{VTz}{(z-1)^2 (1 + GH(z))} = \frac{V}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{T} GH(z)}.$$

Определив добротность по скорости как:

$$K_V = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) GH(z), \quad (6.38)$$

получим выражение, совпадающее по форме с соотношением (6.32):

$$e^*_{ycm} = \frac{V}{K_V}. \quad (6.39)$$

Параболическое входное воздействие $r(t) = \frac{At^2}{2} 1(t)$ имеет z -преобразование:

$$R(z) = \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}. \quad (6.40)$$

Подставив выражение (6.40) в соотношение (6.27), найдем установившуюся ошибку:

$$e^*_{ycm} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{AT^2 z(z+1)}{2(z-1)^3 (1 + GH(z))} = \frac{A}{\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{T^2} GH(z)}.$$

Последнее выражение после введения добротности по ускорению согласно выражению

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 GH(z) \quad (6.41)$$

примет вид формулы (6.33):

$$e^*_{ycm} = \frac{A}{K_a}. \quad (6.42)$$

Интересно проследить, влияет ли величина периода квантования T на установившуюся ошибку и каким именно образом? На первый взгляд, такое влияние должно быть, так как в выражениях

для соответствующих добротностей (см., например, формулы (6.38) и (6.41)) присутствует T . Проверим, так ли это.

Пусть передаточная функция разомкнутой непрерывной системы имеет в общем случае вид:

$$G(s) \cdot H(s) = \frac{K(1-d_1^{-1}s)(1-d_2^{-1}s) \cdot \dots \cdot (1-d_m^{-1}s)}{s^r(1-c_1^{-1}s)(1-c_2^{-1}s) \cdot \dots \cdot (1-c_n^{-1}s)}, \quad (6.43)$$

где r – порядок астатизма системы, а d_i и c_j – соответственно нули и полюса передаточной функции (действительные или комплексно сопряженные, но не равные нулю).

Из выражений (6.28)–(6.30) и (6.43) легко видно, что:

а) при постоянном входном воздействии и астатизме нулевого порядка $r = 0$ (статическая система)

$$K_p = K;$$

б) при линейном входном воздействии и астатизме первого порядка $r = 1$

$$K_v = K.$$

в) при параболическом входном воздействии и астатизме второго порядка $r = 2$

$$K_a = K.$$

Рассмотрим теперь цифровую систему с квантователем и экстраполятором нулевого порядка.

Подставляя выражение (6.43) в формулу (6.26) для статической системы ($r = 0$), имеем:

$$GH(z) = (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{K(1-d_1^{-1}s)(1-d_2^{-1}s) \cdot \dots \cdot (1-d_m^{-1}s)}{s(1-c_1^{-1}s)(1-c_2^{-1}s) \cdot \dots \cdot (1-c_n^{-1}s)} \right\}.$$

Разлагая выражение под символом z -преобразования на простые дроби, получим:

$$\begin{aligned} GH(z) &= (1-z^{-1})Z \left\{ \frac{K}{s} + \text{слагаемые с ненулевыми полюсами} \right\} = \\ &= (1-z^{-1}) \left(\frac{Kz}{z-1} + \text{слагаемые с неединичными полюсами} \right). \end{aligned}$$

Для постоянного входного воздействия добротность по положению для такой системы равна:

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{Kz}{z-1} = K.$$

Для системы с астатизмом первого порядка выражение (6.26) будет следующим:

$$\begin{aligned}
 GH(z) &= (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{K(1 - d_1^{-1}s)(1 - d_2^{-1}s) \cdot \dots \cdot (1 - d_m^{-1}s)}{s(1 - c_1^{-1}s)(1 - c_2^{-1}s) \cdot \dots \cdot (1 - c_n^{-1}s)} \right\} = \\
 &= (1 - z^{-1})Z \left\{ \frac{K}{s^2} + \frac{K^1}{s} + \text{слагаемые с ненулевыми полюсами} \right\} = \\
 &= (1 - z^{-1}) \left[\frac{KTz}{(z-1)^2} + \frac{K^1z}{(z-1)} + \text{слагаемые с неединичными полюсами} \right].
 \end{aligned}$$

При линейно меняющемся воздействии получаем согласно формуле (6.38) добротность по скорости:

$$K_V = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)GH(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)(1 - z^{-1}) \left[\frac{KTz}{(z-1)^2} + \frac{K^1z}{(z-1)} \right] = K.$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что добротность по ускорению в системе с астатизмом второго порядка при параболическом входном воздействии будет равна:

$$K_a = K.$$

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать вывод, что поскольку соответствующие добротности в непрерывной и дискретной системах равны, то установившаяся ошибка цифровой системы с квантователем и фиксатором не зависит от периода квантования и определяется только параметрами и структурой непрерывной части и входным воздействием.

7 СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ

7.1 Общие схемы синтеза

Решаемые при синтезе цифровых систем задачи, по сути, идентичны таким же задачам, возникающим при синтезе непрерывных систем.

Под синтезом системы управления в широком смысле понимают такое ее исследование, в результате которого для данных условий работы^{*} находят необходимую структуру системы, параметры ее элементов и способы реализации найденной структурной схемы. Задача синтеза – всегда задача на оптимум, но подобрать сложный критерий, как правило, невозможно. Поэтому решать общую задачу синтеза, как строгую математическую задачу по поиску экстремума некоторого критерия, практически невозможно. Существуют более простые постановки задачи синтеза.

Синтез можно трактовать как инженерную задачу, сводящуюся к такому построению системы, при котором обеспечивается выполнение технических требований к ней. Иногда в понятие инженерного синтеза вкладывают еще более узкий смысл и рассматривают синтез, имеющий целью определение вида и параметров корректирующих средств, которые необходимо добавить к некоторой неизменяемой части системы,^{**} чтобы обеспечить требуемые динамические качества и заданную точность. Именно это и будем в дальнейшем вкладывать в понятие синтеза.

В отличие от непрерывных систем, синтез цифровых систем является гораздо более гибким и многовариантным. Например, система будет описываться как цифровая, если в ней применен цифровой или импульсный датчик, либо сам объект имеет дискретную природу. Возможен случай, когда в системе специально применен

^{*} Сюда входят заданный объект управления, возможный класс задающих и возмущающих воздействий, ограничения на время работы, требуемая точность, необходимое качество переходных процессов и так далее, включая стоимость эксплуатации и проектирования.

^{**} К неизменяемой части системы относят прежде всего сам объект управления, а также связанные с объектом и поэтому определяемые им исполнительные устройства, датчики, возможно, некоторые промежуточные элементы – усилители, преобразователи и т.п.

цифровой регулятор. Если цифровой сигнал сгладить экстраполятором, то возможно применение и аналогового регулятора.

Из великого множества различных вариантов структурных схем цифровых систем рассмотрим наиболее часто встречающиеся схемы, приведенные на рисунке 7.1–7.4. Рисунок 7.1 представляет цифровую систему с аналоговым регулятором в канале ошибки. Квантователь, как и ранее, символизирует дискретный характер сигнала в цифровой системе, а экстраполятор нулевого порядка с передаточной функцией $W_0(s)$ необходим для фильтрации дискретного сигнала перед поступлением последнего на аналоговый регулятор.

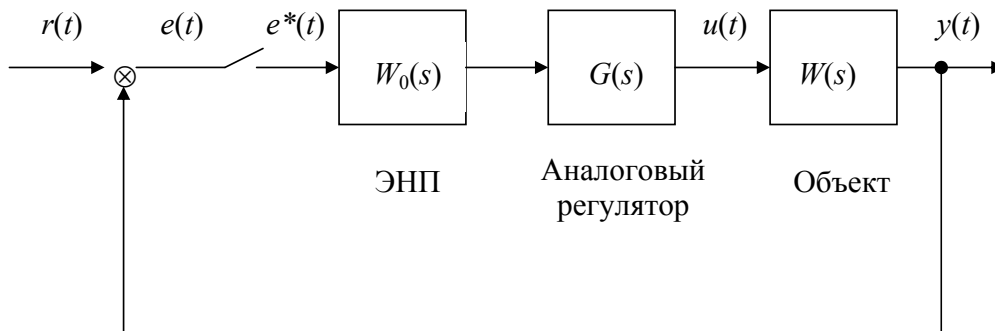


Рисунок 7.1

На рисунке 7.2 представлена структурная схема системы с цифровым регулятором в канале ошибки.

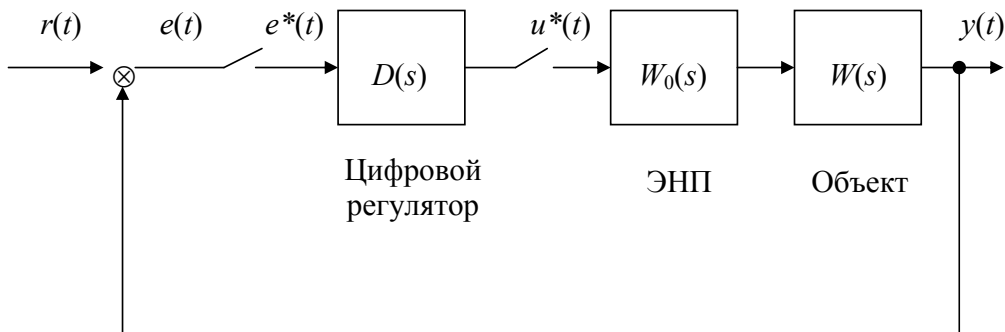


Рисунок 7.2

Еще один пример применения аналогового регулятора приведен на рисунке 7.3. Здесь аналоговый регулятор включен в цепь местной обратной связи.

Если на структурной схеме рисунка 7.3 заменить аналоговый регулятор цифровым, получим схему, изображенную на рисунке 7.4.

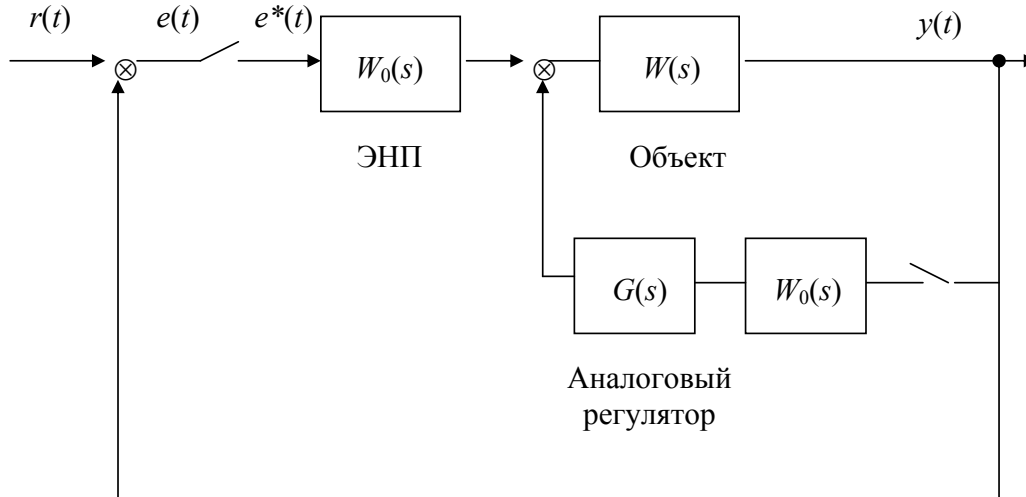


Рисунок 7.3

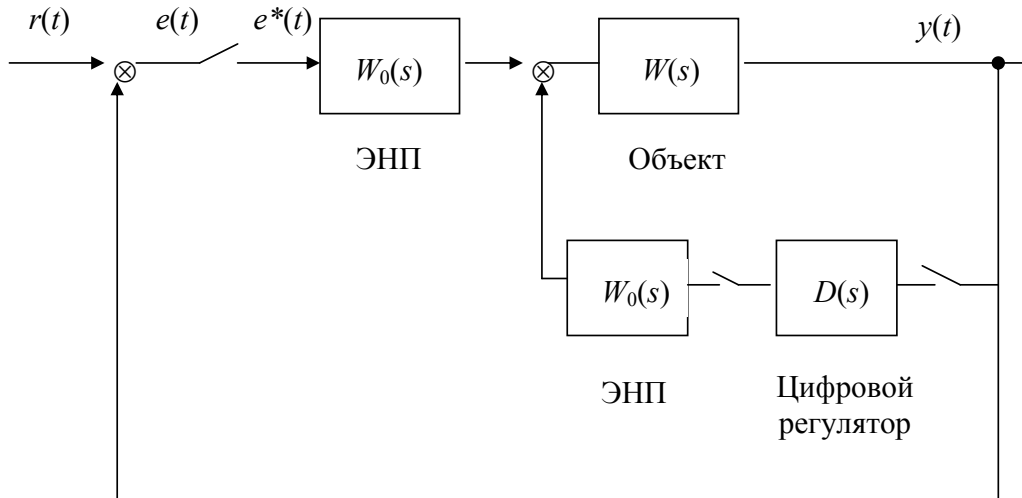


Рисунок 7.4

Описание цифровой системы уравнениями состояния позволяет применить такое мощное средство синтеза, как обратная связь по состоянию. В случае, если все переменные состояния измеримы, структурная схема цифровой системы будет иметь вид, изображенный на рисунке 7.5. Управление по состоянию осуществляется с помощью матрицы \mathbf{G} в обратной связи.

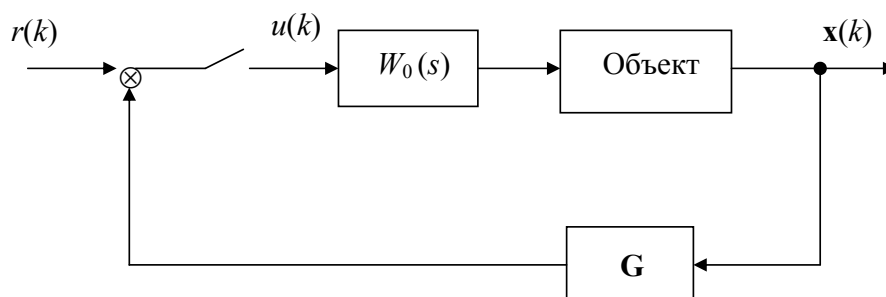


Рисунок 7.5

Не всегда переменные состояния могут быть непосредственно измерены. В этом случае приходится восстанавливать переменные состояния по измерениям выхода, то есть в структуре системы появляется необходимость использовать наблюдателя (рис.7.6) либо применять обратную связь по выходу (рис.7.7).

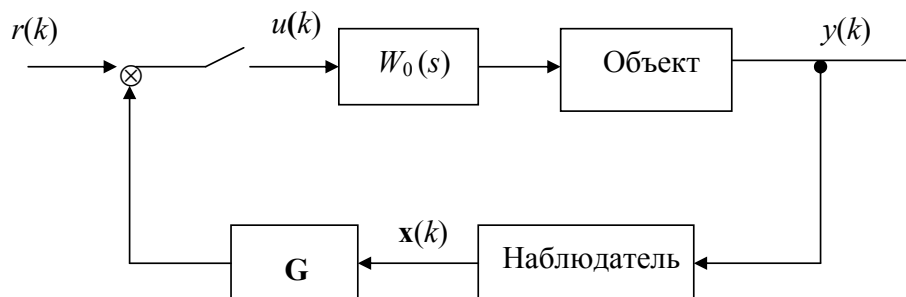


Рисунок 7.6

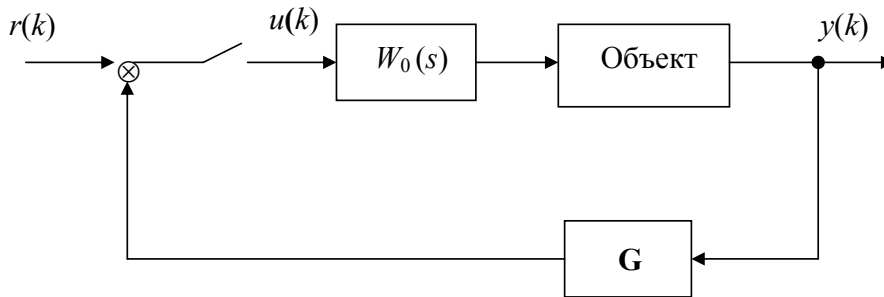


Рисунок 7.7

Обычно число входных переменных меньше, чем переменных состояния, поэтому, с точки зрения эффективности управления, синтез с использованием схем, представленных на рисунках 7.5 и 7.6, предпочтительнее, чем с помощью схемы, изображенной на рисунке 7.7.

Разумеется, успешность синтеза системы в пространстве состояний предполагает, что система является полностью управляемой и наблюдаемой.

7.2 Синтез последовательного аналогового регулятора

Структурная схема системы для данного случая приведена на рисунке 7.1. Передаточная функция разомкнутой системы будет равна:

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = Z\{W_0(s) \cdot G(s) \cdot W(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s) \cdot W(s)}{s}\right\}. \quad (7.1)$$

В результате синтеза требуется определить физически реализуемую передаточную функцию регулятора $G(s)$, обеспечивающего заданные показатели качества цифровой системы. Как видно из выражения (7.1), z -преобразование необходимо брать от произведения передаточной функции регулятора и объекта управления, поэтому нельзя независимо исследовать влияние только регулятора. В этом и состоит основная трудность.

Рассмотрим возможные методы синтеза для такого случая.

7.2.1 Аппроксимация УВХ звеном постоянного запаздывания

Суть метода заключается в замене устройства выборки и хранения звеном постоянного запаздывания. Такая замена является приближенной и возможна при определенных ограничениях.

Рассмотрим частотную передаточную функцию экстраполятора нулевого порядка. Согласно выражению (2.42) она равна:

$$W_0(j\omega) = T \frac{\sin \pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)} e^{-j\pi(\omega/\omega_s)}.$$

С учетом этого, а также формулы (2.30) импульсную частотную передаточную функцию разомкнутой системы (рис.7.1) представим в виде

$$\begin{aligned} W_0 G W^*(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_0(j\omega + jn\omega_s) \cdot G(j\omega + jn\omega_s) \cdot W(j\omega + jn\omega_s) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)} e^{-j(\omega + n\omega_s)T/2} \cdot G(j\omega + jn\omega_s) \cdot W(j\omega + jn\omega_s). \end{aligned} \quad (7.2)$$

В реальных системах спектр $W(j\omega)$ ограничен, поэтому, если частота квантования ω_s достаточно большая, в сумме (7.2) можно ограничиться только одним слагаемым при $n = 0$. Кроме того, на относительно низких частотах (ω / ω_s мало) отношение $\frac{\sin \pi(\omega/\omega_s)}{\pi(\omega/\omega_s)}$

близко к единице и выражение (7.2) принимает вид:

$$W_0 G W^*(j\omega) \approx G(j\omega) \cdot W(j\omega) \cdot e^{-j\omega T/2}, \quad (7.3)$$

то есть отличается от частотной передаточной функции непрерывной системы множителем $e^{-j\omega T/2}$, соответствующим звену чистого запаздывания. Это запаздывание, согласно выражению (7.3), равно половине периода квантования.

Таким образом, рассматриваемый метод сводится к приближенной замене исходной цифровой системы на эквивалентную непрерывную систему (см. рис.7.8), к которой непосредственно могут применяться методы синтеза, разработанные для непрерывных систем.

