



*Томский межвузовский центр
дистанционного образования*

В.М. Зюзьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Учебное методическое пособие

ТОМСК – 2004

Министерство образования и науки Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра компьютерных систем в управлении и
проектировании (КСУП)**

В.М. Зюзьков

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Учебное методическое пособие

2004

Корректор: Осипова Е.А.

Зюзьков В.М.

Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное методическое пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 84 с.

Учебное методическое пособие содержит требования к выполнению контрольных работ, примеры решения задач и варианты заданий. В качестве курса лекций следует использовать учебное пособие Зюзькова В. М. «Математическая логика и теория алгоритмов».

Предназначено для студентов, обучающихся на всех формах обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| КОНТРОЛЬ ОБУЧЕНИЯ | 5 |
| ПЕРВОЕ КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ | 7 |
| <i>Примеры задач с решениями</i> | 7 |
| Переводы с естественного языка на формальный язык (язык логики первого порядка) | 7 |
| Логика высказываний | 12 |
| Задачи с множествами | 17 |
| <i>Варианты заданий</i> | 26 |
| ВТОРОЕ КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ | 43 |
| <i>Примеры задач с решениями</i> | 43 |
| Задачи с отношениями | 43 |
| Задачи с функциями | 49 |
| Задачи с отношениями эквивалентности и порядка | 52 |
| Задачи на математическую индукцию и мощность множеств | 55 |
| Задачи с предикатами и интерпретацией | 56 |
| Сравнения скорости роста | 58 |
| <i>Варианты заданий</i> | 59 |

КОНТРОЛЬ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина «Математическая логика и теория алгоритмов» изучается на протяжении одного семестра. В процессе дистанционного обучения дисциплине студент должен выполнить два контрольных задания и компьютерную экзаменационную работу. Каждое контрольное задание требует решения 10 задач.

Выполненное задание (10 задач с условиями и решениями) студент пересылает электронной или обыкновенной почтой диспетчеру центра дистанционного обучения, который в свою очередь пересылает их лектору. Лектор проверяет решения задач и при правильном решении студент получает подтверждение о том, что они зачтены. Если задание не выполнено (неправильно решена одна или несколько задач), студент получает от лектора сообщение о том, какая задача не зачтена. Контрольное задание считается выполненным, только если зачтено решение всех десяти задач.

Студент должен выполнить свой вариант заданий. Номер варианта выбирается по следующей формуле:

$$V = (N * k) \text{ div } 100,$$

где V – искомый номер варианта (при $V=0$ выбирается максимальный вариант),

N – общее количество вариантов по контрольной работе,

k – значение двух последних цифр пароля (число в диапазоне 0..99),

div – целочисленное деление.

В конце семестра студент выполняет компьютерную экзаменационную работу. Ему потребуется ответить на 10 случайно выбранных вопросов из 118 возможных. По результатам ответа студенту ставится экзаменационная оценка.

Вопросы экзамена включают все темы учебного пособия¹. Но вопросы по тем темам, которые не присутствуют в задачах

¹ Зюзьков В. М. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 233 с.

контрольных заданий, достаточно просты. Распределение вопросов по темам следующее:

- 1) логический язык – два вопроса;
- 2) множества – два вопроса;
- 3) отношения – два вопроса;
- 4) формальные аксиоматические теории – один вопрос;
- 5) автоматическое доказательство теорем, неклассические логики – один вопрос;
- 6) вычислимость – один вопрос;
- 7) сложность алгоритмов – один вопрос.

ПЕРВОЕ КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Первое контрольное задание посвящено решению задач на использование логического языка, логики высказываний и операций с множествами. Задание состоит из 10 задач: 4 задачи на перевод с естественного на формальный язык (и обратно), 3 задачи на логику высказываний, 3 задачи на операции с множествами.

Примеры задач с решениями

Рекомендуется разобраться в решениях всех задач, приведенных в примерах. Это поможет выполнить контрольное задание и компьютерную экзаменационную работу.

Для краткости письма будем использовать иногда сокращения:

- 1) вместо слов «следует», «влечет» и т.п. будем писать символ \Rightarrow ;
- 2) вместо слов «тогда и только тогда, когда» будем писать символ \Leftrightarrow .

Переводы с естественного языка на формальный язык (язык логики первого порядка)

(См. раздел «2. Язык математики» учебного пособия²)

При решении следующих задач сначала следует выбрать универсум, содержащий объекты (сущности), о которых говорится в предложении. В некоторых случаях одним универсумом не обойтись. После этого следует выбрать предикатные символы для обозначения свойств объектов (одноместные предикаты) и/или отношений между объектами универсума (универсумов). Количество используемых предикатов следует минимизировать³, но и не следует впадать в другую крайность, когда выска-

² Зюзьков В. М. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 262с.

³ «Не следует создавать сущностей больше необходимого количества» – принцип «бритва Оккама». Оккам Уильям (ок. 1285-1349), английский философ-схоласт, логик.

зывание представляется одним многоместным предикатом. Когда речь идет о конкретных объектах (указаны собственные имена), то следует вводить константы для обозначения их объектов. Следующие примеры показывают способ оформления решения.

1. Все, что сделано из золота, драгоценно.

Универсум: $M = \{\text{украшения}\}$. Предикаты: $Z(x) \equiv \langle x \text{ сделано из золота} \rangle$, $D(x) \equiv \langle x - \text{драгоценная вещь} \rangle$.

Формула: $\forall x (Z(x) \supset D(x))$

2. Все замки отпираются и запираются.

Универсум: $M = \{\text{технические устройства}\}$. Предикаты: $Z(x) \equiv \langle x - \text{замок} \rangle$, $O(x) \equiv \langle x \text{ может открываться} \rangle$, $C(x) \equiv \langle x \text{ может закрываться} \rangle$.

Формула: $\forall x (Z(x) \supset O(x) \& C(x))$

3. Все свиньи прожорливы.