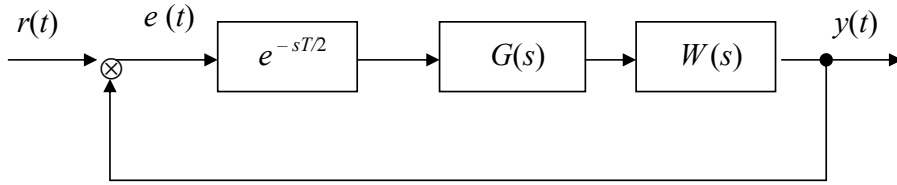


Рисунок 7.8

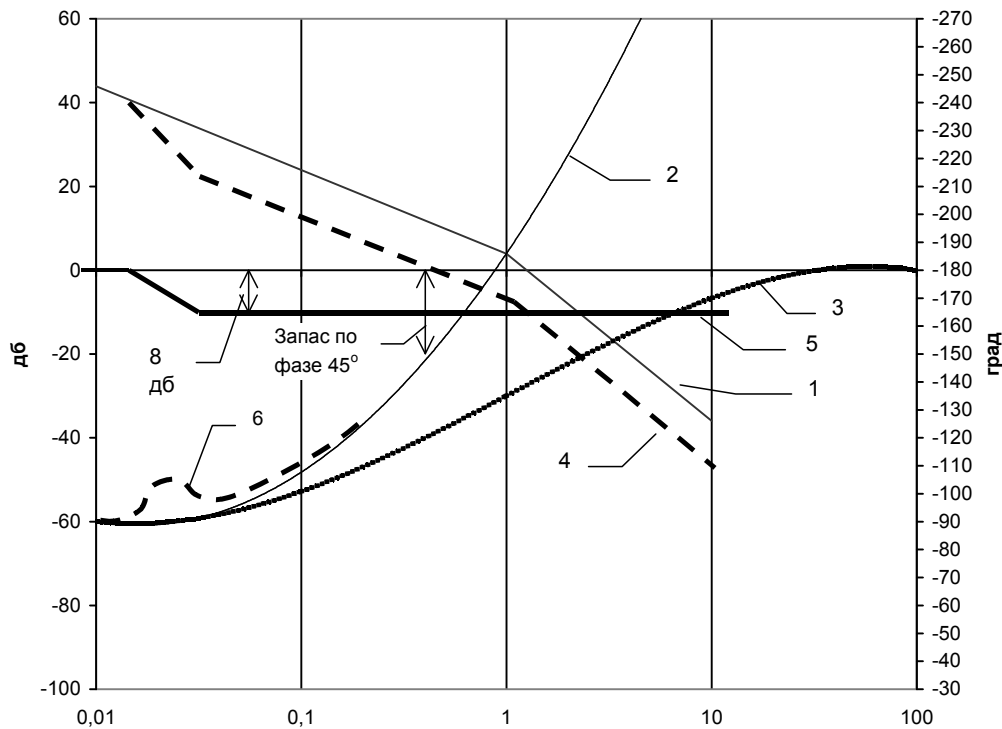
Пример 7.1. Рассмотрим систему управления, изображенную на рис. 7.1. Пусть объект управления задан передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K}{s(s+1)}. \text{ Для простоты вычислений положим } K=1,57; T=1,57$$

с. В соответствии с рассматриваемым методом заменим устройство выборки и хранения на звено постоянного запаздывания и составим передаточную функцию разомкнутой системы для нескорректированной системы, т.е. полагая вначале, что $G(s) = 1$:

$$W_0 W(s) = e^{-Ts/2} \cdot \frac{K}{s(s+1)} = e^{-0,78s} \cdot \frac{1,57}{s(s+1)}.$$

Логарифмические частотные характеристики для полученной передаточной функции изображены на рисунке, из которого видно, что запас устойчивости по фазе близок к нулю. Точное построение характеристик даст запас по фазе около 15° (на рисунке не показано). Это говорит о том, что аппроксимация УВХ звеном постоянно-го запаздывания дает худшую оценку запаса устойчивости (это характерно не только для данного примера). Помимо этого, точная фазовая характеристика претерпевает разрыв в точке $\omega = \omega_s = 4$ рад/с, обусловленный изменением знака у множителя $\frac{\sin \omega T / 2}{\omega T / 2}$, в то время как построенная характеристика такого разрыва не имеет.



1 – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика нескорректированной системы;

2 – фазово-частотная характеристика нескорректированной системы;

3 – фазово-частотная характеристика для $\frac{1}{s(s+1)}$;

4 – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика системы с коррекцией;

5 – логарифмическая амплитудно-частотная характеристика корректирующего звена (пассивного интегрирующего звена);

6 – фазово-частотная характеристика системы с коррекцией.

Скорректируем систему, введя аналоговый регулятор, с тем, чтобы добиться запаса устойчивости по фазе 45° (для непрерывных систем этого бывает достаточно, чтобы обеспечить приемлемое качество переходного процесса). Для этой цели можно предложить

пассивное интегрирующее звено (звено, подавляющее высокие частоты) с передаточной функцией $G(s) = \frac{1 + a\tau s}{1 + \tau s}$, где $a < 1$. Из логарифмических характеристик видно, что требуемый запас устойчивости по фазе можно обеспечить, если изменить частоту среза с 1 на 0,5 рад/с. Учитывая, что введенное звено неизбежно внесет дополнительный фазовый сдвиг в результирующую фазовую характеристику, возьмем частоту среза чуть меньше, например, 0,4 рад/с. На этой частоте усиление, согласно логарифмической амплитудной характеристике, равно приблизительно 8 дБ. Поэтому регулятор должен на этой частоте обеспечивать подавление сигнала на 8 дБ, следовательно, должно выполняться условие

$$20 \lg a = -8 \text{ дБ}.$$

Из этого условия находим $a = 10^{-8/20} = 10^{-0,4} = 0,4$. Это значение фиксирует расстояние между точками излома (сопрягающими частотами) ЛАХ пассивного корректирующего звена. Чтобы фазовая характеристика корректирующего звена не вносила бы значительные искажения в результирующую фазовую характеристику всей системы, правый излом ЛАХ корректирующего звена целесообразно взять примерно на порядок меньше новой частоты среза ЛАХ скорректированной системы, т.е.

$$\omega_2 = \frac{1}{a\tau} = \frac{0,4}{10} = 0,04 \text{ рад/с}.$$

Из этого условия сразу же определится и частота левого излома ЛАХ регулятора:

$$\omega_1 = \frac{1}{\tau} = 0,04a = 0,016 \text{ рад/с}.$$

Осталось подставить найденные значения a и τ в передаточную функцию регулятора:

$$G(s) = \frac{1 + 25s}{1 + 62,5s}.$$

По логарифмическим характеристикам скорректированной системы видно, что запас устойчивости по фазе действительно стал равен 45° .

Для проверки качества синтезированной данным методом системы необходимо подставить найденную передаточную функцию

регулятора в цифровую систему, изображенную на рис. 7.1, и оценить качество переходных процессов в такой системе. Дискретная передаточная функция разомкнутой системы будет равна:

$$W(z) = Z\{W_0(s) \cdot G(s) \cdot W(s)\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{0,628 \cdot (s + 0,04)}{s^2(s + 1)(s + 0,016)}\right\} =$$

$$= \frac{2,667z^2 - 0,815z - 0,172}{(z - 1)(z - 0,208)(z - 0,984)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы примет вид

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{2,667z^2 - 0,815z - 0,172}{z^3 + 0,475z^2 + 0,549z - 0,377}.$$

Не производя вычислений, по первому слагаемому в числителе уже видно, что величина перерегулирования не меньше, чем 2,667. Анализ переходного процесса показывает, что он будет сильно колебательным, хотя и затухающим. Поэтому можно сделать вывод, что в данном случае запас устойчивости по фазе в 45° не является адекватной оценкой качественного переходного процесса.

Приведенный пример показывает, что аппроксимация УВХ звеном постоянного запаздывания может таить в себе некоторые подводные камни и не всегда приводит к качественным результатам.

7.2.2 Использование билинейного преобразования

Для синтеза аналогового регулятора в цифровой системе (рис. 7.1) может быть применен хорошо разработанный для непрерывных систем метод, основанный на логарифмических характеристиках. Необходимо только от переменной z перейти в псевдочастотную область с помощью билинейного преобразования (6.21):

$$z = \frac{1 + j\omega_w}{1 - j\omega_w}.$$

Этот метод является точным, то есть не связан с аппроксимацией УВХ, и имеет все преимущества частотных методов исследования систем.

Можно выделить следующие основные этапы синтеза.

1. Нахождение передаточной функции разомкнутой системы без регулятора:

$$W_0W(w) = W_0W(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \quad (7.4)$$

2. Построение логарифмических псевдочастотных характеристик после подстановки в выражение (7.4) $w = j\omega_w$. По полученным характеристикам можно оценить запасы устойчивости по модулю и по фазе, степень колебательности, полосу пропускания и прочее, то есть оценить динамические качества нескорректированной системы.

3. При необходимости коррекции системы передаточную функцию $W_0W(w)$ умножают на передаточную функцию регулятора $G'(w)$ с целью изменения формы логарифмических характеристик в соответствии с требуемыми показателями качества. Так же, как и в непрерывных системах, регулятор с передаточной функцией $G'(w)$ может различным образом влиять на частотные характеристики системы: либо вносить отрицательный фазовый сдвиг в некоторой полосе псевдочастот (аналог пассивного интегрирующего звена в s -области), либо вносить положительный фазовый сдвиг (аналог пассивного дифференцирующего звена), либо и то и другое (аналог пассивного интегро-дифференцирующего звена).

4. После того как определена передаточная функция разомкнутой скорректированной системы $G'(w)W_0W(w)$, необходимо перейти к переменной s , то есть найти $G(s) \cdot W_0(s) \cdot W(s)$.

Имеем:

$$G'(w)W_0W(w) = GW_0W(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = (1 - z^{-1})Z \cdot \left\{ \frac{G(s) \cdot W(s)}{s} \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}}. \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) можно переписать в следующем виде:

$$Z \left\{ \frac{G(s) \cdot W(s)}{s} \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{w+1}{2w} G'(w)W_0W(w). \quad (7.6)$$

Для определения $G(s) \cdot W(s)/s$ правую часть соотношения (7.6) разлагают на простые дроби и по существующим таблицам, устанавливающим связь преобразования Лапласа, z -преобразования и w -преобразования, находят соответствующие слагаемые в s -области.

5. Из полученного выражения $G(s) \cdot W(s)/s$ легко можно определить передаточную функцию аналогового регулятора $G(s)$. Единственная трудность, которая при этом может встретиться, – это несоответствие между количеством нулей в s - и w -плоскостях, вследствие чего передаточная функция регулятора $G(s)$ часто бывает физически нереализуемой, так как содержит нулей больше, чем полюсов. Для исправления ситуации в передаточную функцию $G(s)$ добавляют необходимое количество удаленных от мнимой оси действительных отрицательных полюсов, которые особого влияния на показатели качества системы не оказывают.

6. По передаточной функции регулятора подбирается соответствующая структурная схема и определяются ее параметры.

7. На последнем этапе, как и при любом другом методе синтеза, осуществляется анализ полученной системы в целом с целью проверки соответствия показателей ее качества техническому заданию.

Пример 7.2. Рассмотрим ту же систему, что и в примере 7.1. Запишем дискретную передаточную функцию разомкнутой системы без коррекции:

$$Z\{W_0(s) \cdot W(s)\} = Z\left\{\frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K}{s(s+1)}\right\} = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{1,57}{s^2(s+1)}\right\} = \frac{1,22(z + 0,598)}{(z - 1)(z - 0,208)}.$$

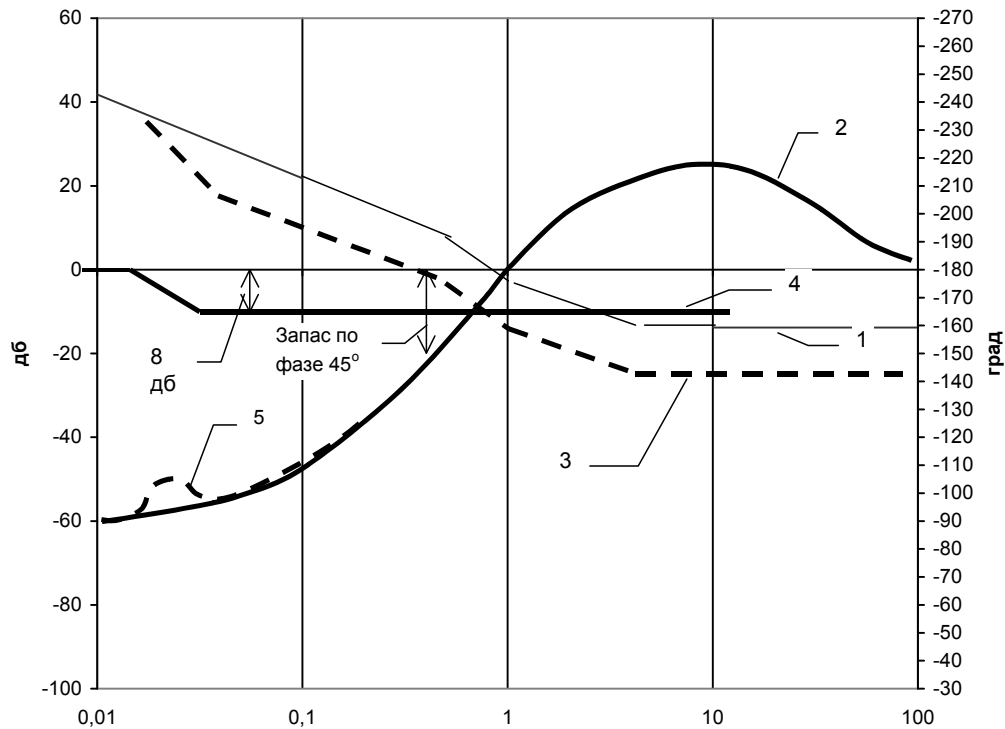
Применяя билинейное преобразование, переходим к переменной w :

$$W_0W(w) = W_0W(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{1,2(1 + 0,25w)(1 - w)}{w(1 + 1,5w)}.$$

Логарифмические псевдочастотные характеристики для полученной передаточной функции приведены на рисунке. По этим характеристикам видно, что псевдочастота среза близка к 1 и запас устойчивости системы очень мал.

Для получения запаса устойчивости по фазе в 45° изменим псевдочастоту среза с 1 до 0,4. Для этого нужно опустить ЛАХ в окрестности точки $\omega_w=1$ на 8 дБ. По-прежнему применяем пассивное интегрирующее звено, как и в примере 7.1, но уже в области переменной w с передаточной функцией

$$G'(w) = \frac{1 + a\tau w}{1 + \tau w}.$$



1 – логарифмическая амплитудно-псевдочастотная характеристика нескорректированной системы;

2 – фазово-псевдочастотная характеристика нескорректированной системы;

3 – логарифмическая амплитудно-псевдочастотная характеристика системы с коррекцией;

4 – логарифмическая амплитудно-псевдочастотная характеристика корректирующего звена (аналог пассивного интегрирующего звена);

5 – фазово-псевдочастотная характеристика системы с коррекцией.

Используя результаты предыдущего примера, получаем передаточную функцию регулятора в виде

$$G'(w) = \frac{1 + 25w}{1 + 62,5w}.$$

Разомкнутая система с коррекцией будет иметь передаточную функцию в области переменной w

$$G'(w) \cdot W_0 W(w) = \frac{1,2(1 + 0,25w)(1 - w)(1 + 25w)}{w(1 + 1,5w)(1 + 62,5w)}.$$

К переменной z перейдем с помощью замены $w = \frac{z-1}{z+1}$:

$$W(z) = W_0 G W(z) = G'(w) \cdot W_0 W(w) \Big|_{w=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0,5(z - 0,92)(z + 0,6)}{(z - 0,97)(z - 1)(z - 0,208)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$\Phi(z) = \frac{W(z)}{1 + W(z)} = \frac{0,5z^2 - 0,16z - 0,276}{z^3 - 1,68z^2 + 1,22z - 0,477}.$$

Если построить по данной передаточной функции переходный процесс, то он будет значительно лучше, чем переходный процесс в системе из предыдущего примера.

Осталось определить передаточную функцию аналогового регулятора $G(s)$. Для этого воспользуемся соотношением (7.6):

$$\begin{aligned} Z \left\{ \frac{G(s) \cdot W(s)}{s} \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} &= \frac{w+1}{2w} \cdot G'(w) \cdot W_0 W(w) = \\ &= \frac{w+1}{2w} \cdot \left[\frac{1,2(1 + 0,25w)(1 - w)(1 + 25w)}{(z - 0,97)(z - 1)(z - 0,208)} \right]. \end{aligned}$$

При разложении на простые дроби выражения, стоящего в квадратных скобках последнего соотношения, необходимо учитывать, что функция

$\frac{W(s)}{s} = \frac{K}{s^2(s+1)}$ имеет два нулевых полюса, а

члену $1/s^2$ в таблице w -преобразований соответствует выражение, имеющее в числителе член $(1+w)(1-w)$. Чтобы не потерять этот множитель, на простые дроби нужно раскладывать выражение $\frac{G'(w) \cdot W_0 W(w)}{1-w}$. В этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{G'(w) \cdot W_0 W(w)}{1-w} &= \frac{1,2(1 + 0,25w)(1 + 25w)}{w(1 + 1,5w)(1 + 62,5w)} = \frac{0,08(w + 4)(w + 0,04)}{w(w + 0,666)(w + 0,016)} = \\ &= \frac{1,2}{w} - \frac{0,4}{w + 0,666} - \frac{0,73}{w + 0,016}. \end{aligned}$$

Учитывая полученный результат, выражение $Z\left\{\frac{G(s) \cdot W(s)}{s}\right\}$

можно представить в виде:

$$Z\left\{\frac{G(s) \cdot W(s)}{s}\right\}\bigg|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = \frac{1,2(1+w)(1-w)}{2w^2} - \frac{0,6(1+w)(1-w)}{2w(1+1,5w)} - \frac{45,6(1+w)(1-w)}{2w(1+62,5w)}.$$

Теперь подбираем каждому слагаемому соответствующую пару согласно таблице w -преобразований и записываем результат:

$$\frac{G(s) \cdot W(s)}{s} = \frac{1,53}{s^2} - \frac{0,6}{s(s+1)} - \frac{2235}{s(s+0,0204)} = \frac{0,031 - 2234s - 2235s^2}{s^2(s+1)(s+0,0204)}.$$

С учетом передаточной функции объекта управления получаем

$$G(s) = \frac{0,2 - 1423s - 1424s^2}{s + 0,0204}.$$

Как и было обещано, передаточная функция регулятора получилась физически нереализуема (степень числителя превышает степень знаменателя). Чтобы все-таки получить физически реализуемый регулятор, добавим в передаточную функцию два удаленных от мнимой оси полюса, например, $s = -10$. При этом, чтобы не изменить общий коэффициент передачи системы, передаточную функцию регулятора надо умножить на $100/(s+10)^2$. Окончательно передаточная функция регулятора будет равна

$$G(s) = \frac{20 - 142300s - 142400s^2}{(s + 0,0204)(s + 10)^2}.$$

7.3 Синтез аналогового регулятора в цепи обратной связи

Рассмотрим коррекцию цифровой системы с аналоговым регулятором в цепи обратной связи на примере системы, представленной на рисунке 7.9.

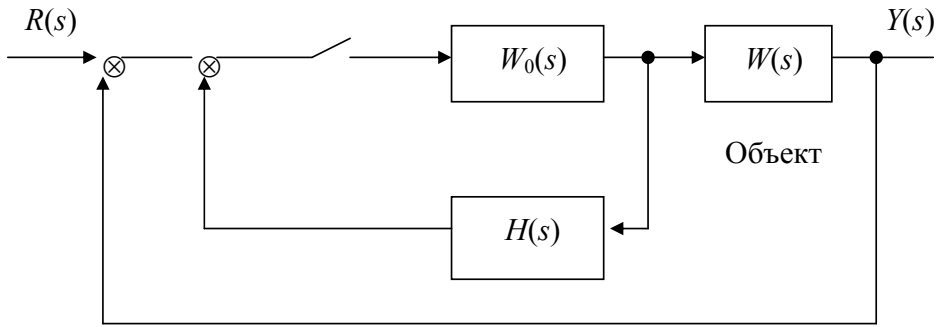


Рисунок 7.9

Вернемся к системе с цифровым последовательным регулятором (см. рис. 7.10).

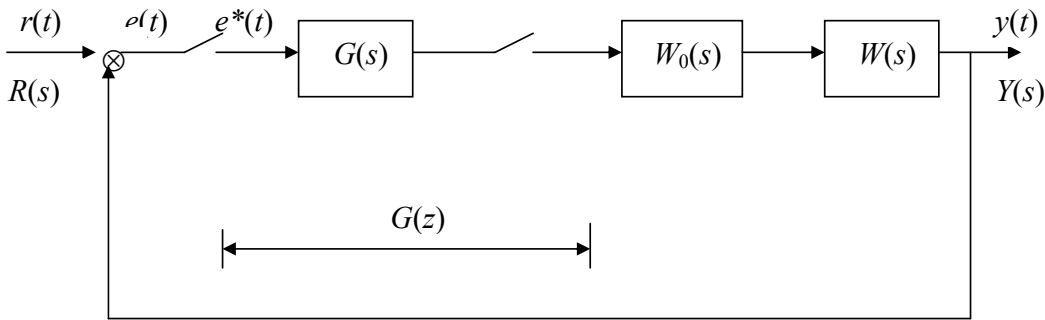


Рисунок 7.10

Предполагая, что передаточная функция цифрового последовательного регулятора $G(z)$ найдена (этот вопрос будет рассмотрен в разделе 7.4), получим соотношение, позволяющее определить передаточную функцию $H(s)$ аналогового регулятора в цепи обратной связи (см. рис. 7.9), из условия эквивалентности систем, представленных на рисунке 7.9 и 7.10. Передаточные функции этих систем равны соответственно:

$$\Phi_1(z) = \frac{GW_0W(z)}{1 + W_0H(z) + W_0W(z)}, \quad (7.7)$$

и

$$\Phi_2(z) = \frac{G(z) \cdot W_0 W(z)}{1 + G(z) \cdot W_0 W(z)}. \quad (7.8)$$

Приравнивая передаточные функции (7.7) и (7.8) и решая полученное уравнение относительно $W_0 H(z)$, имеем:

$$W_0 H(z) = \frac{1 - G(z)}{G(z)}$$

или, с учетом передаточной функции экстраполятора нулевого порядка $W_0(s)$,

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1 - G(z)}{G(z)}. \quad (7.9)$$

Формула (7.9) позволяет по известной передаточной функции цифрового регулятора $G(z)$ найти передаточную функцию $H(s)$ для эквивалентной системы.

Осталось обсудить условия физической реализуемости полученной передаточной функции $H(s)$, другими словами, какими свойствами должна обладать передаточная функция $G(z)$, чтобы передаточная функция $H(s)$, полученная по формуле (7.9), описывала физически реализуемое устройство (звено). Если физически реализуема функция $H(s)$, то реализуема и $H(s)/s$, а следовательно, разложение $Z\{H(s)/s\}$ в ряд по степеням z не содержит положительных степеней z . Представим $Z\{H(s)/s\}$ в виде:

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{\sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}, \quad (7.10)$$

где m и n – целые положительные числа, а условие физической реализуемости – это $a_0 \neq 0$ при $b_0 \neq 0$.

Приравнивая правые части выражений (7.9) и (7.10) и решая полученное уравнение относительно $G(z)$, имеем:

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^n a_k z^{-k} + (1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^m b_k z^{-k}}. \quad (7.11)$$

Таким образом, для физической реализуемости регулятора в обратной связи $H(s)$ необходимо, чтобы свободный член числителя $G(z)$ не был равен нулю $a_0 \neq 0$ (при $b_0 \neq 0$).

При реализации $H(s)$ в виде конкретного звена желательно было бы обеспечить еще и возможно более простое схемное решение, например, в виде RC -схемы. В этом случае на полюсы передаточной функции $H(s)$ накладывается дополнительное условие – они должны быть простыми и отрицательными (не комплексными). Представим $H(s)/s$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{s - s_k},$$

где A_0 и A_k – вычеты раскладываемой функции в соответствующих полюсах, s_k – простые отрицательные полюсы.

Применив z -преобразование к последнему выражению, получим:

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{A_0 z}{z-1} + \sum_{k=0}^n \frac{A_k z}{z - e^{s_k T}}. \quad (7.12)$$

Видно, что $Z\{H(s)/s\}$ имеет один полюс $z = 1$, а все остальные полюсы являются простыми, положительными и меньше единицы.

Анализируя выражение (7.11), замечаем, что $G(z)$ имеет одинаковое количество нулей и полюсов, а сравнивая формулы (7.11) и (7.10), видим, что полюсы $H(s)$ обусловлены нулями $G(z)$.

Резюмируя вышеизложенное, делаем вывод, что для реализации $H(s)$ в виде RC -схемы необходимо, чтобы:

- а) передаточная функция $G(z)$ имела одинаковое число нулей и полюсов;
- б) нули $G(z)$ были простыми, действительными, положительными и меньше единицы;
- в) полюсы $G(z)$ могут быть произвольными.

Пример 7.3. Рассмотрим систему, изображенную на рис. 7.10. Пусть каким-то образом (пока нам это не важно, каким именно) получена передаточная функция цифрового регулятора в виде $G(z) = \frac{(1 - 0,2z^{-1})(1 - 0,1z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,8z^{-1})}$. Поскольку все нули и полюсы этой передаточной функции удовлетворяют необходимым условиям, мож-

но реализовать данный цифровой регулятор в виде аналогового регулятора в цепи обратной связи. Подставляя передаточную функцию цифрового регулятора в формулу (7.9), получим

$$\begin{aligned} Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} &= \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1-G(z)}{G(z)} = \frac{-z^{-1} + 0,38z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-0,2z^{-1})(1-0,1z^{-1})} = \\ &= \frac{-0,86z}{z-1} - \frac{2,25z}{z-0,2} + \frac{3,11z}{z-0,1}. \end{aligned}$$

По таблицам z -преобразований находим преобразования Лапласа, соответствующие каждой простой дроби в последнем выражении. Предварительно, конечно, надо задать период квантования T . Пусть $T=1$, тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{H(s)}{s} &= \frac{-0,86}{s} - \frac{2,25}{s+1,61} + \frac{3,11}{s+2,3} = \frac{-3,35s-3,18}{s(s+1,61)(s+2,3)}, \text{ или} \\ H(s) &= \frac{-3,35s-3,18}{(s+1,61)(s+2,3)}. \end{aligned}$$

7.4 Последовательный цифровой регулятор

В цифровых системах естественным и универсальным является использование цифрового регулятора. Преимуществами цифрового регулятора по сравнению с аналоговыми вариантами являются: возможность обеспечения лучшего качества управления; легкость изменения алгоритма управления (по крайней мере, при реализации цифрового регулятора на базе микропроцессора); более простые приемы и методы синтеза, поскольку передаточная функция цифрового регулятора $G(z)$ отделена от передаточной функции объекта управления $W_0W(z)$ квантователем.

Вначале обсудим варианты физического исполнения цифрового регулятора. Основными из них являются реализация передаточной функции $G(z)$ в виде импульсного фильтра и в виде программы для микропроцессора (микро- или мини-ЭВМ).

7.4.1 Импульсные фильтры

Импульсный фильтр представляет собой пассивный электрический четырехполюсник, расположенный между двумя устройст-

вами выборки и хранения. Как правило, реализуется четырехполюсник в виде RC -схемы. Различные варианты исполнения могут относиться к одному из трех типов: последовательный импульсный фильтр, импульсный фильтр в цепи обратной связи и комбинированные фильтры.

Последовательный импульсный фильтр представлен на рисунке 7.11. На этом же рисунке показана передаточная функция цифрового регулятора $G(z)$.

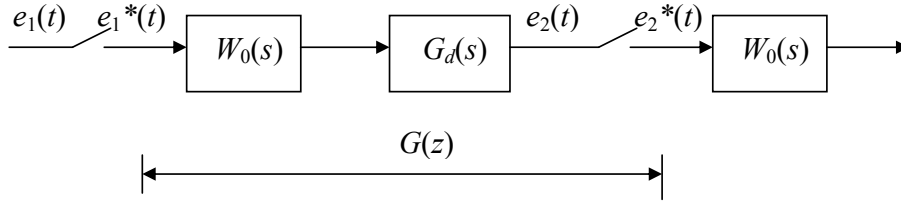


Рисунок 7.11

Согласно рисунку 7.11 имеем:

$$G(z) = W_0 G_d(z) = Z \left\{ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \cdot G_d(s) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\}.$$

Из последнего соотношения следует:

$$Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} G(z). \quad (7.13)$$

Выражение (7.13) позволяет найти передаточную функцию RC -цепи последовательного импульсного фильтра по известной (заданной) передаточной функции цифрового регулятора $G(z)$.

Теперь обсудим условия физической реализуемости $G(z)$. Поскольку $G_d(s)$ есть передаточная функция RC -цепи, все ее полюсы должны быть действительными и отрицательными (нули, вообще говоря, могут быть произвольными). Представим разложение на простые дроби (предполагая для простоты отсутствие кратных полюсов):

$$\frac{G_d(s)}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s - s_i},$$

где A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) – константы (вычеты в соответствующих полюсах), s_i – отрицательные действительные полюсы.

Переходя в последнем соотношении к z -переменной, получим:

$$Z\left\{\frac{G_d(s)}{s}\right\} = \frac{A_0}{1-z^{-1}} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{1-e^{-s_i T} z^{-1}}. \quad (7.14)$$

Сравнение выражений (7.13) и (7.14) позволяет сделать вывод о том, что для реализации передаточной функции $G(z)$ в виде последовательного импульсного фильтра она должна удовлетворять следующим требованиям:

- число нулей $G(z)$ не должно превышать число ее полюсов;
- полюсы $G(z)$ должны быть действительными (положительными) и меньше единицы;
- нули $G(z)$ могут быть произвольными.

Пример 7.4. Пусть задана передаточная функция последовательного цифрового регулятора:

$$G(z) = \frac{1-0,5z^{-1}}{1-0,2z^{-1}}.$$

Зададим период квантования $T=1$ с. Передаточная функция регулятора удовлетворяет необходимым требованиям, т.е. число нулей не превышает число полюсов и единственный полюс $z=0,2$ положительный и меньше единицы, поэтому возможна реализация этого регулятора в виде последовательного импульсного фильтра. Воспользовавшись формулой (7.13), получим:

$$Z\left\{\frac{G_d(s)}{s}\right\} = \frac{1-0,5z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-0,2z^{-1})}.$$

Для перехода в s -область разложим последнее выражение на простые дроби

$$Z\left\{\frac{G_d(s)}{s}\right\} = \frac{0,625}{1-z^{-1}} + \frac{0,375}{1-0,2z^{-1}}.$$

Пользуясь таблицами z -преобразования, окончательно получаем:

$$\frac{G_d(s)}{s} = \frac{0,625}{s} + \frac{0,375}{s+1,61} = \frac{s+1}{s(s+1,61)} \text{ и}$$

$$G_d(s) = \frac{s+1}{s+1,61}.$$

Звено с полученной передаточной функцией представляет собой пассивное интегрирующее звено, которое может быть легко реализовано в виде RC -цепочки. Дополняя это звено устройствами выборки и хранения согласно рис. 7.11, получаем искомый импульсный фильтр.

Импульсный фильтр в цепи обратной связи изображен на рисунке 7.12.

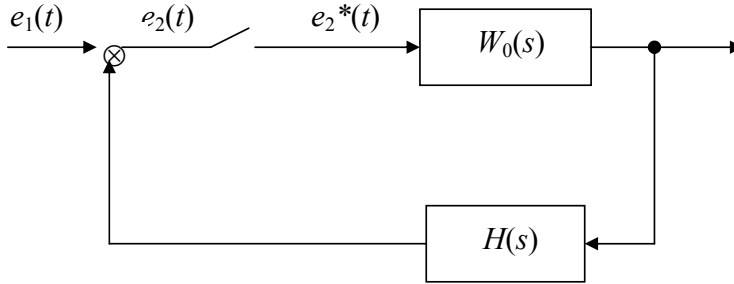


Рисунок 7.12

Передаточную функцию $H(s)$ можно определить из соотношения:

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{1}{1 + W_0 H(z)},$$

откуда следует, что:

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1 - G(z)}{G(z)}.$$

Последняя формула совпадает с выражением (7.9), следовательно, и все результаты, полученные из анализа соотношения (7.9), справедливы в рассматриваемом случае, а именно: для реализации цифрового регулятора $G(z)$ в виде импульсного фильтра в цепи обратной связи передаточная функция $G(z)$ должна иметь:

- одинаковое число нулей и полюсов,
- нули действительные (положительные) и меньше единицы,
- полюсы произвольные.

Пример 7.5. Реализуем в виде импульсного фильтра в обратной связи передаточную функцию цифрового регулятора из примера 7.4:

$$G(z) = \frac{1 - 0,5z^{-1}}{1 - 0,2z^{-1}}.$$

Необходимым требованиям передаточная функция удовлетворяет: число нулей равно числу полюсов и единственный нуль является положительным и меньше единицы, потому пользуемся формулой (7.9):

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1 - G(z)}{G(z)} = \frac{0,3z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - 0,5z^{-1})}.$$

Далее разлагаем полученное выражение на простые дроби

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{0,6}{1 - z^{-1}} - \frac{0,6}{1 - 0,5z^{-1}}$$

и переходим к переменной s :

$$\frac{H(s)}{s} = \frac{0,6}{s} - \frac{0,6}{s + 0,693} = \frac{0,416}{s(s + 0,693)}.$$

Окончательно получаем передаточную функцию RC -цепи в виде $H(s) = \frac{0,416}{s + 0,693}$. Это обычное апериодическое звено первого

порядка, дополняя которое устройством выборки и хранения согласно рис. 7.12, получаем импульсный фильтр.

Как видим, в случае последовательного фильтра ограничения накладываются на полюсы $G(z)$, а в случае фильтра в цепи обратной связи – на нули $G(z)$. Поэтому, если в передаточной функции $G(z)$ имеются и нули, и полюсы, не удовлетворяющие вышеизложенным ограничениям (например, комплексно сопряженные), то такую передаточную функцию нельзя реализовать ни отдельно последовательным импульсным фильтром, ни фильтром в цепи обратной связи. В таком случае можно попытаться применить различные их сочетания, то есть комбинированный импульсный фильтр.

Комбинированный импульсный фильтр в простейшем варианте приведен на рисунке 7.13.

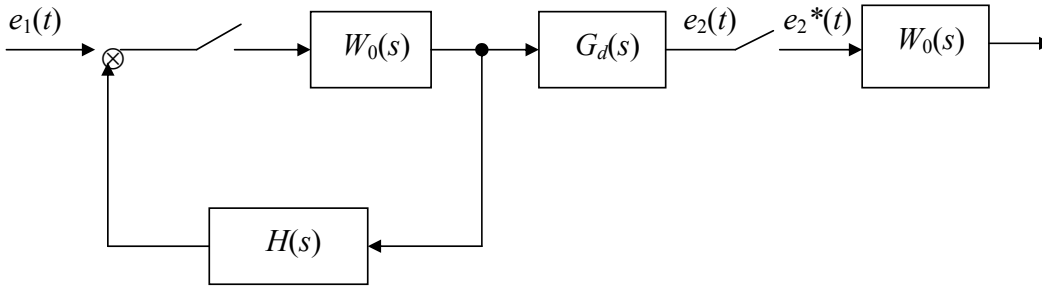


Рисунок 7.13

Согласно рисунку передаточная функция такого фильтра равна:

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{W_0 G_d(z)}{1 + W_0 H(z)}. \quad (7.15)$$

Представим передаточную функцию $G(z)$ в виде произведения двух передаточных функций:

$$G(z) = G_s(z) \cdot G_f(z),$$

где

$$G_s(z) = W_0 G_d(z)$$

есть передаточная функция последовательного импульсного фильтра, а

$$G_f(z) = \frac{1}{1 + W_0 H(z)}$$

является передаточной функцией импульсного фильтра в цепи обратной связи.

Перераспределив теперь нули и полюсы $G(z)$ таким образом, чтобы передаточная функция $G_s(z)$ имела положительные действительные меньше единицы полюсы (нули могут быть произвольными), а передаточная функция $G_f(z)$ – положительные действительные меньше единицы нули* (полюсы произвольные), мы тем самым сможем реализовать цифровой регулятор $G(z)$ в виде комбинированного импульсного фильтра.

* Дополнительное требование для функции $G_f(z)$ – равное количество нулей и полюсов. Если это требование невозможно выполнить, в передаточную функцию $G_f(z)$ дополнительно вводят необходимое число положительных меньше единицы несокращаемых с имеющимися полюсами нулей, а в передаточную функцию $G_s(z)$ – такие же полюсы.

Пример 7.6. Пусть передаточная функция цифрового регулятора имеет вид:

$$G(z) = \frac{(1 - 0,5z^{-1})(1 + 0,2z^{-1})(1 - z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0,2z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - 0,5z^{-1} + z^{-2})} = \frac{(z - 0,5)(z + 0,2)(z^2 - z + 1)}{(z - 0,2)(z - 1)(z^2 - 0,5z + 1)}.$$

Выделим в этой передаточной функции часть, которую можно реализовать в виде последовательного импульсного фильтра $G_s(z)$ (с простыми, действительными, меньше единицы полюсами), и часть, которую можно реализовать в виде импульсного фильтра в обратной связи $G_f(z)$ (с простыми, действительными, меньше единицы нулями). Тогда

$$G_s(z) = \frac{(z + 0,2)(z^2 - z + 1)}{z - 0,2},$$

$$G_f(z) = \frac{z - 0,5}{(z - 1)(z^2 - 0,5z + 1)}.$$

Полученные передаточные функции являются физически нереализуемыми, поскольку имеют разное количество нулей и полюсов, поэтому в передаточную функцию $G_s(z)$ необходимо добавить два действительных, отрицательных, меньше единицы полюса, а в передаточную функцию $G_f(z)$ – такие же нули. Таким образом, получаем:

$$G_s(z) = \frac{(z + 0,2)(z^2 - z + 1)}{(z - 0,2)(z - a)(z - b)},$$

$$G_f(z) = \frac{(z - 0,5)(z - a)(z - b)}{(z - 1)(z^2 - 0,5z + 1)},$$

где a и b – действительные числа, $0 < a < 1$; $0 < b < 1$; $a \neq b$ и a и b не равны другим полюсам и нулям функции $G(z)$. Например, можно положить $a = 0,4$; $b = 0,1$.

7.4.2 Реализация цифровых регуляторов на ЦВМ

Естественным и наиболее универсальным исполнением цифровых регуляторов является применение цифровых устройств. В этом случае передаточная функция цифрового регулятора может

быть реализована программным или аппаратным путем с помощью одной из трех основных схем: непосредственной, последовательной или параллельной. Эти три метода весьма напоминают соответствующие методы декомпозиции (см. раздел 4.3.3).

Непосредственное программирование существует в двух вариантах. В обоих передаточная функция регулятора приводится предварительно к виду:

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}, \quad (7.16)$$

где $E_2(z)$ и $E_1(z)$ – z -преобразования выходного и входного сигналов регулятора соответственно, m и n – любые положительные целые числа, а условие физической реализуемости $a_0 \neq 0$ при $b_0 \neq 0$.