Универсум: $M = \{\text{животные}\}$. Предикаты: $S(x) \equiv \langle x - \text{свинья} \rangle$, $E(x) \equiv \langle x - \text{много ест} \rangle$.

Формула: $\forall x (S(x) \supset E(x))$

4. Чтобы не быть собакой, достаточно быть кошкой.

Универсум: $M = \{\text{животные}\}$. Предикаты: $D(x) \equiv \langle x - \text{собака} \rangle$, $C(x) \equiv \langle x - \text{кошка} \rangle$.

Формула: $\forall x (C(x) \supset \neg D(x))$

5. Гамлет и Клавдий ненавидят друг друга.

Универсум: $M = \{\text{люди}\}$. *Гамлет* и *Клавдий* – константы. Предикат: $A(x, y) \equiv \langle x \text{ ненавидит } y \rangle$.

Формула: $A(\text{Клавдий}, \text{Гамлет}) \& A(\text{Гамлет}, \text{Клавдий})$

6. Не все студенты отличники или спортсмены.

Универсум: $M = \{\text{люди}\}$. Предикаты: $T(x) \equiv \langle x - \text{студент} \rangle$, $O(x) \equiv \langle x - \text{отличник} \rangle$, $S(x) \equiv \langle x - \text{спортсмен} \rangle$.

Формула: $\exists x T(x) \& \neg O(x) \& \neg S(x)$

7. Ни одна тачка не комфортабельна.

Универсум: $M = \{\text{транспортное средство}\}$. Предикаты: $T(x) \equiv \langle x - \text{тачка} \rangle$, $C(x) \equiv \langle x - \text{комфортабельно} \rangle$.

Формула: $\forall x (T(x) \supset \neg C(x))$

8. Ни один ребенок не любит прилежно заниматься.

Универсум: $M = \{\text{люди}\}$. Предикаты: $B(x) \equiv \langle x - \text{ребенок} \rangle$, $L(x) \equiv \langle x - \text{любит прилежно заниматься} \rangle$.

Формула: $\forall x (B(x) \supset \neg L(x))$

9. Логика часто ставит меня в тупик.

Универсумы: $M_1 = \{\text{науки}\}$, $M_2 = \{\text{люди}\}$. Предикат: $A(x, y) \equiv \langle \text{наука } x \text{ часто ставит в тупик человека } y \rangle$. «Логика» и «я» – константы.

Формула: $A(\text{Логика}, \text{я})$

10. Число делится на 25 в том и только в том случае, когда оно делится на 50 либо дает при делении на 50 остаток 25.

Универсум: $N = \text{натуральные числа}$. Предикат: $O(x, y, z) \equiv \langle x \text{ при делении на } y \text{ дает остаток } z \rangle$.⁴

Формула: $\forall x (O(x, 25, 0) \sim O(x, 50, 0) \vee O(x, 50, 25))$

11. Молодо – зелено.

Универсум: $M = \{\text{люди}\}$. Предикаты: $B(x) \equiv \langle x - \text{молодой} \rangle$, $G(x) \equiv \langle x - \text{малоопытный} \rangle$.

Формула: $\forall x (B(x) \supset G(x))$

12. Все лекарства имеют отвратительный вкус.

Универсум: $M = \{\text{средства, которые принимаются внутрь}\}$. Предикаты: $L(x) \equiv \langle x - \text{лекарство} \rangle$, $B(x) \equiv \langle x \text{ имеет отвратительный вкус} \rangle$.

Формула: $\forall x (L(x) \supset B(x))$

⁴ Совершенно излишне для записи этого высказывания заводить три различных предиката: « x делится на 25», « x делится на 50», « x при делении на 50 дает в остатке 25».

13. Ни у одной ящерицы нет волос.

Универсум: $M = \{\text{животные}\}$. Предикаты: $B(x) \equiv \langle x - \text{ящерица} \rangle$, $G(x) \equiv \langle x \text{ имеет волосы} \rangle$.

Формула: $\forall x (B(x) \supset \neg G(x))$

14. Некоторые лекции невозможно понять.

Универсум: $M = \{\text{публичные выступления}\}$. Предикаты: $B(x) \equiv \langle x - \text{лекция} \rangle$, $G(x) \equiv \langle x - \text{понимаемое выступление} \rangle$.

Формула: $\exists x (B(x) \& \neg G(x))$

15. Пусть задана следующая интерпретация. M – множество натуральных чисел $(0, 1, 2, \dots)$, предикатные символы $S(x, y, z)$ и $P(x, y, z)$ обозначают следующие предикаты $\langle x + y = z \rangle$ и $\langle x \times y = z \rangle$ соответственно.

Запишем формулы, истинные на M тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) $x = 0$;
- 2) $x = 1$;
- 3) x – четное число;
- 4) x – простое число;
- 5) $x = y$;
- 6) $x \leq y$;
- 7) x делит y ;
- 8) коммутативность сложения.

Все эти формулы, за исключением формулы 8, должны содержать свободные переменные. При подстановке вместо этих свободных переменных конкретных натуральных чисел формула становится высказыванием (истинным или ложным). Формула 8 уже есть высказывание, поэтому все переменные в ней должны быть связанными.

Ответы:

1) $F_1(x) = \forall y S(x, y, y)$, так как $x+y=y$ для любого y тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2) $F_2(x) = \forall y P(x, y, y)$, так как $x \times y = y$ для любого y тогда и только тогда, когда $x = 1$;

3) $F_3(x) = \exists y P(x, y, y)$;

- 4) $F_4(x) = \neg F_1(x) \& \neg F_2(x) \& (\forall y \forall z (P(y, z, x) \supset (F_2(y) \vee F_2(z))))$, где F_1, F_2 – формулы, определенные в пп. 1 и 2;
- 5) $F_5(x, y) = \forall z \forall u (S(x, z, u) \supset S(y, z, u))$;
- 6) $F_6(x, y) = \exists z S(x, z, y)$;
- 7) $F_7(x, y) = \exists z P(x, z, y)$;
- 8) $\forall x \forall y \forall z (S(x, y, z) \supset S(y, x, z))$.