Выполним в выражении (7.16) перекрестное умножение и перейдем во временную область:

$$a_0 e_2^*(t) + \sum_{i=1}^n a_i e_2^*(t - iT) = \sum_{i=0}^m b_i e_1^*(t - iT).$$

Решим полученное уравнение относительно $e_2^*(t)$:

$$e_2^*(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{i=0}^m b_i e_1^*(t - iT) - \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n a_i e_2^*(t - iT). \quad (7.17)$$

Определение выходного сигнала регулятора в текущий момент времени $e_2^*(t)$ по формуле (7.17) предполагает накопление $(m + n)$ значений входного и выходного сигналов. Структурная схема этого варианта программирования приведена на рисунке 7.15.

Второй вариант непосредственного программирования аналогичен методу непосредственной декомпозиции. Применяя этот метод к выражению (7.16), получим два уравнения:

$$E_2(z) = \frac{1}{a_0} (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}) X(z), \quad (7.18)$$

$$X(z) = \frac{1}{a_0} E_1(z) - \frac{1}{a_0} (a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}) X(z),$$

где $X(z)$ – вспомогательная переменная.

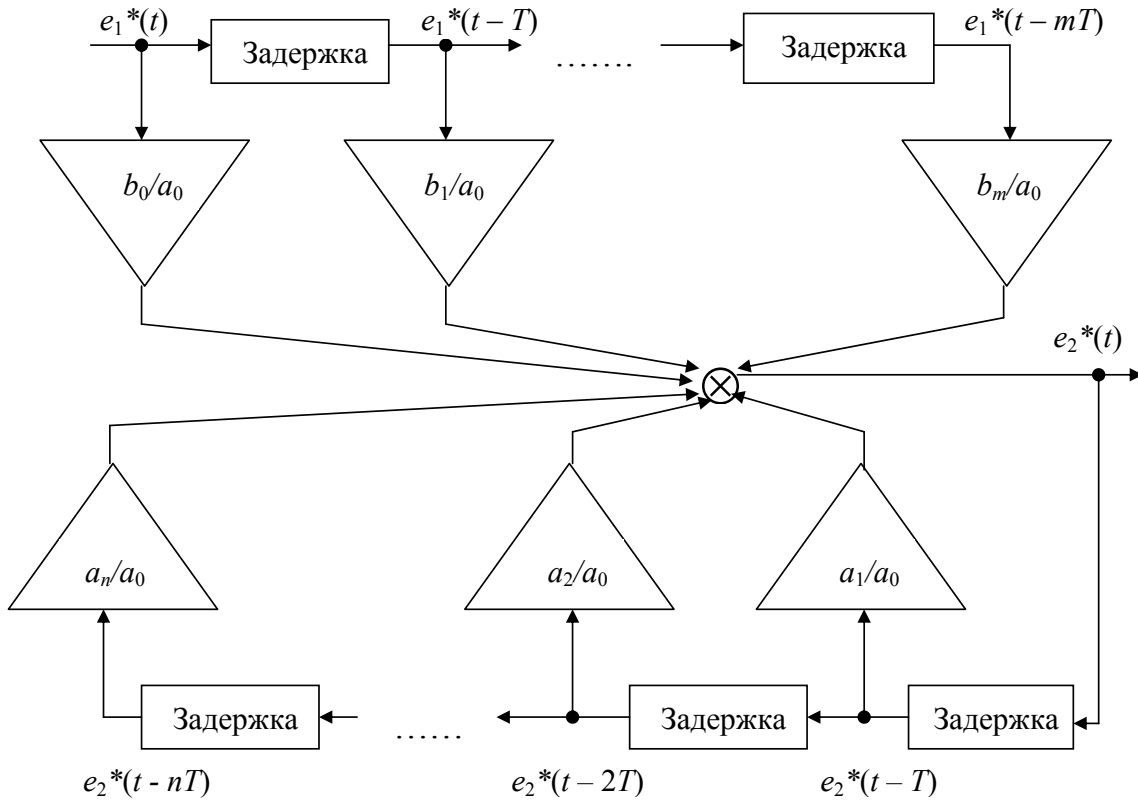


Рисунок 7.15

Переход в уравнениях (7.18) от изображений к оригиналам дает:

$$e_2^*(t) = \frac{1}{a_0} (b_0 x^*(t) + b_1 x^*(t-T) + \dots + b_m x^*(t-mT)),$$

$$x^*(t) = \frac{1}{a_0} e_1^*(t) - \frac{a_1}{a_0} x^*(t-T) - \dots - \frac{a_n}{a_0} x^*(t-nT).$$

Структурная схема программирования последних уравнений приведена на рисунке 7.16 для $n = m$.

В общем случае для реализации передаточной функции $G(z)$ этим методом потребуется число элементов задержки, равное наибольшему из чисел n и m .

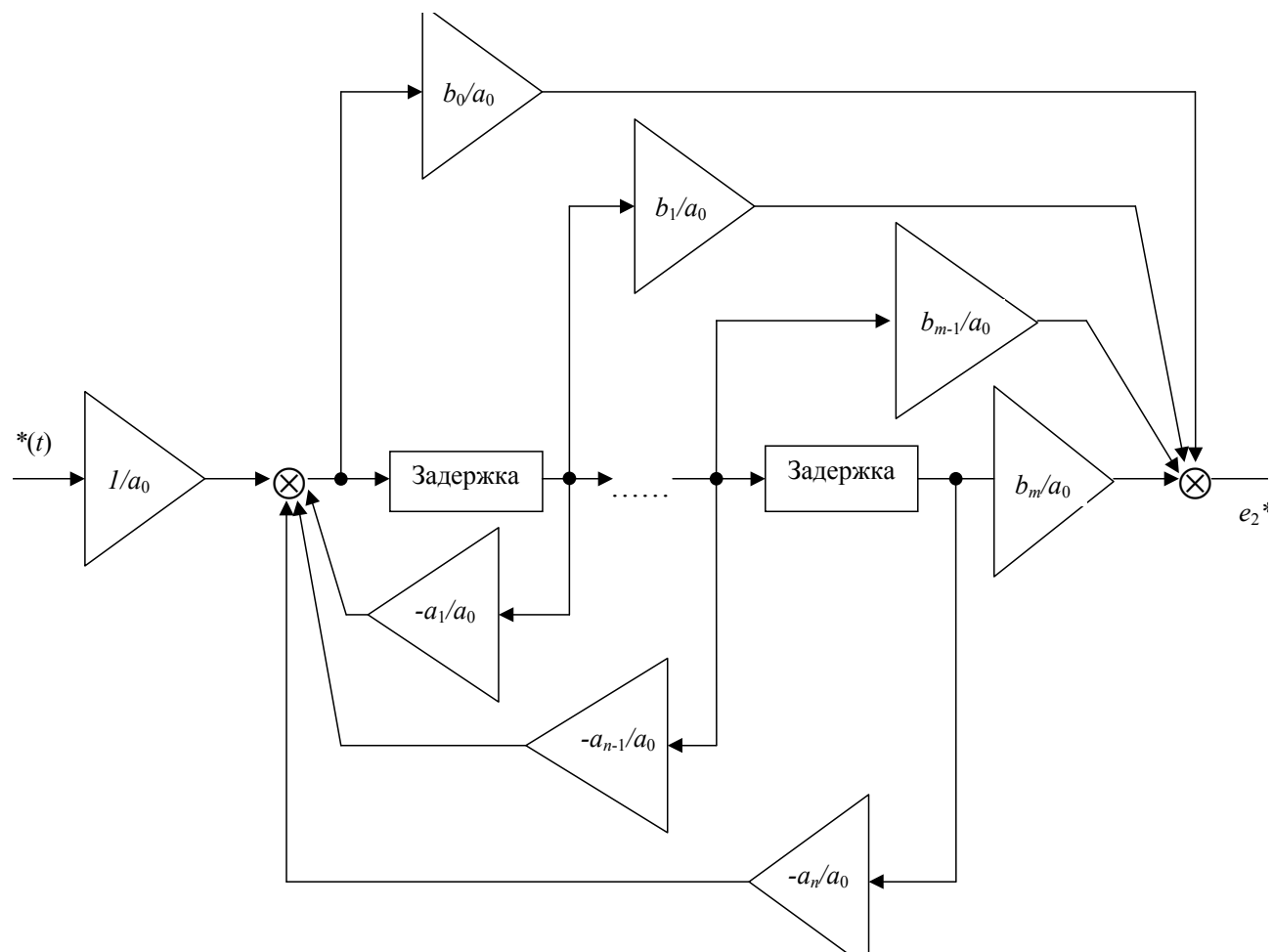


Рисунок 7.16

При последовательном программировании передаточная функция $G(z)$ представляется в виде произведения простейших передаточных функций, каждая из которых реализуется рассмотренным выше методом непосредственного программирования. Тогда эта схема программирования будет рядом последовательно применяемых программ, реализующих простейшие передаточные функции. Запишем передаточную функцию $G(z)$ в виде произведения:

$$G(z) = \sum_{i=1}^p G_i(z),$$

где $G_i(z)$ – элементарная передаточная функция первого порядка для действительных нулей и полюсов и второго порядка для комплексно сопряженных нулей или полюсов.

Соответствующая структурная схема приведена на рисунке 7.17.

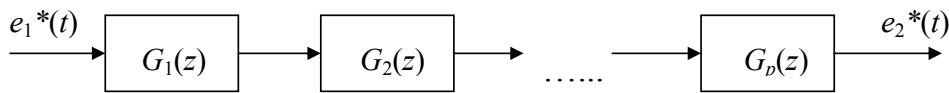


Рисунок 7.17

Параллельное программирование основано на представлении передаточной функции $G(z)$ суммой простых дробей:

$$G(z) = \sum_{k=1}^p G_k(z).$$

Каждая из $G_k(z)$ является передаточной функцией не выше второго порядка и реализуется методом непосредственного программирования. Структурная схема этого метода приведена на рисунке 7.18.

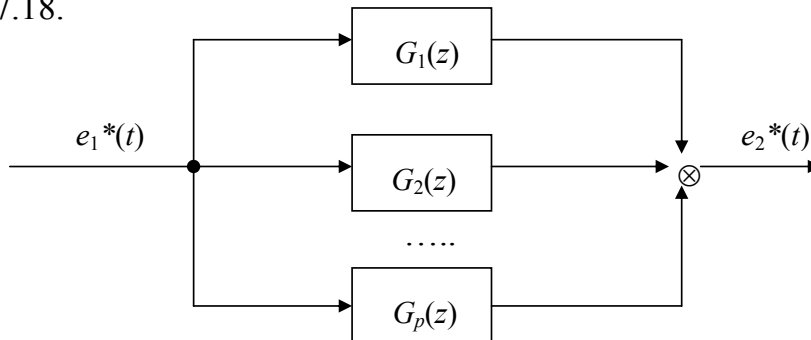


Рисунок 7.18

Пример 7.7. Пусть передаточная функция цифрового регулятора задана в виде

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{5(1 + 0,25z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1})(1 - 0,1z^{-1})}.$$

Рассмотрим реализацию этой передаточной функции различными методами программирования.

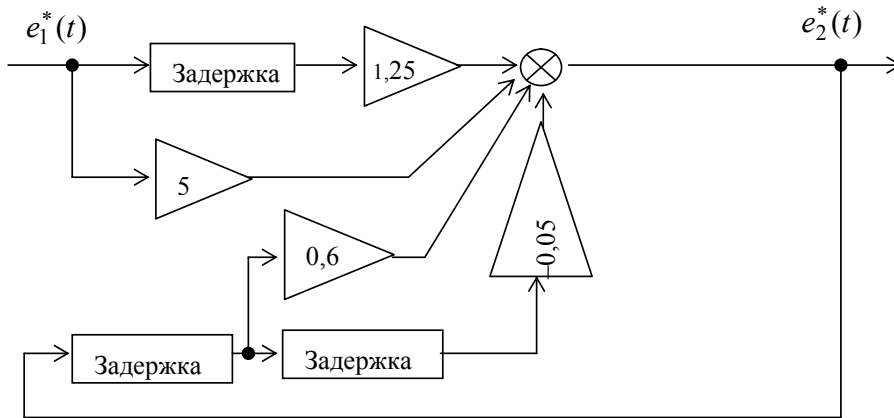
Непосредственное программирование. Выполняя перекрестное перемножение в передаточной функции, получаем

$$(1 - 0,6z^{-1} + 0,05z^{-2})E_2(z) = 5(1 + 0,25z^{-1})E_1(z).$$

Переходя в последнем выражении во временную область и решая полученное уравнение относительно выходного сигнала цифрового регулятора, имеем:

$$e_2^*(t) = 5e_1^*(t) + 1,25e_1^*(t - T) + 0,6e_2^*(t - T) - 0,05e_2^*(t - 2T).$$

По последней формуле составляем структурную схему непосредственного программирования.



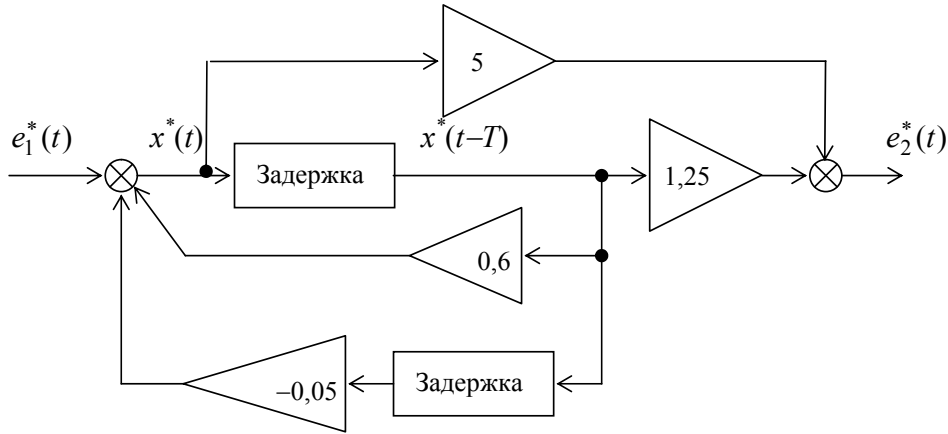
Второй вариант *непосредственного программирования*. Применяя к передаточной функции метод непосредственной декомпозиции, получаем:

$$E_2(z) = 5(1 + 0,25z^{-1}) \cdot X(z) = 5X(z) + 1,25z^{-1} \cdot X(z),$$

$$X(z) = E_1(z) + 0,6z^{-1} - 0,05z^{-2} \cdot X(z),$$

где $X(z)$ – фиктивная переменная.

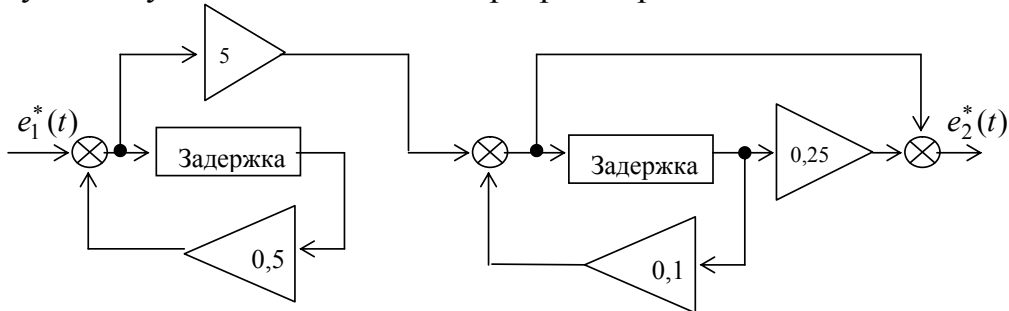
Структурная схема, реализующая эти два уравнения, приведена ниже.



Последовательное программирование. Передаточную функцию представим в виде произведения более простых (первого порядка) функций:

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{5}{1 - 0,5z^{-1}} \cdot \frac{1 + 0,25z^{-1}}{1 - 0,1z^{-1}}.$$

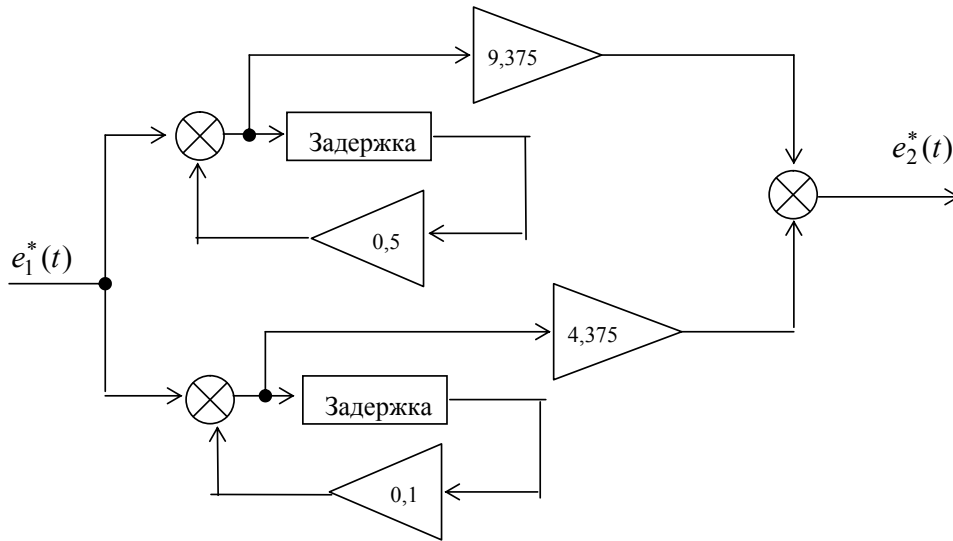
Последовательное соединение программ, составленных для каждой из этих элементарных передаточных функций, дает структурную схему последовательного программирования.



Параллельное программирование. Для применения этого метода необходимо передаточную функцию представить в виде простых дробей:

$$G(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{9,375}{1 - 0,5z^{-1}} - \frac{4,375}{1 - 0,1z^{-1}}.$$

Каждая из этих дробей реализуется методом непосредственного программирования. Результирующая схема представляет собой параллельное их соединение, как и изображено на рисунке.



7.4.3 Синтез цифрового регулятора с применением билинейного преобразования

Структурная схема системы с цифровым регулятором приведена на рисунке 7.19.

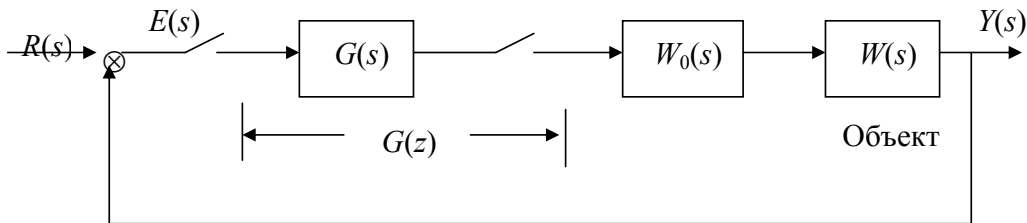


Рисунок 7.19

Поскольку передаточные функции регулятора и управляемого объекта разделены квантователем, влияние регулятора на характеристики всей системы исследовать весьма просто с помощью логарифмического метода.

рифмических характеристик. Синтез передаточной функции цифрового регулятора в этом случае осуществляется значительно легче, чем синтез аналогового регулятора в цифровой системе. Основные этапы следующие:

1. Вычисление передаточной функции разомкнутой системы без коррекции:

$$W_0W(w) = W_0W(z) \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} = Z \left\{ \frac{1-e^{-Ts}}{s} W(s) \right\} \Big|_{z=\frac{1+w}{1-w}}. \quad (7.19)$$

2. Построение логарифмических псевдочастотных характеристик разомкнутой нескорректированной системы. Переход в частотную область осуществляется подстановкой $w = j\omega_w$ в выражение (7.19). По логарифмическим кривым, как в случае непрерывной системы, определяются показатели качества системы.

3. Если полученные на предыдущем этапе показатели качества не удовлетворяют разработчика, необходимо изменить вид логарифмических кривых в соответствии с предъявляемыми требованиями к системе. Так как передаточная функция разомкнутой системы с учетом цифрового регулятора будет $G(z) \cdot W_0W(z)$, или в w -области $G(w) \cdot W_0W(w)$, то передаточная функция $G(w)$ определится по разнице между логарифмическими характеристиками исходной (нескорректированной) системы и требуемыми логарифмическими характеристиками.

Необходимо учитывать, что полученная в результате синтеза передаточная функция цифрового регулятора $G(z)$ должна быть физически реализуемой, поэтому выясним, какой должна быть соответствующая функция в области переменной w . Пусть передаточная функция $G(w)$ представлена в форме:

$$G(w) = \frac{c_m w^m + c_{m-1} w^{m-1} + \dots + c_1 w + c_0}{d_n w^n + d_{n-1} w^{n-1} + \dots + d_1 w + d_0}, \quad (7.20)$$

где m и n – целые положительные числа.

Переход в z -плоскость осуществляется подстановкой $w = (z-1)/(z+1)$ в выражение (7.20):

$$G(z) = \frac{c_m(z-1)^m + c_{m-1}(z-1)^{m-1}(z+1) + \dots + c_1(z-1)(z+1)^{m-1} + c_0(z+1)^m}{d_n(z-1)^n + d_{n-1}(z-1)^{n-1}(z+1) + \dots + d_1(z-1)(z+1)^{n-1} + d_0(z+1)^n} (z+1)^{n-m}. \quad (7.21)$$

Из последней формулы видно, что независимо от соотношения m и n передаточная функция $G(z)$ имеет одинаковое число нулей и полюсов, т.е. является физически реализуемой. Если еще дополнительно потребовать устойчивость цифрового регулятора (что желательно), то необходимо, чтобы полюсы $G(z)$ располагались внутри окружности единичного радиуса $|z_i| < 1$, а соответственно полюсы $G(w)$ – в левой полуплоскости переменной w . Из выражения (7.21) видно также, что при $m > n$ передаточная функция $G(z)$ будет иметь полюса $z = -1$, поэтому для устойчивости цифрового регулятора необходимо еще и выполнение условия $m \leq n$. Таким образом, для устойчивости цифрового регулятора число нулей передаточной функции $G(w)$ не должно превышать числа ее полюсов ($m \leq n$), а полюсы должны располагаться левее мнимой оси переменной w .

4. После того как определена передаточная функция $G(w)$, находят $G(z)$ подстановкой $w=(z-1)/(z+1)$. По полученной передаточной функции цифрового регулятора $G(z)$ подбирают вариант реализации регулятора.

5. На заключительном этапе производится комплексный анализ полученной системы вместе с цифровым регулятором для проверки соответствия показателей качества требуемым значениям.

Пример 7.8. Пусть непрерывный объект управления в системе, представленной на рис. 7.19, задан той же передаточной функцией, что и в примере 7.3, т.е. $W(s) = \frac{K}{s(1+s)}$. Коэффициент $K=1,57$. Пе-

риод квантования $T=1,57$ с. Проведем синтез цифрового регулятора с помощью билинейного преобразования. Критерий качества по синтезу системы зададим тот же, что и в примере 7.3: запас устойчивости по фазе должен быть не меньше 45° . Псевдочастотные логарифмические характеристики системы без коррекции уже были построены в примере 7.3. В том же примере была получена и передаточная функция последовательного корректирующего звена в области переменной w :

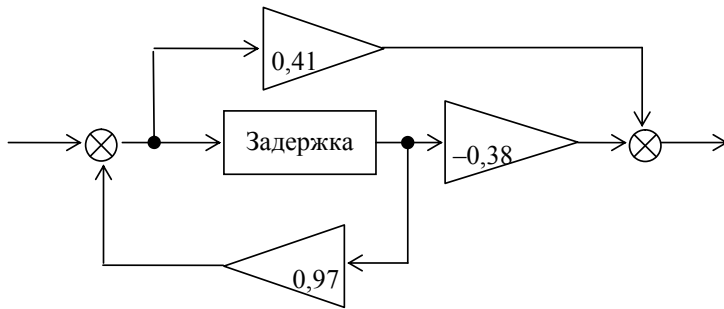
$$G(w) = \frac{1 + 25w}{1 + 62,5w}.$$

Согласно структурной схеме рис. 7.19 передаточная функция корректирующего звена (регулятора) в z -области получается непосредственно подстановкой $w = \frac{z-1}{z+1}$ в последнее выражение. Таким образом, получаем:

$$G(z) = \frac{1 + 25 \frac{z-1}{z+1}}{1 + 62,5 \frac{z-1}{z+1}} = 0,41 \cdot \frac{z - 0,92}{z - 0,97}.$$

Можно убедиться, что скорректированная система имеет приемлемое качество переходного процесса.

На заключительном этапе синтеза реализуют полученную передаточную функцию регулятора с помощью любого из рассмотренных методов. Например, непосредственная цифровая программа для данного регулятора примет вид, представленный ниже.



Если передаточная функция регулятора реализуется с помощью последовательного импульсного фильтра, то, подставляя $G(z)$ в формулу (7.13), получим

$$Z \left\{ \frac{G_d(s)}{s} \right\} = \frac{0,41(1 - 0,92z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0,97z^{-1})} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{0,59}{1 - 0,97z^{-1}}.$$

Взяв обратное z -преобразование от обеих частей последнего выражения, имеем:

$$\frac{G_d(s)}{s} = \frac{1}{s} - \frac{0,59}{s + 0,02} = \frac{0,41s + 0,02}{s(s + 0,02)} = \frac{1 + 20,5s}{s(1 + 50s)}.$$

Окончательно передаточная функция пассивного четырехполюсника в последовательном импульсном фильтре равна

$$G_d(s) = \frac{1 + 20,5s}{1 + 50s}.$$

Полученная передаточная функция соответствует пассивному интегрирующему звену и может быть реализована в виде RC -цепочки.

Если необходимо реализовать импульсный фильтр в цепи обратной связи, то пользуемся формулой (7.9):

$$Z\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1 - G(z)}{G(z)} = \frac{1,44z}{z - 0,97}.$$

Применив обратное z -преобразование к правой и левой частям последнего выражения, получим передаточную функцию $H(s)$:

$$H(s) = \frac{1,44s}{s + 0,02}.$$

Полученная передаточная функция соответствует реальному дифференцирующему звену (дифференцирующее звено с замедлением) и может быть легко реализована в виде RC -цепи.

7.4.4 Цифровой ПИД-регулятор

Из теории управления известна эффективность ПИД-регуляторов, которые реализуют пропорционально-интегрально-дифференциальный закон управления. Структурная схема непрерывного ПИД-регулятора приведена на рисунке 7.20. Пропорциональная составляющая образуется умножением сигнала ошибки на коэффициент K_p , приводит к увеличению общего коэффициента усиления разомкнутой системы и тем самым благоприятно сказывается на уменьшении ошибки во всех режимах.

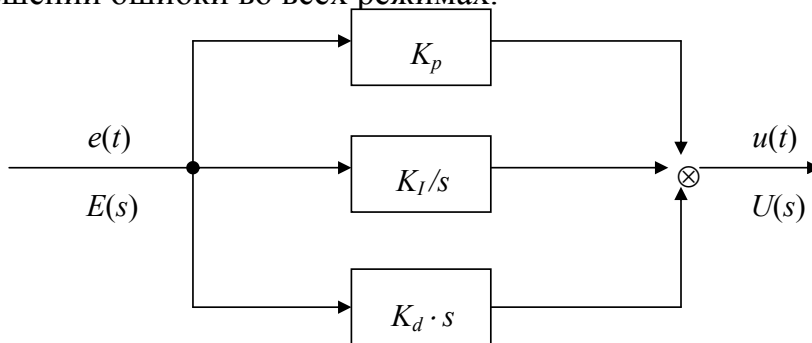


Рисунок 7.20

Интегральная составляющая представляет собой интеграл от ошибки с коэффициентом K_I ; эта составляющая приводит к уменьшению установившейся ошибки. Дифференциальная составляющая пропорциональна скорости изменения ошибки с коэффициентом K_d и позволяет уменьшить ошибку в переходных режимах. Этот же принцип ПИД-управления может быть с успехом применен и в цифровых системах. Пропорциональное управление в цифровом ПИД-регуляторе по-прежнему реализуется умножением сигнала ошибки на постоянный коэффициент K_p , а интегрирование и дифференцирование осуществляется численными методами. Например, интегрирование по методу трапеций дает передаточную функцию соответствующей составляющей:

$$\frac{K_I \cdot T(z+1)}{2(z-1)}.$$

Производную $\frac{de}{dt}$ в момент времени $t = T$ можно приближенно заменить первой разностью:

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{t=T} \approx \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}.$$

Применение z -преобразования к правой части последнего уравнения дает (с учетом постоянного коэффициента K_d): $K_d \frac{z-1}{Tz}$.

С учетом вышеизложенного структурная схема цифрового ПИД-регулятора принимает вид, приведенный на рисунке 7.21.

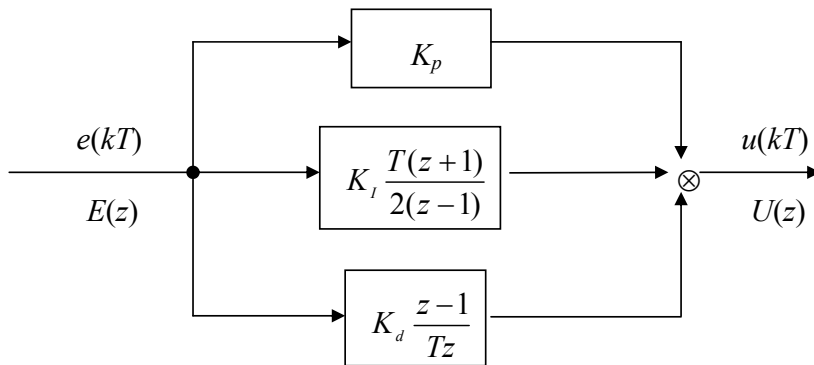


Рисунок 7.21

Собственно синтез ПИД-регулятора заключается в определении коэффициентов K_p , K_I и K_d по заданным критериям качества.

7.5 Синтез цифровых систем управления с конечным временем переходного процесса

7.5.1 Основы метода

Рассмотренные методы синтеза основаны на соответствующих методах, разработанных для непрерывных систем. Однако в цифровых системах имеется принципиальная возможность добиться значительно лучших показателей качества. В частности, время переходного процесса можно сделать конечным* (см. раздел 6.2). Выясним, каким образом можно этого добиться. Пусть структурная схема цифровой системы имеет вид, изображенный на рисунке 7.22. На этом рисунке $G(z)$ – передаточная функция цифрового регулятора, $W(z)$ – передаточная функция объекта управления (возможно, вместе с экстраполятором нулевого порядка).

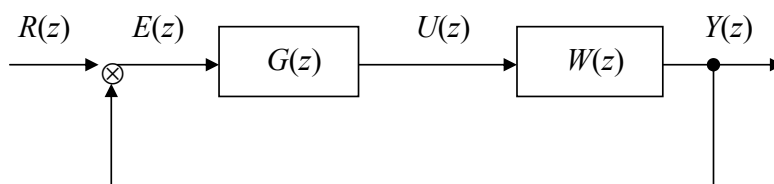


Рисунок 7.22

Сформулируем условия синтеза:

- нулевая установившаяся ошибка при определенном входном воздействии;
- длительность переходного процесса (количество тактов дискретности) до достижения установившегося состояния должна быть конечной и минимальной;
- передаточная функция цифрового регулятора $G(z)$ должна быть физически реализуемой.

* В непрерывных системах, как известно, переходные процессы теоретически затухают при бесконечном времени.

Передаточная функция замкнутой системы согласно рисунку 7.22 равна:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = M(z) = \frac{G(z) \cdot W(z)}{1 + G(z) \cdot W(z)}. \quad (7.22)$$

Из структурной схемы найдем z -преобразование ошибки:

$$E(z) = R(z) - Y(z) = R(z)[1 - M(z)] = \frac{R(z)}{1 + G(z) \cdot W(z)}. \quad (7.23)$$

Зададим входное воздействие в виде типовой полиномиальной функции. Тогда z -преобразование входного сигнала можно представить в виде:

$$R(z) = \frac{A(z)}{(1 - z^{-1})^N}, \quad (7.24)$$

где $A(z)$ – полином от z^{-1} , не имеющий нулей $z = 1$, а N – положительное целое число (порядок воздействия).

Для единичной ступенчатой функции $r(t) = 1(t)$, $A(z) = 1$, $N = 1$; для линейно меняющейся функции $r(t) = t$, $A(z) = Tz^{-1}$, $N = 2$ и т.д.

Подставляя выражение (7.24) в (7.23) и применяя теорему о конечном значении, найдем установившуюся ошибку:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{A(z)[1 - M(z)]}{(1 - z^{-1})^N}.$$

Из последнего соотношения видно, что для равенства установившейся ошибки нулю достаточно, чтобы в выражении $[1 - M(z)]$ присутствовал множитель $(1 - z^{-1})^N$, так как $A(z)$ не имеет нулей $z = 1$. Следовательно:

$$1 - M(z) = (1 - z^{-1})^N \cdot F(z), \quad (7.25)$$

где $F(z)$ – некоторый полином от z^{-1} .

Из выражения (7.25) найдем $M(z)$:

$$M(z) = \frac{z^N - (z - 1)^N \cdot F(z)}{z^N}. \quad (7.26)$$

Поскольку функция $F(z)$ есть полином от z^{-1} , она имеет только полюсы $z = 0$, и, следовательно, характеристический полином замкнутой системы на основании выражения (7.26) равен z^p , где $p \geq N$.

Подставив соотношение (7.25) в (7.23), получим:

$$E(z) = A(z) \cdot F(z). \quad (7.27)$$

И $A(z)$ и $F(z)$ являются конечными полиномами от z^{-1} , следовательно, $E(z)$, определяемое формулой (7.27), имеет конечное число членов в разложении в ряд по отрицательным степеням z . Последнее означает, что сигнал ошибки будет равен нулю через конечное число периодов квантования.

Для того чтобы число шагов до достижения нулевой ошибки было минимальным, требуется, чтобы порядок полинома $F(z)$ был как можно меньше. В идеале $F(z)$ вообще нужно положить равным единице. Почему это не всегда возможно, будет ясно из следующего подраздела.

7.5.2 Физическая реализуемость регулятора

Из соотношения (7.26) ясно, что синтез цифровой системы с конечным временем переходного процесса связан в первую очередь с выбором $F(z)$. Если этот выбор определен, то по формуле (7.26) находят $M(z)$ и из выражения (7.22) определяют передаточную функцию регулятора по формуле:

$$G(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{M(z)}{1 - M(z)}. \quad (7.28)$$

Передаточная функция $W(z)$ описывает реальный физический объект (процесс), $G(z)$ также должна быть физически реализуемой, следовательно, и на передаточную функцию замкнутой системы $M(z)$, определяемую формулой (7.22), должны быть наложены определенные ограничения. Выясним, какие же именно должны быть эти ограничения. Представим $W(z)$ и $M(z)$ разложением в ряд по степеням z^{-1} (такой ряд называется основной или нисходящей частью ряда Лорана):

$$W(z) = w_n z^{-n} + w_{n+1} z^{-n-1} + \dots; \quad (7.29)$$

$$M(z) = m_k z^{-k} + m_{k+1} z^{-k-1} + \dots, \quad (7.30)$$

где $n \geq 0$ и $k \geq 0$. Подставляя соотношения (7.29) и (7.30) в формулу (7.28), получим:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{m_k z^{-k} + m_{k+1} z^{-(k+1)} + \dots}{(w_n z^{-n} + w_{n+1} z^{-(n+1)} + \dots)(1 - m_k z^{-k} - m_{k+1} z^{-(k+1)} - \dots)} = \\ &= d_{k-n} z^{-(k-n)} + d_{k-n+1} z^{-(k-n+1)} + \dots \end{aligned} \quad (7.31)$$

Чтобы передаточная функция $G(z)$ была физически реализуемой, в ее разложении (7.31) в ряд Лорана не должно быть членов с положительной степенью z , то есть должно выполняться условие $k \geq n$. Это означает, что низшая степень разложения $M(z)$ в ряд по степеням z^{-1} должна быть не меньше низшей степени разложения $W(z)$.

Для синтеза цифрового регулятора необходимо определиться с выбором $F(z)$. Самым простым и естественным было бы положить $F(z)=1$. Тогда по формуле (7.28) передаточная функция замкнутой системы $M(z)$ для типовых входных воздействий будет иметь вид, представленный в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Входной сигнал	N	$M(z)$
Ступенчатый $1(t)$	1	z^{-1}
Линейный $t \cdot 1(t)$	2	$2z^{-1} - z^{-2}$
Параболический $\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$	3	$3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$

Из приведенной таблицы видно, что член наивысшей степени в разложении $M(z)$ равен z^{-1} , поэтому отношение $M(z)/(1 - M(z))$ (входящее в формулу (7.28)) всегда имеет полюсов на единицу больше, чем нулей. В случае если передаточная функция объекта управления $W(z)$ имеет число полюсов, более чем на единицу превышающее число ее нулей, из формулы (7.28) видно, что число нулей $G(z)$ будет больше числа ее полюсов, что говорит о физической нереализуемости цифрового регулятора. В этом случае нельзя просто брать $F(z) = 1$, а необходимо дополнять $F(z)$ еще и другими слагаемыми с z в отрицательной степени¹.

¹ В общем случае, при заданном входном воздействии порядка N , минимальное число периодов квантования, необходимое для установления нулевой ошибки, равно $N+M-1$, где M есть разница между числом полюсов и числом нулей передаточной функции управляемого объекта $W(z)$. Данное замечание касается таких передаточных функций $W(z)$, которые не имеют нулей и полюсов, расположенных на единичной окружности или вне ее.

Пример 7.9. Пусть объект управления в системе, представленной на рис. 7.22, задан передаточной функцией

$$W(z) = \frac{1}{z^2 - z - 1}.$$

Ставится задача синтезировать регулятор, обеспечивающий конечный переходной процесс с минимальным временем установления для единичной ступенчатой функции на входе.

Поскольку данная передаточная функция имеет полюсов на два больше, чем нулей, мы не можем задать $M(z) = z^{-1}$, т.к. это приведет к физически нереализуемой функции регулятора. Попробуем взять $M(z) = z^{-2}$. Тогда передаточная функция регулятора согласно формуле (7.28) будет равна:

$$G(z) = (z^2 - z - 1) \cdot \frac{1}{z^2 - 1}.$$

Эта передаточная функция уже является физически реализуемой. Функция $F(z)$ задается выражением (7.25) и равна в данном случае

$$F(z) = \frac{1 - M(z)}{1 - z^{-1}} = 1 + z^{-1}.$$

Из формулы (7.28) видно, что синтез цифровой системы с конечным временем переходного процесса основан на компенсации нулей и полюсов передаточной функции управляемого объекта $W(z)$. Поэтому, если такая передаточная функция имеет нули, расположенные на единичной окружности или вне нее, то для их компенсации потребуется неустойчивый регулятор, что в принципе и возможно, но нежелательно. В этом случае $F(z)$ также не может быть равно единице, а должно быть дополнено слагаемыми с z в отрицательной степени. При этом минимальное время установления нулевой ошибки увеличивается в соответствии с тем, какова максимальная отрицательная степень z имеется в составе $F(z)$.