16. Пусть $f(x)$ – произвольная фиксированная функция, заданная на отрезке $[a, b]$.

1) Рассмотрим интерпретацию: M – множество действительных чисел, $P(x, \delta)$ обозначает $|x - x_0| < \delta$, $Q(x, \varepsilon)$ обозначает $|f(x) - A| < \varepsilon$, $R(\varepsilon)$ обозначает $\varepsilon > 0$. Здесь x_0 – фиксированный элемент отрезка $[a, b]$; A – некоторое фиксированное действительное число. Тогда утверждение о том, что A – предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, записывается формулой

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x ((R(\varepsilon) \& P(x, \delta)) \supset Q(x, \varepsilon)).$$

2) Рассмотрим интерпретацию: M – множество действительных чисел, $P(x, \delta)$ обозначает $|x - x_0| < \delta$, $S(x, \varepsilon)$ обозначает $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, $R(\varepsilon)$ обозначает $\varepsilon > 0$. Здесь x_0 – фиксированный элемент отрезка $[a, b]$. Тогда утверждение о том, что функция f – непрерывна в точке x_0 , записывается в виде формулы

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x ((R(\varepsilon) \& P(x, \delta)) \supset S(x, \varepsilon)).$$

3) Рассмотрим интерпретацию: M – множество действительных чисел, $P(x, x_1, \delta)$ обозначает $|x - x_1| < \delta$, $S(x, x_1, \varepsilon)$ обозначает $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$, $R(\varepsilon)$ обозначает $\varepsilon > 0$, $D(x)$ обозначает $x \in [a, b]$. Тогда утверждение о том, что функция f – непрерывна на отрезке $[a, b]$ записывается в виде формулы

$$\forall x_1 \forall \varepsilon \exists \delta \forall x ((D(x_1) \& R(\varepsilon) \& P(x, x_1, \delta)) \supset S(x, x_1, \varepsilon)).$$

В задачах, где идет речь о количестве каких-то объектов, следует использовать предикат « \Rightarrow » (см. раздел «2.4.3 Равенство, Единственность и неединственность» из учебного пособия).

17. Перевести на формальный язык

У уравнения $ax^2 + bx + c + \varepsilon \sin x = 0$ не менее трех решений.

Искомая формула:

$$\exists x \exists y \exists z (x \neq y \ \& \ y \neq z \ \& \ z \neq x \ \& \ ax^2 + bx + c + \varepsilon \sin x = 0 \ \& \ ay^2 + by + c + \varepsilon \sin y = 0 \ \& \ az^2 + bz + c + \varepsilon \sin z = 0)$$

18. Перевести на естественный язык

$\exists x, y \forall z (D(\text{Ваня}, z) \supset x = z \vee y = z)$, где D – дружит

Перевод: «У Вани не больше двух друзей».⁵

19. Перевести на естественный язык

$$\forall x (x \neq a \ \& \ x \neq b \supset f(x) \neq 0)$$

Перевод: Функция f равна 0, может быть, только в точках a и b .

Логика высказываний

(Задачи на определение истинностных значений формул логики высказываний; см. разделы учебного пособия 2.4.5–2.4.6)

Пусть дана некоторая формула F логики высказываний и надо выяснить, является ли формула F тавтологией.

Простой метод доказательства – использовать таблицу истинности. Хорошо, если эта таблица небольшая, но когда высказывательных переменных много, то такой подход трудоемок.

В случае, когда F имеет вид $F_1 \supset F_2$, желательно использовать метод доказательства от противного. Вы предполагаете, что формула F ложна и, делая отсюда выводы, приходите к противоречию или определяете значения переменных, при которых формула ложна. Для формул указанного вида ложность $F_1 \supset F_2$ однозначно определяет: F_1 – истинна, а F_2 – ложна.

20. Является ли формула $((P \supset Q) \ \& \ P) \supset Q$ тавтологией?

Предположим, что $((P \supset Q) \ \& \ P) \supset Q$ ложна при некоторых зна-

⁵ Перевод на русский язык должен быть не только правильным, но и литературным. Никуда не годится перевод: «Существуют такие x и y , что любой друг Вани есть x или y ».

чениях высказывательных переменных P и Q . Представим наши рассуждения в виде таблицы. Каждая следующая строчка таблицы есть логическое следствие предыдущей строки.

| $((P \supset Q) \& P) \supset Q = \text{Л}$ | |
|---|----------------|
| $(P \supset Q) \& P = \text{И}$ | $Q = \text{Л}$ |
| $P \supset Q = \text{И}, P = \text{И}$ | |
| $\text{И} \supset Q = \text{И}$ (подставили в формулу И вместо P) | |
| $Q = \text{И}$ | |

Получили противоречие ($Q = \text{И}$ и $Q = \text{Л}$ одновременно), следовательно, исходное предположение о ложности $((P \supset Q) \& P) \supset Q$ не верно, и формула $((P \supset Q) \& P) \supset Q$ всегда истинна.

21. Является ли тавтологией формула $((P \supset Q) \& (\neg R \supset \neg Q) \& (T \supset \neg R)) \supset (P \supset \neg T)$?