Резюмируя вышеизложенное, делаем вывод, что если передаточная функция объекта $W(z)$ имеет нули на единичной окружности или вне ее, либо число ее полюсов более чем на единицу превышает число нулей, то полином $F(z)$, кроме единицы, должен содержать и другие члены по степеням z^{-1} .

7.5.3 Синтез цифрового регулятора

При синтезе системы с конечным временем переходного процесса происходит компенсация полюсов и нулей передаточной функции объекта нулями и полюсами передаточной функции регулятора. Однако, если управляемый объект таков, что передаточная функция имеет полюсы и нули на единичной окружности или вне ее, то неидеальная их компенсация (практически это часто бывает) может привести к неустойчивости всей системы в целом. Чтобы избавиться от этой неприятности, такую компенсацию просто не проводят, а накладывают дополнительные ограничения на передаточную функцию замкнутой системы $M(z)$.

Если в общем случае передаточная функция $W(z)$ содержит нули и полюсы на единичной окружности или вне ее (обозначим их z_i и p_i соответственно), то такую передаточную функцию можно представить в виде:

$$W(z) = \frac{\prod_i (1 - z_i z^{-1})}{\prod_i (1 - p_i z^{-1})} A_g(z),$$

где $A_g(z)$ имеет полюсы и нули, находящиеся только внутри единичной окружности.

Тогда из формулы (7.28) следует:

$$G(z) = \frac{\prod_i (1 - p_i z^{-1})}{\prod_i (1 - z_i z^{-1})} \cdot \frac{M(z)}{A_g(z)(1 - M(z))}. \quad (7.32)$$

Чтобы передаточная функция регулятора $G(z)$ не имела полюсов z_i и нулей p_i , требуется сокращение соответствующих множителей с множителями, входящими в $M(z)$ и $1 - M(z)$, то есть структура $M(z)$ и $1 - M(z)$ должна быть следующей (с учетом формулы (7.25)):

$$M(z) = \prod_i (1 - z_i z^{-1}) (M_m z^{-m} + M_{m+1} z^{-(m+1)} + \dots), \quad (7.33)$$

$$1 - M(z) = \prod_i (1 - p_i z^{-1}) (1 - z^{-1})^N (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots), \quad (7.34)$$

где m должно быть не меньше низшей степени z^{-1} в разложении $W(z)$ в ряд Лорана (условие физической реализуемости $G(z)$), а N определяется порядком входного воздействия. Попутно заметим, что при наличии в $W(z)$ единичных полюсов сомножитель $(1 - z^{-1})$ в выражении (7.34) возводится в степень, равную либо кратности полюсов входного сигнала, либо кратности единичных полюсов $W(z)$ в зависимости от того, какая из них больше.

С учетом дополнительных требований (7.33) и (7.34) дальнейший синтез производится по уже изложенной методике по соотношениям (7.26) и (7.28).

Пример 7.10. Зададим передаточную функцию объекта в системе на рис.7.22 в следующем виде:

$$W(z) = \frac{0,000392z^{-1}(1 + 2,78z^{-1})(1 + 0,2z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2(1 - 0,286z^{-1})}.$$

Необходимо синтезировать регулятор, обеспечивающий минимальное время установления нулевой ошибки при линейном входном воздействии.

Передаточная функция управляемого объекта имеет нуль $z = -2,78$ вне единичной окружности и полюс $z = 1$ кратности два, расположенный на единичной окружности. Поэтому функции $M(z)$ и $1 - M(z)$ должны быть заданы в соответствии с выражениями (7.33) и (7.34) соответственно. Таким образом,

$$M(z) = (1 + 2,78z^{-1})(M_1z^{-1} + \dots).$$

Первый член разложения $M(z)$ ряд Лорана должен быть степени не меньше единицы и поэтому должен иметь вид M_1z^{-1} , поскольку первый член разложения $G(z)$ в ряд равен $0,000392z^{-1}$. Коэффициент M_1 требуется определить.

Входное воздействие – это линейная функция, т.е. порядок воздействия равен 2, поэтому выражение $1 - M(z)$ должно содержать в качестве множителя $(1 - z^{-1})^2$. Второе требование – это наличие множителя, соответствующего всем полюсам $W(z)$, расположенным на единичной окружности или вне ее. Так как $W(z)$ име-

ет два полюса $z=1$, то наличие члена $(1-z^{-1})^2$ в функции $1-M(z)$ удовлетворяет обоим требованиям. Следовательно,

$$1-M(z) = (1-z^{-1})^2 \cdot F(z) = (1-z^{-1})^2 (1+a_1 z^{-1}),$$

где a_1 не может равняться нулю из-за наличия в передаточной функции нуля вне единичной окружности $z=-2,78$, и, стало быть, $F(z)$ не может быть просто единицей.

Теперь видно, что минимальный порядок $M(z)$ равен 3 (т.е. переходной процесс будет заканчиваться за три периода), следовательно, в разложении $M(z)$ помимо слагаемого $M_1 z^{-1}$ должно быть и слагаемое $M_2 z^{-2}$.

Осталось составить три уравнения, из которых найдутся три неизвестных M_1 , M_2 и a_1 . Подставляя $M(z)$ в выражение для $1-M(z)$, получим:

$$M_1 z^{-1} + (2,78M_1 + M_2)z^{-2} + 2,78M_2 z^{-3} = (2-a_1)z^{-1} + (2a_1-1)z^{-2} - a_1 z^{-3}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем три уравнения с тремя неизвестными:

$$M_1 = 2 - a_1,$$

$$2,78M_1 + M_2 = 2a_1 - 1,$$

$$2,78M_2 = -a_1.$$

Решая эти уравнения, получаем: $M_1=0,723$; $M_2= -0,46$; $a_1=1,277$.

Таким образом, передаточная функция замкнутой системы равна

$$M(z) = 0,723z^{-1} + 1,554z^{-2} - 1,277z^{-3} = \frac{0,723z^2 + 1,554z - 1,277}{z^3}.$$

Если на вход системы поступает линейно нарастающий сигнал с единичным наклоном, то z -преобразование ошибки будет равно

$$\begin{aligned} E(z) &= R(z) \cdot (1-M(z)) = \frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \cdot (1 - 0,723z^{-1} - 1,554z^{-2} + 1,277z^{-3}) = \\ &= z^{-1} + 1,277z^{-2}. \end{aligned}$$

В последнем выражении положено $T=1$. Видно, что ошибка становится равной нулю за три периода квантования. По формуле (7.28) можно определить передаточную функцию регулятора:

$$G(z) = \frac{1}{W(z)} \cdot \frac{M(z)}{1 - M(z)} = 1844 \cdot \frac{(1 - 0,286z^{-1})(1 - 0,636z^{-1})}{(1 + 0,2z^{-1})(1 + 1,277z^{-1})}.$$

Синтезированная изложенным способом система обладает двумя недостатками.

Первый состоит в том, что хотя такая система и имеет идеальную реакцию на определенное входное воздействие, по отношению к другим типам воздействий она может иметь гораздо худшее или неприемлемое качество. Например, можно показать, что переходной процесс при подаче на вход единичной ступеньки для системы из примера 7.10 будет иметь очень большое перерегулирование (127,7%).

Второй недостаток заключается в наличии кратного полюса у передаточной функции замкнутой системы (ее характеристический полином, как уже упоминалось, равен z^N). Из теории чувствительности известно, что наличие кратного корня у характеристического уравнения приводит к большей чувствительности (теоретически к бесконечной чувствительности) системы к изменению ее параметров.

Сглаживание или, быть может, ликвидация этих недостатков возможны, если желаемую передаточную функцию замкнутой системы $M(z)$ искусственно «загрубить». При этом полученная система не будет идеальной ни для одного типа входного воздействия, но будет обладать приемлемой реакцией на целый класс воздействий. Чувствительность системы к изменению параметров также удастся снизить.

Модифицируем передаточную функцию по ошибке $1 - M(z)$, разделив ее на $(1 - cz^{-1})$:

$$1 - M_*(z) = \frac{1 - M(z)}{1 - cz^{-1}},$$

где c — некоторый весовой коэффициент, лежащий в пределах $-1 < c < 1$ из соображений устойчивости $M_*(z)$. Появление таким образом дополнительного полюса у передаточной функции $M_*(z)$ приводит к тому, что характеристическое уравнение замкнутой системы уже не имеет вида $z^N = 0$ и ошибка не сводится к нулю за минимальное число периодов квантования. Но, тем не менее, при удачном выборе величины c реакция системы на целый класс вход-

ных воздействий получается приемлемой. Конкретная величина c зависит от многих факторов: от типов входных воздействий, от передаточной функции объекта, от критериев приемлемости переходных процессов и пр. и определяется, как правило, опытным путем.

7.6 Синтез цифровой системы в пространстве состояний

Из всех многочисленных методов синтеза, использующих понятие переменных состояния, рассмотрим синтез по заданному расположению полюсов с помощью обратной связи по состоянию (случай единственного входного воздействия).

Синтез данным методом предполагает предварительное определение требуемых (заданных) значений собственных чисел (корней характеристического уравнения) системы. Они могут быть определены из связи переходных процессов и расположения собственных чисел на комплексной плоскости.

Следующая теорема дает основания для проведения такого синтеза.

Теорема 7.1. Пусть уравнения состояния цифровой системы представлены в канонической форме фазовой переменной:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} u(k), \quad (7.35)$$

где матрица \mathbf{A} имеет форму матрицы Фробениуса:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix},$$

а \mathbf{B} есть матрица-столбец:

$$\mathbf{B} = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T.$$

Тогда собственные значения системы могут быть произвольно заданы с помощью обратной связи по состоянию:

$$u(t) = -\mathbf{G} \mathbf{x}(t), \quad (7.36)$$

где $\mathbf{G} = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n]$.

На рисунке 7.23 приведена структурная схема системы с такой обратной связью.

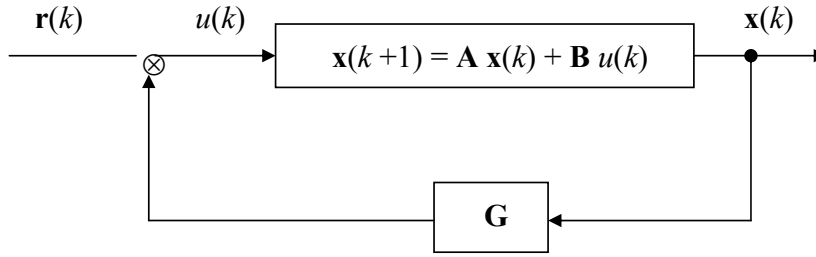


Рисунок 7.23

Доказательство. Уравнения состояния замкнутой системы с учетом (7.36) будут:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{G}) \mathbf{x}(k). \quad (7.37)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет следующим:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{G}| = 0$$

или в явном виде:

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_1 + g_1 & a_2 + g_2 & a_3 + g_3 & \dots & \lambda + a_n + g_n \end{bmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по формуле Лапласа по последней строке, получим:

$$\lambda^n + (a_n + g_n) \lambda^{n-1} + (a_{n-1} + g_{n-1}) \lambda^{n-2} + \dots + (a_1 + g_1) = 0. \quad (7.38)$$

Характеристические числа однозначно связаны с коэффициентами характеристического уравнения (7.38) (например, формулами Виетта). Выяснив, какими должны быть значения этих коэффициентов, и зная a_i , всегда можно однозначно вычислить значения коэффициентов передачи обратной связи g_i , поскольку каждый элемент g_i матрицы-строки \mathbf{G} входит только в один коэффициент характеристического уравнения (7.38). Что и требовалось доказать.

Пример 7.11. Пусть уравнения состояния системы, представленной на рис.7.23, заданы в канонической форме фазовой переменной:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} u(k),$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы \mathbf{A} равны $\lambda_{1,2} = 1,1$, т.е. разомкнутая система является неустойчивой. Попробуем задать собственные значения $\lambda_1 = 0,4$; $\lambda_2 = 0,6$ с помощью обратной связи по состоянию. Характеристическое уравнение замкнутой системы согласно рис. 7.23 равно $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{G}| = 0$. Матрица обратной связи $\mathbf{G} = [g_1 \ g_2]$. Раскрывая характеристическое уравнение, получим

$$\lambda^2 + (g_2 - 2)\lambda + (g_1 + 1) = 0.$$

Если мы задаем собственные значения $\lambda_1 = 0,4$; $\lambda_2 = 0,6$, то характеристическое уравнение должно иметь вид

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda + 0,24 = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим $\mathbf{G} = [g_1 \ g_2] = [-0,76 \ 1]$.

Простота и удобство вычисления матрицы обратной связи \mathbf{G} для системы, заданной уравнениями состояния в канонической форме фазовой переменной, наводят на мысль о приведении произвольных уравнений состояния к такой форме. О такой возможности говорит следующая теорема.

Теорема 7.2. Пусть цифровая система описывается уравнениями состояния:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} u(k), \quad (7.39)$$

где \mathbf{A} – произвольная матрица ($n \times n$), $u(k)$ – скалярное внешнее воздействие, \mathbf{B} – произвольная матрица-столбец ($n \times 1$).

Если система (7.39) полностью управляема по состоянию, то существует невырожденное преобразование координат состояния:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{P} \mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}(k), \end{aligned} \quad (7.40)$$

переводящее уравнение (7.39) в каноническую форму фазовой переменной:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_1 u(k), \quad (7.41)$$

где \mathbf{A}_1 – матрица Фробениуса.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

и связана с матрицей \mathbf{A} преобразованием подобия:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1},$$

а

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{P} \mathbf{B} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T. \quad (7.43)$$

Матрица \mathbf{P} имеет вид:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \\ \dots \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (7.44)$$

где

$$\mathbf{P}_1 = [0 \ 0 \ \dots \ 1][\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}. \quad (7.45)$$

Доказательство. Покажем, что если в результате преобразования (7.40) действительно получаются уравнения (7.41) с матрицами (7.42) и (7.43), то таким преобразованием с неизбежностью будет (7.44) и (7.45). Представим матрицу \mathbf{P} в виде:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \dots \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix}. \quad (7.46)$$

Для первой компоненты $y(k)$ из равенства (7.40) имеем:

$$y_1(k) = \mathbf{P}_1 \mathbf{x}(k)$$

или

$$y_1(k+1) = \mathbf{P}_1 \mathbf{x}(k+1).$$

В последнее соотношение подставим $\mathbf{x}(k+1)$ из уравнения (7.39). С учетом (7.42) и (7.41) имеем:

$$y_1(k+1) = \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{P}_1 \mathbf{B} u(k) = y_2(k). \quad (7.47)$$

Согласно (7.40), $y(k)$ зависит только от $\mathbf{x}(k)$, поэтому в выражении (7.47) $\mathbf{P}_1 \mathbf{B} = 0$ и:

$$y_1(k+1) = y_2(k) = \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{x}(k).$$

Увеличивая на единицу время (или номер шага) в последнем соотношении, получим:

$$y_1(k+2) = y_2(k+1) = y_3(k) = \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^2 \mathbf{x}(k),$$

где учтено, что $\mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} = 0$.

Продолжая таким же образом $n-1$ раз, получим:

$$y_{n-1}(k+1) = y_n(k) = \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{x}(k)$$

и

$$\mathbf{P}_1 \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B} = 0.$$

Объединяя полученные результаты, получаем векторно-матричное уравнение:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \dots \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k),$$

из которого с учетом соотношения (7.40) следует равенство (7.44).

Подставляя доказанное соотношение (7.44) в (7.43), имеем:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \mathbf{B} \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \dots \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Транспонируем правую часть полученного выражения:

$$[\mathbf{P}_1 \mathbf{B} \quad \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{P}_1 \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = \mathbf{P}_1 [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1].$$

Из последнего соотношения находим \mathbf{P}_1 и получаем второе доказываемое соотношение (7.45):

$$\mathbf{P}_1 = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]^{-1} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1] \mathbf{Q}^{-1},$$

где $\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A} \mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$ – не что иное, как матрица $(n \times n)$ управляемости системы (7.39) (см. раздел 4.4.2).

По условиям теоремы система (7.39) полностью управляема по состоянию, а, следовательно, матрица управляемости \mathbf{Q} имеет ранг

n , то есть является невырожденной. Поэтому обратная матрица в (7.45) существует. Что и требовалось доказать.

Из теории матриц известно, что преобразование подобия не меняет собственных чисел матрицы, следовательно, системы (7.39) и (7.41) имеют одинаковые собственные числа. Но для системы (7.41) в канонической форме фазовой переменной собственные числа всегда можно произвольным образом изменить с помощью обратной связи по состоянию \mathbf{G}_1 (согласно теореме 7.1). Коэффициенты усиления обратной связи исходной системы (7.39) определяются из соотношения:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \mathbf{P}.$$

Проведенные рассуждения, по сути, являются доказательством (правда, для случая скалярного управления $u(k)$) следующей теоремы.

Теорема 7.3. Пусть линейная цифровая система представлена уравнениями состояния:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} \mathbf{u}(k),$$

где \mathbf{A} – произвольная $(n \times n)$ матрица, $\mathbf{u}(k)$ – вектор управлений размерностью $(m \times 1)$, \mathbf{B} – матрица $(n \times m)$ связи входных воздействий с переменными состояния. Если система является полностью управляемой по состоянию, то ее собственные числа могут быть произвольным образом заданы с помощью обратной связи по состоянию:

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{G} \mathbf{x}(k),$$

где \mathbf{G} – матрица коэффициентов обратной связи размерностью $(n \times m)$.

Пример 7.12. Пусть уравнения состояния разомкнутой системы, изображенной на рис. 7.23, заданы в виде

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} u(k),$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразуем уравнения состояния к канонической форме фазовой переменной. Для этого составим матрицу управляемости \mathbf{Q} :

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости является невырожденной, т.е. система полностью управляема по состоянию.

Согласно соотношению (7.45) получим

$$\mathbf{P}_1 = [0 \quad 1] \cdot \mathbf{Q}^{-1} = [-1 \quad 1].$$

По формуле (7.44) имеем

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Уравнения состояния в новой системе координат будут выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(k) + \mathbf{B}_1 u(k),$$

где

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, кстати, что полученные уравнения совпадают с уравнениями состояния из примера 7.11.

Пусть требуется собственные значения системы сделать равными $\lambda_1 = 0,4$; $\lambda_2 = 0,6$ (см. пример 7.11). Матрица обратной связи для этого случая уже была получена в предыдущем примере² $\mathbf{G}_1 = [g_1 \quad g_2] = [-0,76 \quad 1]$. Тогда матрица обратной связи исходной системы будет равна

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \mathbf{P} = [-0,76 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [-0,24 \quad 1,24].$$

² Обратите внимание, что в примере 7.11 матрица обратной связи обозначалась как \mathbf{G} , а в данном примере она обозначена как \mathbf{G}_1 .

8 ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МИКРОПРОЦЕССОРА КАК УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА В СИСТЕМАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ

При исследовании цифровых систем немаловажное значение имеет выбор периода квантования (по времени). На этот выбор влияют как условия импульсной теоремы, так и показатели качества (в частности, устойчивость) цифровой системы управления. Кроме того, на выбор периода квантования оказывают влияние параметры аналого-цифрового и цифро-аналогового преобразователей. В качестве управляющего устройства в локальных цифровых системах управления часто используются микропроцессоры, являющиеся относительно медленными устройствами. Поэтому период квантования, задаваемый в цифровых системах таймером, зависит также от скорости выполнения процессором арифметических операций и инструкций.