Решение. Предположим, что $((P \supset Q) \& (\neg R \supset \neg Q) \& (T \supset \neg R)) \supset (P \supset \neg T)$ ложна при некоторых значениях высказывательных переменных P, Q, R и T .

| $((P \supset Q) \& (\neg R \supset \neg Q) \& (T \supset \neg R)) \supset (P \supset \neg T) = \text{Л}$ | |
|---|-----------------------------------|
| $(P \supset Q) \& (\neg R \supset \neg Q) \& (T \supset \neg R) = \text{И}$ | $P \supset \neg T = \text{Л}$ |
| $P \supset Q = \text{И}, \neg R \supset \neg Q = \text{И}, T \supset \neg R = \text{И}$ | $P = \text{И}, \neg T = \text{Л}$ |
| $\text{И} \supset Q = \text{И}, \neg R \supset \neg Q = \text{И}, \text{И} \supset \neg R = \text{И}$ (подставили в формулы И вместо P и T) | |
| $Q = \text{И}, \neg R = \text{И}, \neg R \supset \neg Q = \text{И}$ | |
| $\text{И} \supset \neg \text{И} = \text{И}$ (подставили в формулы И вместо Q и $\neg R$) | |
| $\text{И} \supset \text{Л} = \text{И}$. Но это невозможно! | |

Пришли к противоречию, следовательно, исходная формула – тавтология.

22. Является ли формула $((P \supset Q) \& P) \supset (Q \supset \neg P)$ тавтологией? Предположим, что формула $((P \supset Q) \& P) \supset (Q \supset \neg P)$ ложна при некоторых значениях высказывательных переменных P и Q .

| $((P \supset Q) \& P) \supset (Q \supset \neg P) = \text{Л}$ | |
|--|-----------------------------------|
| $(P \supset Q) \& P = \text{И}$ | $Q \supset \neg P = \text{Л}$ |
| $P \supset Q = \text{И}, P = \text{И}$ | $Q = \text{И}, \neg P = \text{Л}$ |
| $\text{И} \supset Q = \text{И}$ (подставили в формулу И вместо P) | |
| $Q = \text{И}$ | |

Получили значения переменных ($Q = \text{И}$ и $P = \text{И}$), при которых формула $((P \supset Q) \& P) \supset (Q \supset \neg P) = \text{Л}$, следовательно, эта формула не является тавтологией.

При проверке на тавтологичность формул вида $F_1 \sim F_2$ следует поступать по-другому. Имеем $F_1 \sim F_2$ – тавтология тогда и только тогда, когда формулы F_1 и F_2 равносильны. Поэтому, надо попробовать преобразовать F_1 к F_2 (или наоборот), используя основные равносильности (см. Теоремы 2.1 и 2.2⁶)

23. Является ли тавтологией формула $((P \supset Q) \& (R \supset Q)) \sim ((P \vee R) \supset Q)$?

Решение. $(P \supset Q) \& (R \supset Q) \equiv$ (теорема 2.1, равносильность 17) $(\neg P \vee Q) \& (\neg R \vee Q) \equiv$ (коммутативность \vee) $(Q \vee \neg P) \& (Q \vee \neg R) \equiv$ (дистрибутивность \vee относительно $\&$) $Q \vee (\neg P \& \neg R) \equiv$ (закон де Моргана) $Q \vee \neg (P \vee R) \equiv$ (коммутативность \vee) $\neg (P \vee R) \vee Q \equiv$ (рав-

⁶ Зюзьков В. М. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 233 с.

носищность 17) $(P \vee R) \supset Q$. Равносищность доказана. Следовательно, $((P \supset Q) \& (R \supset Q)) \sim ((P \vee R) \supset Q)$ есть тавтология.

Что можно сказать об истинностном значении высказывания $(\neg P \& \neg Q) \sim (P \vee Q)$, если $P \supset Q$ ложно?

Решение. Из того, что $P \supset Q$ ложно, получаем $P = \text{И}$, $Q = \text{Л}$. Подставляем эти истинностные значения вместо P и Q в формулу $(\neg P \& \neg Q) \sim (P \vee Q)$ и получаем $(\neg \text{И} \& \neg \text{Л}) \sim (\text{И} \vee \text{Л}) = (\text{Л} \& \text{И}) \sim \text{И} = \text{Л} \sim \text{В} = \text{Л}$. Следовательно, формула $(\neg P \& \neg Q) \sim (P \vee Q)$ ложна.

24. Доказать выполнимость формулы $\neg(P \supset \neg P)$. Пусть $\neg(P \supset \neg P) = \text{И}$. Тогда $P \supset \neg P = \text{Л}$, следовательно, $P = \text{И}$. Мы пришли к значению переменной P , при котором исходная формула истинна. Следовательно, формула $\neg(P \supset \neg P)$ выполняема. Если бы пришли к противоречию, то это означало бы, что исходная формула не может быть истинной, следовательно, не является выполнимой.

25. При каких значениях переменных X, Y, Z формула $((X \supset (Y \& Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X)) \supset \neg Y$ ложна?

Решение. $((X \supset (Y \& Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X)) \supset \neg Y = \text{Л} \Leftrightarrow (X \supset (Y \& Z)) \supset (\neg Y \supset \neg X) = \text{И}$, $\neg Y = \text{Л} \Leftrightarrow$ случай 1) $X \supset (Y \& Z) = \text{Л}$, $\neg Y = \text{Л}$; случай 2) $\neg Y \supset \neg X = \text{И}$, $\neg Y = \text{Л} \Leftrightarrow$ случай 1) $X = \text{И}$, $Y \& Z = \text{Л}$, $Y = \text{И}$; случай 2) $Y = \text{И} \Leftrightarrow$ случай 1) $X = \text{И}$, $Z = \text{Л}$, $Y = \text{И}$; случай 2) $Y = \text{И} \Leftrightarrow Y = \text{И}$. Следовательно, при $Y = \text{И}$ и для любых значений X и Z формула ложна, других вариантов нет.

26. Доказать, что $A \sim B \equiv \neg A \sim \neg B$.

Решение. Имеем $A \sim B \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$. С другой стороны, используя ту же равносильность, $\neg A \sim \neg B \equiv (\neg A \& \neg B) \vee (\neg \neg A \& \neg \neg B) \equiv (\neg A \& \neg B) \vee (A \& B)$. Следовательно, $A \sim B \equiv \neg A \sim \neg B$.