Еще одно ограничение, связанное с микропроцессором, – это конечное число разрядов для представления чисел. Большинство дешевых микропроцессоров оперируют с 8-битовыми словами, что обеспечивает только 256 уровней разрешения. Это приводит к тому, что не все числа могут быть реализованы в микропроцессоре.

Конкретных вопросов программирования микропроцессора, которое осуществляется обычно на языке ассемблера, мы касаться не будем – это прерогатива других курсов (например, курса «Микропроцессорные устройства систем управления»).

8.1 Микропроцессор как контроллер в системах управления

Некоторые особенности применения микропроцессора как контроллера рассмотрим на примере.

На рисунке 8.1 представлена структурная схема микропроцессорной системы автоматического регулирования. В качестве объекта управления выбран двигатель постоянного тока (ДПТ). Требуется поддерживать постоянную скорость вращения вала двигателя.

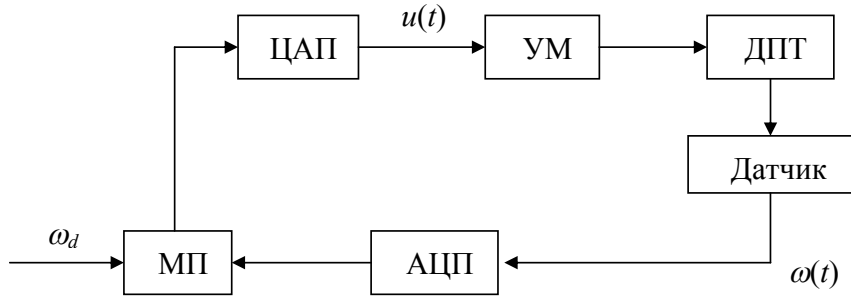


Рисунок 8.1

Непрерывная часть системы включает усилитель мощности (УМ), двигатель постоянного тока и датчик (тахогенератор с аналоговым выходом). Аналоговая часть связана с микропроцессором (МП) аналого-цифровым (АЦП) и цифро-аналоговым (ЦАП) преобразователями. Целью управления является поддержание скорости вращения вала ДПТ $\omega(t)$ равной значению заданной скорости ω_d .

Пусть микропроцессор реализует пропорционально-интегральный (ПИ) закон управления. В непрерывном варианте это означает формирование управляющего воздействия по формуле:

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int e(\tau) d\tau, \quad (8.1)$$

где $e(t) = \omega_d - \omega(t)$ – сигнал ошибки, а k_P и k_I – некоторые постоянные коэффициенты.

В выражении (8.1) интеграл есть:

$$x(t) = \int_{t_0}^t [\omega_d - \omega(\tau)] d\tau + x(t_0), \quad (8.2)$$

где t_0 – начальный момент времени.

Для вычисления выражения (8.2) может быть использован любой метод численного интегрирования, предположим, метод трапеций. Тогда, полагая $t = kT$, $t_0 = (k-1)T$, будем иметь:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} [\omega_d - \omega(\tau)] d\tau \approx \omega_d T - \frac{T}{2} (\omega(kT) + \omega[(k-1)T]) \quad (8.3)$$

для $k = 1, 2, \dots$

Таким образом, вычисление интеграла в формуле (8.2) для $t = kT$ может быть выполнено по заданной скорости ω_d и значениям

$\omega(kT)$ и $\omega[(k-1)T]$. Но вычисление интеграла по формуле (8.3) не производится мгновенно, – микропроцессору требуется для этого конечное время, то есть, имея входные данные $\omega(kT)$ и $\omega[(k-1)T]$, мы получим результат вычисления интеграла не в момент времени $t = kT$, а с некоторой задержкой. Оценить эту задержку можно, просуммировав все временные интервалы, необходимые для выполнения микропроцессором подпрограммы интегрирования. Для определенности предположим, что временная задержка на вычисления равна одному периоду квантования T . Таким образом, правая часть формулы (8.3) представляет результат вычисления интеграла в момент времени $t = (k+1)T$, и выражение (8.2) в дискретной форме имеет вид:

$$x[(k+1)T] = \omega_d T - \frac{T}{2} \omega(kT) + \frac{T}{2} \omega[(k-1)T] + x(kT). \quad (8.4)$$

Окончательно из выражения (8.1) с учетом (8.4) имеем:

$$u[(k+1)T] = k_p [\omega_d - \omega(kT)] + k_I x[(k+1)T]. \quad (8.5)$$

Управляющее воздействие (8.5) поступает на усилитель мощности в моменты $t=(k+1)T$, $k=0,1,2, \dots$ и остается постоянным между моментами квантования.

На рисунке 8.2 представлена более подробная функциональная схема системы. Для определения начала очередного периода квантования используется аналоговый программный таймер, который вырабатывает импульс каждые T секунд. Выходной сигнал таймера используется для двух целей. Во-первых, он поступает на шину прерываний микропроцессора, что приводит к остановке рабочей программы вычисления управляющего воздействия $u[(k+1)T]$ и выполнению программы прерывания (в данном случае это будет программа вывода очередного значения управляющего воздействия $u[(k+1)T]$). Далее управление $u[(k+1)T]$ поступает в ЦАП, с выхода которого аналоговый сигнал через усилитель мощности воздействует на двигатель постоянного тока. Во-вторых, сигнал от таймера по шине управления поступает на устройство выборки и хранения, входящее в АЦП. При этом мгновенная скорость вращения вала ДПТ $\omega(t)$, измеряемая тахогенератором (ТГ), квантуется по времени и «замораживается» в течение одного периода квантования T . Далее АЦП квантует значение $\omega(kT)$ по уровню (по амплитуде) и кодирует полученный сигнал соответствующим двоичным кодом. На

все это требуется определенное время. Как только дискретные данные на выходе АЦП готовы, АЦП сообщает об этом (по шине готовности данных) микропроцессору. Шина готовности данных может быть соединена с шиной прерывания микропроцессора (на рисунке не показано), и по сигналу с АЦП значение $\omega(kT)$ в виде двоичного числа поступает в процессор по шине данных. После вычисления следующего значения $u[(k+1)T]$ процессор ожидает очередного сигнала с таймера для вывода вычисленного управления. Далее все повторяется.

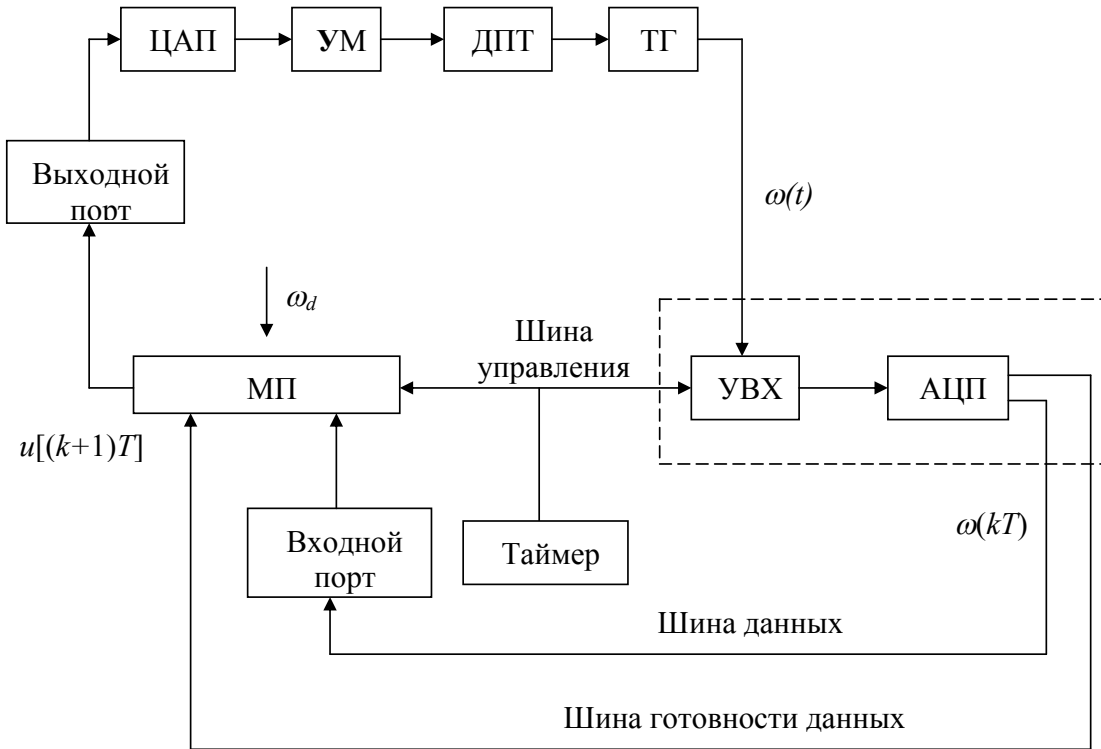


Рисунок 8.2

Чтобы микропроцессор успевал произвести вычисление очередного значения сигнала регулирования $u[(k+1)T]$, необходимо выбрать соответствующую частоту прерываний таймера, а для этого нужно оценить время, требуемое микропроцессору на вычисления. Время вычисления может быть определено из анализа программы, реализующей соответствующий закон управления, с учетом воз-

возможного выполнения подпрограмм, которые могут быть вызваны из любого пакета функциональных задач. Программа, как известно, состоит из набора команд, которые требуют для своего выполнения определенного количества машинных циклов. Каждый машинный цикл, в свою очередь, требует определенного количества машинных состояний. Время выполнения микропроцессором конкретной команды пропорционально общему числу машинных состояний, через которые проходит микропроцессор при выполнении этой команды, и может быть найдено в соответствующих справочниках по данному микропроцессору. Учитывая эту информацию, нетрудно найти общее время, требуемое для выполнения программы: для этого анализируют всю программу от команды к команде, суммируя количество машинных состояний или время их выполнения.

При рассмотрении примера микропроцессорной системы регулирования описание регулятора изначально было представлено дифференциальным уравнением. Как вариант цифровой регулятор может быть задан своей дискретной передаточной функцией $D(z)$. В этом случае при составлении программы для микропроцессора необходимо воспользоваться одним из методов программирования, рассмотренных в подразделе 7.4.

8.2 Влияние квантования по уровню

Относительно небольшое количество машинных разрядов, отведенных для представления чисел в микропроцессоре, приводит к необходимости учета эффектов, связанных с квантованием сигналов по уровню в цифровых системах.

Статическая характеристика квантователя по уровню и его структурная схема приведены на рисунке 8.3.

Входной сигнал квантователя $x(t)$ может принимать любые значения (непрерывный по амплитуде сигнал), а выходной сигнал $y(t)$ – только дискретные значения, ближайшие к $x(t)$ и кратные величине q – шагу квантования. Шаг квантования зависит от максимального значения входного сигнала (МЗЧ) и длины представляемого цифровым кодом слова:

$$q = 2^{-N} \cdot \text{МЗЧ},$$

где N – число двоичных разрядов (битов).

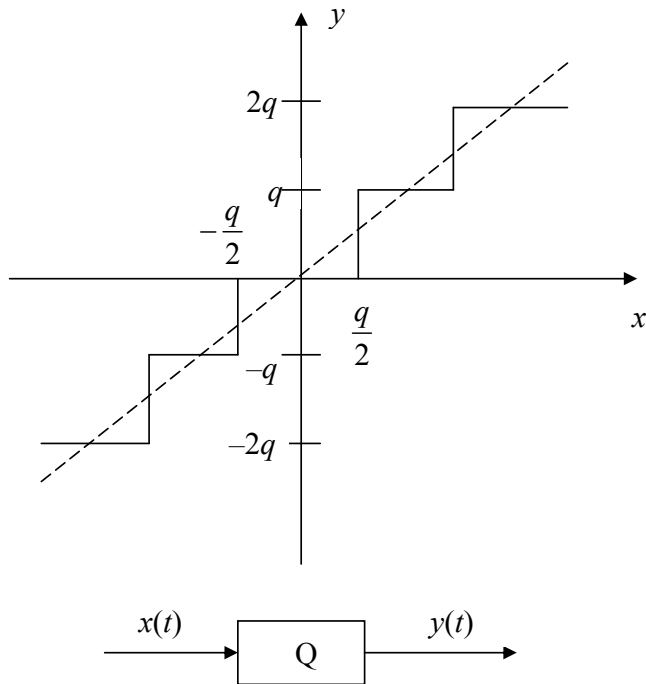


Рисунок 8.3

Ясно, что ошибка квантования (то есть разница $x(t) - y(t)$) будет лежать в интервале от $-\frac{q}{2}$ до $\frac{q}{2}$.

Строго говоря, нелинейных устройств, изображенных на рисунке 8.3, даже в простейшей одноструктурной схеме с микропроцессором, как минимум, три (см. рисунок 8.4): это нелинейности АЦП, микропроцессора и ЦАП.

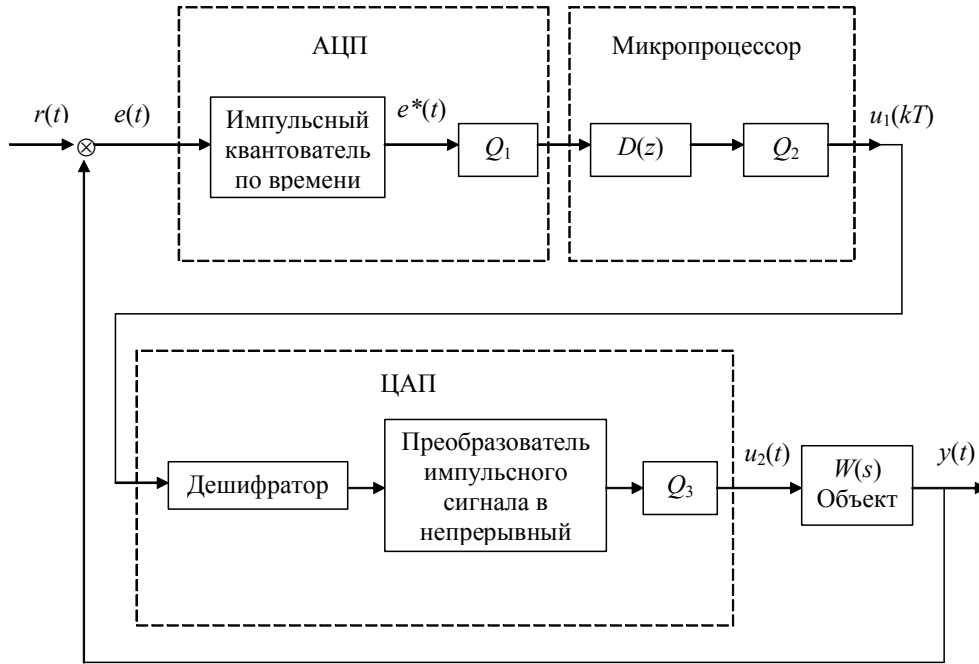


Рисунок 8.4

Исследование такой системы чрезвычайно сложно, поэтому обычно задачу упрощают, пренебрегая нелинейностями АЦП и ЦАП. Структурная схема при этом принимает вид, представленный на рисунке 8.5.

На рисунке 8.5 в качестве фильтра дискретного сигнала использован, как обычно, экстраполятор нулевого порядка (ЭНП) с передаточной функцией:

$$W_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}.$$

Ограничения в представлении чисел в МП приводят к неточности в реализации закона управления. Причиной этого является неполная компенсации нулей и полюсов передаточной функции управляемого процесса (при синтезе системы с конечным временем переходного процесса) или неточное задания матрицы обратной связи (при синтезе системы с обратной связью по состоянию). Также неточно могут задаваться отдельные коэффициенты передаточ-

ной функции регулятора. Все это вызывает дополнительные ошибки, которые требуют анализа и учета.

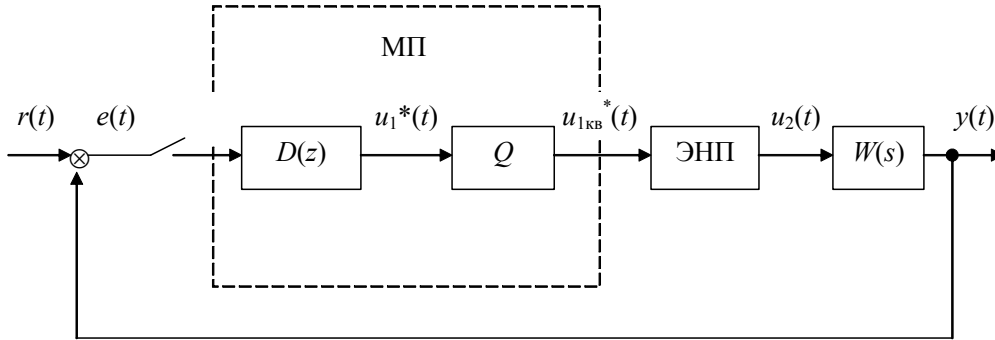


Рисунок 8.5

Кроме этого, нелинейность квантователя Q приводит к дополнительному возрастанию общей ошибки (за счет ошибок квантования), а также к возможности возникновения в системе незатухающих колебаний (предельного цикла).

8.3 Статистический учет ошибок квантования по уровню

Наибольшее значение ошибки квантования, как мы уже выяснили, равно $\pm q/2$. Поэтому «наихудшая» ошибка в цифровой системе, представленной на рисунке 8.5, вследствие квантования по уровню может быть определена при замене квантователя Q на внешний источник шума амплитудой $\pm q/2$. Эквивалентная схема при такой замене будет представлена рисунком 8.6.

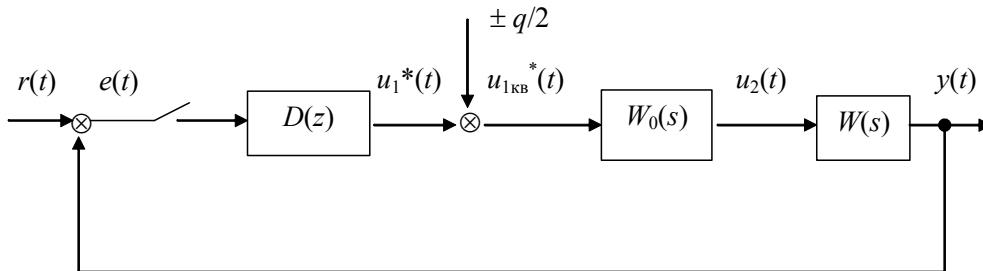


Рисунок 8.6

На основании схемы рисунка 8.6 z -изображение максимальной ошибки вследствие квантования по уровню будет равно:

$$E(z) = \frac{W_0 W(z)}{1 + D(z) \cdot W_0 W(z)} (\pm q/2) \cdot \frac{z}{z-1} =$$

$$= \frac{Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}}{1 + (1 - z^{-1}) D(z) \cdot Z \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}} (\pm q/2). \quad (8.6)$$

Само значение ошибки может быть определено по обратному z -преобразованию правой части выражения (8.6).

Иногда оценки ошибки «сверху» бывает недостаточно и приходится прибегать к статистическим оценкам. Ошибка квантования при произвольном сигнале на входе является случайной величиной с нулевым матожиданием.

Можно показать, что если выполняются два условия:

1) $q \leq MЗЧ/8$,

2) плотность распределения сигнала $u_1^*(t)$ – гладкая функция (например, гауссова),

то все значения ошибки квантования $\varepsilon = u_1^* - u_{1кв}^*$, расположенные в интервале от $-q/2$ до $q/2$, равновероятны, то есть плотность распределения ошибки $p(\varepsilon)$ постоянна в диапазоне от $-q/2$ до $q/2$:

$$p(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{при } |\varepsilon| \leq q/2, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| > q/2. \end{cases} \quad (8.7)$$

Первое условие выполняется всегда, так как оно означает, что число разрядов для представления числа в МП не меньше 3. Второе условие также справедливо, поскольку, как правило, нет никаких оснований предполагать противное.

Дисперсия ошибки при распределении (8.7) равна, как известно из теории вероятности:

$$D_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 p(\varepsilon) d\varepsilon = q^2/12. \quad (8.8)$$

Если при этом еще предположить некоррелированность ошибок квантования на каждом шаге, то эффекту от квантования по

уровню эквивалентно дополнительное воздействие на систему идеального белого шума с интенсивностью $N = 2\pi q^2/(12\omega_s)$. Такая замена основана на том, что удобный, с аналитической точки зрения, идеальный белый шум с бесконечным частотным спектром $S_u(\omega) = N$ воспринимается цифровой системой так же (вследствие квантования по времени с частотой ω_s), как и реальный белый шум с шириной спектра $\omega_s/2$ и интенсивностью N . Спектральная плотность такого реального белого шума равна:

$$S_p(\omega) = \begin{cases} N, & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2}, \\ 0, & |\omega| > \frac{\omega_s}{2}, \end{cases}$$

а его дисперсия D_p равна дисперсии ошибки квантования D_ε :

$$D_p = \frac{1}{2\pi} N \cdot 2 \frac{\omega_s}{2} = \frac{q^2}{12} = D_\varepsilon.$$

Таким образом, схему, изображенную на рисунке 8.5, можно заменить эквивалентной (в статистическом смысле) схемой, представленной на рисунке 8.7.

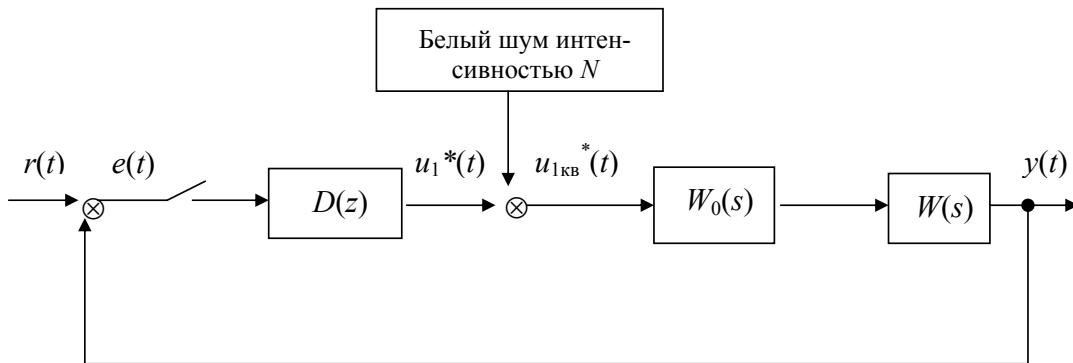


Рисунок 8.7

Система, представленная на рисунке 8.7, является линейной и может быть исследована в рамках линейной теории. Например, дисперсию ошибки, вызванной квантованием по уровню, можно найти по формуле:

$$\begin{aligned}
D_e &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_e(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \left| \frac{W_0 W(z)}{1+W(z)} \right|^2 \Big|_{z=e^{j\omega T}} N d\omega = \\
&= \frac{q^2}{12\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \left| \frac{W_0 W(z)}{1+W(z)} \right|^2 \Big|_{z=e^{j\omega T}} d\omega,
\end{aligned} \tag{8.9}$$

где $W_0 W(z) = Z\{W_0(s) \cdot W(s)\} = (1-z^{-1})Z\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$,

$$W(z) = D(z) \cdot W_0 W(z).$$

Для вычисления интеграла в правой части (8.9) удобнее перейти к псевдочастоте ω_w согласно соотношениям:

$$e^{j\omega T} = z = \frac{1+j\omega_w}{1-j\omega_w}. \tag{8.10}$$

Продифференцировав правую и левую части выражения (8.10), найдем $d\omega$:

$$d\omega = \frac{2}{T} \cdot \frac{d\omega_w}{|1+j\omega_w|^2}. \tag{8.11}$$

Подставив выражение (8.11) в формулу (8.9) и перейдя к переменной ω_w , получим:

$$D_e = \frac{q^2}{12\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{W_0 W(j\omega_w)}{1+W(j\omega_w)} \right|^2 \cdot \frac{1}{|1+j\omega_w|^2} d\omega_w. \tag{8.12}$$

Интеграл в последнем выражении легко находить, пользуясь существующими таблицами для интегрирования спектральных плотностей, так как подынтегральное выражение в (8.12) приводится к требуемому для этого виду.

8.4 Анализ предельного цикла

Рассмотренные выше методы учета ошибок квантования не учитывают ошибки, вызванной возможным существованием в цифровой системе предельного цикла. Чаще всего предельный цикл исследуется методом гармонического баланса, основанного на гармонической линеаризации нелинейности (обычно одной). Суть метода

гармонической линеаризации состоит в замене нелинейного звена эквивалентным, с точки зрения прохождения чисто гармонического сигнала, линейным звеном с комплексным (в общем случае) коэффициентом передачи $K(A)$ (этот коэффициент называется коэффициентом гармонической линеаризации), зависящим от амплитуды сигнала.

Применение метода гармонического баланса основано на предположении, что линейная часть системы пропускает только основную частоту (первую гармонику) возможных автоколебаний (гипотеза фильтра).

Одно из необходимых условий наличия в нелинейной системе автоколебаний – это то, что период колебаний в произвольной точке замкнутого контура не должен измениться при возвращении сигнала в эту точку после прохождения по контуру (отсюда название – метод баланса). Ясно, что выполнение этого условия в системе с периодическим квантованием по времени возможно только в случае, если период автоколебаний в предельном цикле содержит целое число периодов квантования T , причем не менее двух. Поэтому период автоколебаний T_z при решении данной задачи измеряется в относительных единицах – в периодах квантования T :

$$\overline{T_z} = T_z / T, \quad (8.13)$$

где $\overline{T_z}$ – относительный период.

Относительная частота автоколебаний $\overline{\omega_z}$ будет выражаться формулой:

$$\overline{\omega_z} = \frac{2\pi}{\overline{T_z}} = 2\pi T / T_z = \omega_z T = \frac{\pi}{N}, \quad (8.14)$$

где $N = T_z / (2T)$ – относительный полупериод колебаний, $N = 1, 2, \dots$

Наличие квантования по времени в цифровых системах вносит особенности в поведение коэффициента гармонической линеаризации: он оказывается зависимым не только от амплитуды автоколебаний A_z , но и от относительной частоты $\overline{\omega_z}$ (или от N). Коэффициент гармонической линеаризации оказывается зависимым также от фазы φ_z , характеризующей сдвиг начальной фазы автоколебаний относительно момента квантования сигнала по времени (момента замыкания ключа).

$$K^*(A_z, \varphi_z, N) \cdot W\left(j \frac{\pi}{N}\right) = -1, \quad (8.16)$$

где $W\left(j \frac{\pi}{N}\right) = W(z)$ после подстановок (согласно (8.14)): $z = e^{j\omega T}$,
 $\omega = \overline{\omega_z}/T$, $\overline{\omega_z} = \pi/N$.

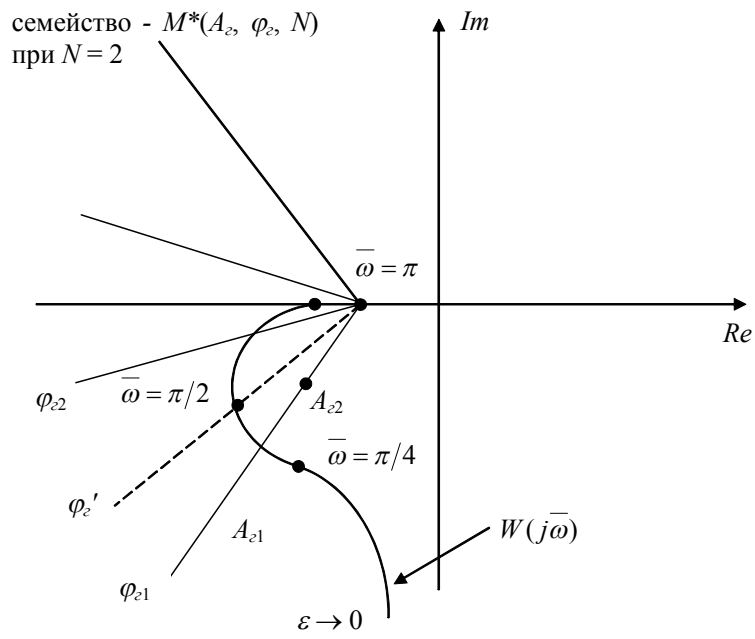
Уравнение (8.16) удобно представить в виде:

$$W\left(j \frac{\pi}{N}\right) = -\frac{1}{K^*(A_z, \varphi_z, N)} = -M^*(A_z, \varphi_z, N) \quad (8.17)$$

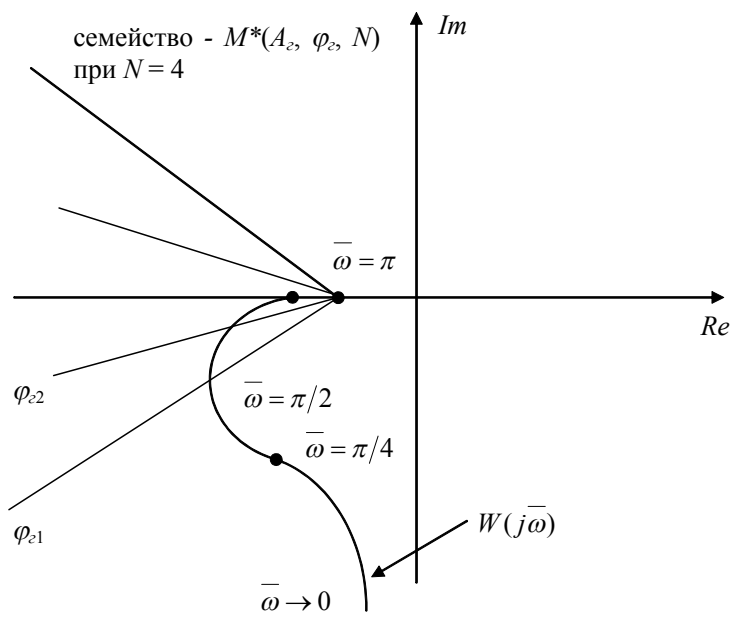
и решать его графическим методом. Для этого на комплексной плоскости строится кривая $W(z)$ при изменении z по окружности единичного радиуса $|z| = 1$ (или, что то же самое, кривая $W(e^{j\omega T})$ при $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$). На этой кривой отмечаются точки $\overline{\omega} = \pi/N$ ($N = 1, 2, \dots$), поскольку частота автоколебаний может принять значение только из ряда значений, соответствующих относительным частотам $\overline{\omega}$. На этом же графике строится семейство по φ_z кривых $-M^*(A_z, \varphi_z, N)$ для каждого значения N (см. рисунок 8.9, а, б). Анализ этих кривых и говорит о наличии или отсутствии автоколебаний в предельном цикле.

Например, из рисунка 8.9, б видно, что предельного цикла на частоте $\overline{\omega} = \pi/4$ в системе быть не может, так как точка кривой $W(j\overline{\omega})$, соответствующая этой частоте ($N=4$), находится вне семейства кривых $-M^*(A_z, \varphi_z, 4)$ и ни на одну из них не попадает.

Из рисунка 8.9, а видно, что предельный цикл существует, поскольку точка $W\left(j \frac{\pi}{2}\right)$ попадает в поле кривых $-M^*(A_z, \varphi_z, 2)$ (а именно, на кривую с фазой φ_z' , показанную пунктирной линией). Этот предельный цикл будет устойчивым, если $A_{z1} > A_{z2}$. Значения амплитуды и фазы автоколебаний можно вычислить, если воспользоваться, например, линейной интерполяцией.



a)



б)

Рисунок 8.9

При вычислении коэффициента гармонической линеаризации по формуле (8.15) удобно ступенчатую нелинейность на рисунке 8.3 представить как сумму релейных нелинейностей (см. рисунок 8.10).

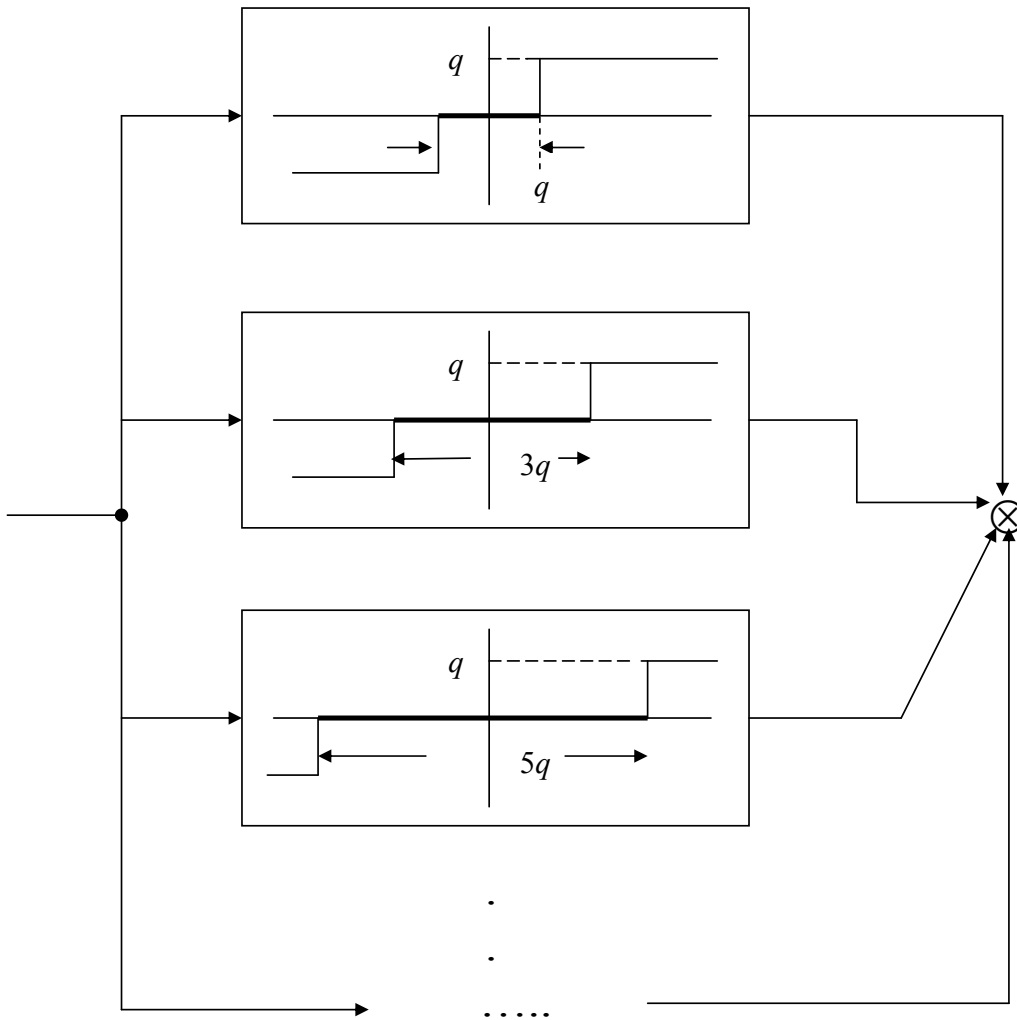


Рисунок 8.10

Из изложенного ясно, что исследование предельного цикла сопряжено с большим объемом вычислительных и графических операций, причем положительный результат (то есть наличие в системе автоколебаний) разработчика, как правило, не устраивает. Поэтому

интерес представляет задача построения системы без автоколебаний.

Предельного цикла в системе не будет, если кривые $W\left(j\frac{\pi}{N}\right)$ и $-M^*(A_2, \varphi_2, N)$ не пересекаются, а они точно не пересекутся, если $W(j\omega)$ располагается вне зоны, где могут располагаться кривые $-M^*(A_2, \varphi_2, N)$ для различных значений A_2, φ_2 и конкретного N . Можно показать, что для нелинейности, изображенной на рисунке 8.3, независимо от числа ступенек запретная для $W(j\omega)$ область будет располагаться внутри угла величиной π/N , вершина которого находится в точке $(-1; j0)$, и расположенного симметрично относительно отрицательной действительной полуоси (см. рисунок 8.11).

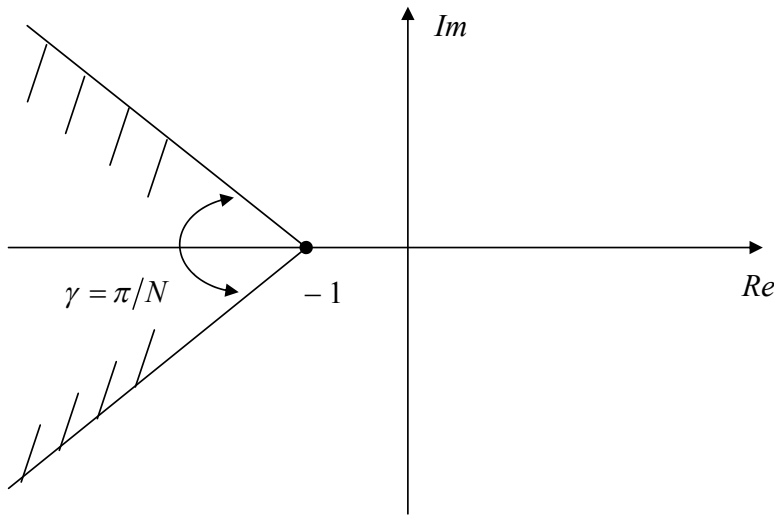


Рисунок 8.11

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Изерман Р. Цифровые системы управления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1984. – 447 с.
3. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. – М.: Наука, 1970. – 620 с.
4. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. – М.: Наука, 1971. – 744 с.
5. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. – М.: Наука, 1986.
6. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы: Учебн. пособие / В.В. Солодовников, В.Г. Коньков, В.А. Суканов, О.В. Шевяков. – М.: Высш. шк., 1991. – 255 с.
7. Карпов А.Г. Математические основы теории систем: Учебн. пособие: В 2-х частях. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – Ч.2. – 138 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функция времени	Преобразование Лапласа	z-преобразование	w-преобразование
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{w+1}{2w}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{T(1+w)(1-w)}{4w^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2(1+w)(1-w)}{8w^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1+w}{(1-e^{-aT}) \left(1 + \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} w \right)}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{(1+w)(1-w)}{2w \cdot \left(1 + \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} w \right)}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{(1+w)(1-w)Te^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2 \cdot \left(1 + \frac{1+e^{-aT}}{1-e^{-aT}} w \right)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \cdot \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{(1-w)(1+w) \sin \omega T}{2[(1+w^2) - (1-w^2) \cos \omega T]}$

Функция времени	Преобразование Лапласа	z-преобразование	w-преобразование
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cdot \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$	$\frac{(1+w)^2 - (1-w^2) \cos \omega T}{2[(1+w^2) - (1-w^2) \cos \omega T]}$
$e^{-at} \sin \omega T$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	$\frac{(1+w)(1-w)e^{-aT} \sin \omega T}{\frac{(1+w)^2 - 2(1-w^2)}{e^{-aT} \cos \omega T + (1-w)^2 e^{-2aT}}}$
$e^{-at} \cos \omega T$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$	$\frac{(1+w)^2 - (1-w^2)e^{-aT} \cos \omega T}{\frac{(1+w)^2 - 2(1-w^2)}{e^{-aT} \cos \omega T + (1-w)^2 e^{-2aT}}}$