27. Построить формулу от трех переменных, которая истинна в том и только том случае, когда ровно две переменные ложны.

Решение: $(\neg X \& \neg Y \& Z) \vee (\neg X \& Y \& \neg Z) \vee (X \& \neg Y \& \neg Z)$.

28. Выразить $A \vee B$ через A , B и символ \supset .

Решение: $A \vee B \equiv (A \supset B) \supset B$.

29. Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или кино, а если будет хорошая погода – пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика не выполнено? Запишите формулу истинную тогда и только тогда, когда решение мальчика не выполнено (отрицания должны содержаться лишь в простых высказываниях).

Решение. Введем простые высказывания:

$A \equiv$ «закончил чтение книги»; $B \equiv$ «сходил в музей»; $C \equiv$ «сходил в кино»; $D \equiv$ «стоит хорошая погода»; $E \equiv$ «искупался на реке».

Утверждение о том, что мальчик выполнил решение, представляется формулой $A \& (B \vee C) \& (D \supset E)$. Отрицание этой формулы означает, что мальчик решение не выполнил. Имеем $\neg(A \& (B \vee C) \& (D \supset E)) \equiv \neg A \vee \neg(B \vee C) \vee \neg(D \supset E) \equiv \neg A \vee (\neg B \& \neg C) \vee (D \& \neg E)$. Последняя формула является искомой.

30. Подозреваются в совершении преступления Жан и Пьер. На суде выступили четыре свидетеля со следующими заявлениями:

- 1) Пьер не виноват;
- 2) Жан не виноват;
- 3) из первых двух показаний, по меньшей мере, одно истинно;
- 4) показания третьего свидетеля ложны.

Следствие установило, что четвертый свидетель прав. Кто преступники?

Решение. Простые высказывания «Пьер виноват» и «Жан виноват» обозначим высказывательными переменными P и G . Тогда показания свидетелей представляются формулами: 1) $\neg P$;

2) $\neg G$; 3) $\neg P \vee \neg G$; 4) $\neg(\neg P \vee \neg G)$. Имеем $\neg(\neg P \vee \neg G) = \text{И} \Rightarrow \neg\neg P \& \neg\neg G = \text{И} \Rightarrow P \& G = \text{И} \Rightarrow$ Пьер и Жан оба виноваты в преступлении.

31. Обосновать метод доказательства «разбором случаев»: для того, чтобы доказать формулу $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \supset B$ необходимо и достаточно доказать формулу $(A_1 \supset B) \& (A_2 \supset B) \& \dots \& (A_n \supset B)$.

Решение. Пусть формула $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \supset B$ ложна (то, что мы начинаем доказательство, предполагая, что формула ложна, а не истинна, продиктовано тем обстоятельством, что при этом выборе доказательство короче), тогда формула B ложна, а $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ истинна. Следовательно, существует такое i ($1 \leq i \leq n$), что A_i истинна и поэтому $A_i \supset B$ ложна. Отсюда следует, формула $(A_1 \supset B) \& (A_2 \supset B) \& \dots \& (A_n \supset B)$ ложна.

В обратную сторону. Пусть формула $(A_1 \supset B) \& (A_2 \supset B) \& \dots \& (A_n \supset B)$ ложна. Следовательно, существует такое i ($1 \leq i \leq n$), что $A_i \supset B$ ложна. Отсюда получаем, что A_i истинна и B ложна и, следовательно, $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ истинна и, наконец, $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \supset B$ ложна.

Задачи с множествами

32. Равны ли два множества $\{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ и $\{1,2,3\}$?

Нет, первое множество содержит два элемента $\{1,2\}$ и $\{2,3\}$, а второе три 1, 2, 3.

33. Доказать, что если конечное множество A содержит n элементов, то множество-степень $P(A)$ содержит 2^n элементов.

Докажем с помощью математической индукции по числу элементов n .

Базис индукции. Если $n=0$, то множество A пустое и $P(A) = \{\emptyset\}$ и утверждение выполнено.

Индуктивный переход. Пусть утверждение доказано для всех множеств с k элементами, докажем что оно выполнено и для множеств с $k+1$ элементами.

Пусть $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ и $B = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Множество всех подмножеств A , не содержащих элемент x_{k+1} , равно $P(B)$. Любое подмножество A , содержащее x_{k+1} , можно получить из соответствующего подмножества B , добавив элемент x_{k+1} . Поэтому и таких подмножеств A столько же, сколько элементов $P(B)$. Общее количество элементов в $P(A)$ тогда равно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Индуктивный переход доказан и тем самым доказано искомое утверждение.

34. Доказать, что для любых множеств A и B имеем $A \cup (A \cap B) = A$.

Если множество A пустое, то равенство очевидно.

Пусть теперь произвольное $x \in A$. Имеем $x \in A \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B)$ (так как $A \subseteq A \cup (A \cap B)$) $\Rightarrow A \subseteq A \cup (A \cap B)$. Наоборот, $x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in A$ или $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ или $(x \in A \text{ и } x \in B) \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \cup (A \cap B) \subseteq A$. Поэтому $A \cup (A \cap B) = A$.

35. Перечислить все элементы каждого из следующих множеств а) $\{x \mid x \subseteq \{1\}\}$; б) $\{x \mid x \subseteq \{1,2\}\}$; в) $\{x \mid x \subseteq \{1,2,3\}\}$; г) $\{x \mid x \subseteq \emptyset\}$.

Ответ: а) элементы $\{1\}, \emptyset$; б) элементы $\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset$; в) элементы $\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset$; г) элемент \emptyset .

36. Перечислите все подмножества множества A : а) $A = \{\{1,2\}, \{3\}, 1\}$; б) $A = \{\{1\}, \{2\}, 1\}$; в) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Ответы: а) подмножества: $A, \{\{1,2\}, \{3\}\}, \{\{1,2\}, 1\}, \{\{3\}, 1\}, \{\{1,2\}\}, \{\{3\}\}, \{1\}, \emptyset$; б) подмножества: $A, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, 1\}, \{\{2\}, 1\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{1\}, \emptyset$; в) подмножества: $A, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \emptyset$.

37. Вставьте между множествами символ \in или \subseteq так, чтобы получилось истинное высказывание: а) $\{1,2\} ? \{1,2, \{1\}, \{2\}\}$; б) $\{1\} ? \{1, \{1,2\}\}$; в) $\{1,2\} ? \{1, 2, \{1,2\}\}$;

г) $\emptyset ? \{1,2, \{1\}, \{\emptyset\}\}$; д) $\emptyset ? \{\{\emptyset\}\}$; е) $\emptyset ? \{\emptyset\}$.

Ответы: а) $\{1,2\} \subseteq \{1,2, \{1\}, \{2\}\}$; б) $\{1\} \subseteq \{1, \{1,2\}\}$; в) $\{1,2\} \subseteq \{1, 2, \{1,2\}\}$ или $\{1,2\} \in \{1, 2, \{1,2\}\}$; г) $\emptyset \subseteq \{1,2,\{1\},\{\emptyset\}\}$; д) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$; е) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ или $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

38. Докажите следующее утверждение: $A \subset B$ и $B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$.

Пусть $x \in A \Rightarrow x \in B$ (так как $A \subset B$) $\Rightarrow x \in C$ (так как $B \subseteq C$) $\Rightarrow A \subseteq C$. Докажем теперь, что $A \neq C$. Так как $A \subset B$, то найдется $x \in B$, не принадлежащий $A \Rightarrow$ этот $x \in C$ (так как $B \subseteq C$). Поэтому $A \subset C$.

39. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\neg A$, $\neg B$ для а) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $U = \{0,1,\dots,9\}$; б) $A = \{x \mid x \text{ делится на } 2\}$, $B = \{x \mid x \text{ делится на } 3\}$, $U = N$ – множество натуральных чисел.

Ответы: а) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B = \{2,3\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4,5\}$, $\neg A = \{0,4,5,6,7,8,9\}$, $\neg B = \{0,1,6,7,8,9\}$; б) $A \cup B = \{x \mid x \text{ делится на } 2 \text{ или на } 3\}$, $A \cap B = \{x \mid x \text{ делится на } 6\}$, $A \setminus B = \{x \mid x \text{ делится на } 2 \text{ и не делится на } 3\}$, $B \setminus A = \{x \mid x \text{ делится на } 3 \text{ и не делится на } 2\}$, $\neg A = \{x \mid x \text{ не делится на } 2\}$, $\neg B = \{x \mid x \text{ не делится на } 3\}$.

40. Докажите, что $\neg(A \setminus B) = \neg A \cup B$.

Доказательство. Пусть $x \in \neg(A \setminus B) \Leftrightarrow x \notin A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ и } x \in B)$ или $x \notin A \Leftrightarrow x \in A \cap B$ или $x \in \neg A \Leftrightarrow x \in \neg A \cup (A \cap B) = (\neg A \cup A) \cap (\neg A \cup B) = U \cap (\neg A \cup B) \Leftrightarrow x \in \neg A \cup B$.

41. Найдите множество X , удовлетворяющее следующему условию: $A \setminus (A \cap X) = \emptyset$.

Из условия имеем $A \subseteq A \cap X \Rightarrow A \cap X = \emptyset \Rightarrow$ наибольшее множество X , которое не имеет общих элементов с A , есть абсолютное дополнение к A , т. е. $X = \neg A$.

При решении задач подобного рода следует догадаться, каким будет искомое множество. Если имеется более одного уравнения для неизвестного множества, то ищите независимо решение для каждого уравнения, а общее решение есть пересечение найденных множеств. В любом случае найденное решение про-

верьте – подставьте найденное множество в уравнение (или уравнения).

42. Найдите соответствующее характеристическое свойство для каждого множества: а) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; б) $\{м, о, н, е, ж, т, с, в\}$; в) $[-2, 3]$.

Ответы: а) $\{x \mid x - \text{простое число меньше } 20\}$; б) $\{x \mid x \text{ является буквой слова «множество»}\}$; в) $\{x \mid x \in [-2, 3]\}$.

43. Приведите пример множеств A , B и C таких, чтобы выполнялись условия $A \in B$, $B \notin C$, $A \subseteq C$.

Одно из решений: $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$, $C = \{1, 2\}$.

44. Доказать тождество $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Доказательство. (Используем тождества алгебры множеств и тот факт, что $X \setminus Y = X \cap \neg Y$ для произвольных множеств X и Y .) $A \setminus (B \setminus C) = A \cap \neg(B \cap \neg C) = A \cap (\neg B \cup C) = (A \cap \neg B) \cup (A \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Задачи со словами «проверить тождество ...» решаются так:

1) сначала ищется контрпример (как правило, с помощью диаграммы Эйлера), т. е. множества, для которых указанное тождество не выполняется;

2) если контрпример найден, то делаем заключение – тождество не верно;

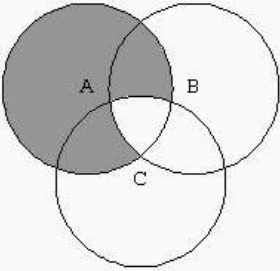
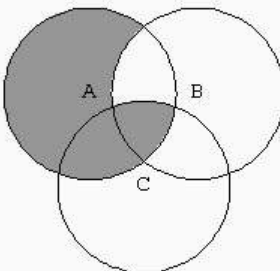
3) если контрпример не найден, то следует доказать справедливость тождества.

Аналогично следует поступать, когда требуется проверить не тождество, а какое-то другое отношение.

45. Проверить булево тождество

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \setminus C).$$

Решение.

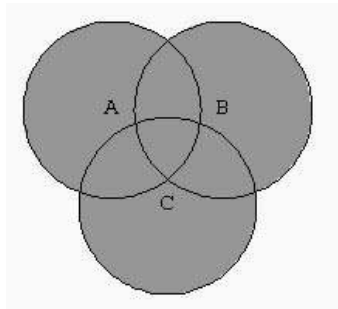
| Диаграмма Эйлера для левого множества $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ | Диаграмма Эйлера для правого множества $A \setminus (B \setminus C)$ |
|--|---|
|  |  |

Диаграммы показывают, что в данном частном случае множества $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ и $A \setminus (B \setminus C)$ не равны. Следовательно, тождество $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \setminus C)$ не выполняется в общем случае.

46. Проверить булево тождество

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

Решение. Построим диаграмму Эйлера для левого множества.



Построим диаграмму Эйлера для множества $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$.

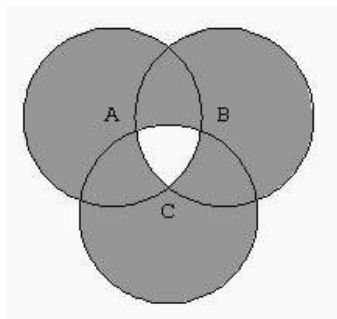
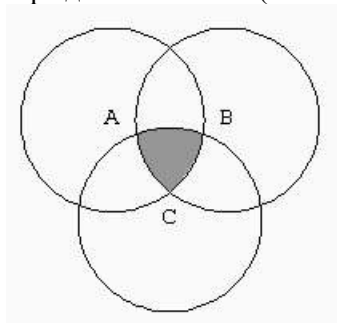
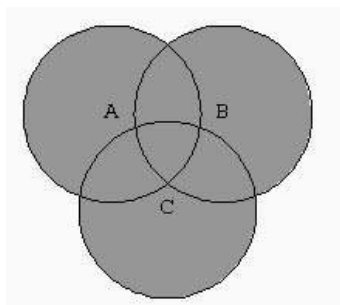


Диаграмма Эйлера для множества $(A \cap B \cap C)$ выглядит так



Следовательно, диаграмма Эйлера для множества $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$ получается как



Таким образом, для данных множеств A , B и C тождество выполняется.

Докажем, что оно выполняется в общем случае.

Поскольку $A \setminus B$, $B \setminus C$, $C \setminus A$ и $A \cap B \cap C$ являются подмножествами множества $A \cup B \cup C$, то объединение этих подмножеств также является подмножеством $A \cup B \cup C$. Таким образом, видим, что $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) \subseteq A \cup B \cup C$. Осталось доказать противоположное включение.

Пусть $x \in A \cup B \cup C$. Докажем, что $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$. Мы можем считать, что $x \in A$, если это не так, то аналогичное рассуждение проходит для $x \in B$ или $x \in C$.

Итак, пусть $x \in A$; имеется два варианта: а) $x \notin B$ и б) $x \in B$.

Вариант а. Если $x \notin B$, то $x \in A \setminus B$ и, следовательно, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$. Утверждение доказано.

Вариант б. Имеем $x \in B$. Здесь снова имеется два варианта: б1) $x \notin C$ и б2) $x \in C$.

Подвариант б1. Имеем $x \in B$ и $x \notin C$, тогда $x \in B \setminus C$, и, следовательно, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$. Утверждение доказано.

Подвариант б2. Имеем $x \in C$, $x \in B$ и $x \in A$, тогда $x \in A \cap B \cap C$ и, следовательно, $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$. Утверждение доказано.

47. Проверить, что $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \neg B \cup C$.

Решение. Сначала следует попробовать опровергнуть это утверждение, т.е. найти такие множества A , B и C , чтобы выполнялось отношение $A \cap B \subseteq C$, но не выполнялось $A \subseteq \neg B \cup C$ или, наоборот, выполнялось $A \subseteq \neg B \cup C$ и не выполнялось $A \cap B \subseteq C$. После безуспешных попыток найти такие множества следует доказать данное утверждение.

Доказательство распадается на два этапа.

1) Докажем сначала, что $A \cap B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq \neg B \cup C$. Таким образом, пусть $A \cap B \subseteq C$ выполнено, докажем, что $A \subseteq \neg B \cup C$. Поскольку требуется доказать включение множеств, то возьмем произвольный элемент $x \in A$ и убедимся, что $x \in \neg B \cup C$. Элемент x может принадлежать B и может не принадлежать B . Если $x \in B$, то $x \in A \cap B$. Так как дано, что $A \cap B \subseteq C$, то получаем $x \in C$ и, тем более, $x \in \neg B \cup C$. Теперь рассмотрим случай, когда $x \notin B$, тогда $x \in \neg B$ и, тем более, $x \in \neg B \cup C$.

2) Докажем теперь, что $A \subseteq \neg B \cup C \Rightarrow A \cap B \subseteq C$. Таким образом, пусть $A \subseteq \neg B \cup C$ выполнено, докажем, что $A \cap B \subseteq C$. Поскольку требуется доказать включение множеств, то возьмем произвольный элемент $x \in A \cap B$ и убедимся, что $x \in C$. Имеем, если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и, по условию, $x \in \neg B \cup C$. Так как одновременно $x \in B$, то $x \notin \neg B$ и, следовательно, $x \in C$. Доказательство закончено.

48. Проверить тождество

$$A \div (B \div C) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C) \setminus (B \cap C).$$

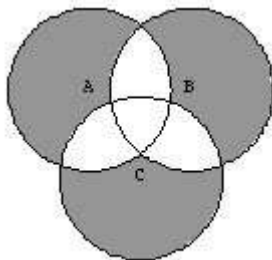
Решение. Построим диаграмму Эйлера для левого множества в два этапа.

| Диаграмма для множества $B \div C$ | Диаграмма для множества $A \div (B \div C)$ |
|------------------------------------|---|
| | |

Теперь построим диаграмму для правого множества в три этапа.

| Диаграмма для множества $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)$ | Диаграмма для множества $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ |
|--|---|
| | |

И окончательная диаграмма для множества $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C) \setminus (B \cap C)$:



Диаграммы показывают, что в данном частном случае множества $A \div (B \div C)$ и $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B) \setminus (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ не равны. Следовательно, тождество не выполняется в общем случае.

49. Проверить тождество

$$A \div (B \div C) = (A \div B) \div C.$$

Решение. Сначала следует попробовать опровергнуть это утверждение, т.е. найти такие множества A , B и C , чтобы диаграммы Эйлера для множеств $A \div (B \div C)$ и $(A \div B) \div C$ были разные. После безуспешных попыток найти такие множества следует доказать данное утверждение.

Используя основные тождества алгебры множеств, преобразуем левую и правую часть к одному множеству.

1. Начнем с левой части. $A \div (B \div C) =$ (по определению \div) $(A \setminus (B \div C)) \cup ((B \div C) \setminus A) = (A \cap \neg(B \div C)) \cup ((B \div C) \cap \neg A) =$ (по определению \div) $(A \cap \neg((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B))) \cup (((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B)) \cap \neg A)$. Преобразуем отдельно множества $(A \cap \neg((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B)))$ и $((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B)) \cap \neg A$.

а) $(A \cap \neg((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B))) =$ (закон де Моргана) $(A \cap (\neg(B \cap \neg C) \cap \neg(C \cap \neg B))) =$ (закон де Моргана) $(A \cap ((\neg B \cup \neg \neg C) \cap (\neg C \cup \neg \neg B))) = (A \cap ((\neg B \cup C) \cap (\neg C \cup B))) =$ (многократно применяя закон дистрибутивности) $(A \cap \neg B \cap \neg C) \cup (A \cap \neg B \cap B) \cup (A \cap C \cap \neg C) \cup (A \cap C \cap B) =$ (так как подчеркнутые множества – пустые) $(A \cap \neg B \cap \neg C) \cup (A \cap C \cap B)$.

б) Аналогично преобразуя множество $((B \cap \neg C) \cup (C \cap \neg B)) \cap \neg A$, получаем множество $(\neg A \cap B \cap \neg C) \cup (\neg A \cap C \cap \neg B)$. Таким образом, левая часть преобразована к множеству $(A \cap \neg B \cap \neg C) \cup (A \cap C \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B \cap \neg C) \cup (\neg A \cap C \cap \neg B)$.

2. Теперь преобразуем правую часть. $(A \div B) \div C =$ (так как операция \div коммутативна) $C \div (B \div A)$. Последнее множество совпадает с множеством $A \div (B \div C)$ при взаимной замене переменных A и C . Поэтому заключаем, что $(A \div B) \div C$ преобразуется к множеству, полученному из $(A \cap \neg B \cap \neg C) \cup (A \cap C \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B \cap \neg C) \cup (\neg A \cap C \cap \neg B)$ при взаимной замене переменных A и C . Таким образом, $(A \div B) \div C = (C \cap \neg B \cap \neg A) \cup (C \cap A \cap \neg B) \cup (\neg C \cap B \cap \neg A) \cup (\neg C \cap A \cap \neg B)$.

Множества, полученные в результате преобразования левой и правой части, совпали (если учитывать коммутативность пересечения и объединения). Следовательно, тождество доказано.

Варианты заданий

| | |
|-----------|---|
| Вариант 1 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые цыплята не кошки». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Все мои тетки не справедливы». |
| | 3. Перевести на формальный язык: У уравнения $x^5 - 5x^3 + 4x = 0$ нет решений, отличных от 0, 1, 2. Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |
| | 4. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x (F(x) \supset \forall y (x \neq y \supset \neg F(y)))$, где F – быть чемпионом. |

| | |
|--|--|
| | 5. Является ли тавтологией формула $(p \supset q) \supset ((p \& r) \supset (q \& r))$? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset (\neg r \supset \neg q)$, если $p \supset (q \supset r)$ имеет значение истина? |
| | 7. При каких значениях переменных формула $((x \vee y) \vee z) \supset ((x \vee y) \& (x \vee z))$ ложна? |
| | 8. Проверить тождество $(A \cap \neg B) \cup (\neg A \cap B) = (\neg A \cup B) \cap (A \cup \neg B)$. |
| | 9. Проверить тождество $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C$. |
| | 10. Проверить тождество $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. |

| | |
|-----------|---|
| Вариант 2 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Ничего не вижу, ничего не слышу, ничего не знаю». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Никто из нашего класса не поехал в Москву и Париж». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x(x \in R \supset \exists y(y \in R \& \sin y = 0 \& y > x))$. (R – множество вещественных чисел). |

| | |
|--|---|
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Ни один кошмарный сон не приятен». |
| | 5. Является ли тавтологией формула $((p \& q) \supset r) \sim (p \supset (q \supset r))$? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset \neg s$, если $p \supset q \equiv I$, $\neg s \supset \neg q \equiv I$. |
| | 7. При каких значениях переменных формула $(x \& y) \vee (x \& z) \vee (y \& z) \vee (u \& w) \vee (v \& w) \vee (\neg x \& \neg u)$ ложна? |
| | 8. Проверить тождество $A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B)$. |
| | 9. Проверить, что $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$. |
| | 10. Проверить, что $A \div B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$. |

| | |
|-----------|--|
| Вариант 3 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Чтобы не быть человеком, необходимо быть свиньей». |
| | 2. Перевести на формальный язык: У уравнения $ax^2 + bx + c + \varepsilon \sin x = 0$ ровно два решения. Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x (P(x) \vee C(x) \supset W(x))$, где P – быть пионером, C – быть комсомольцем, W – работать на субботнике. |

| | |
|--|---|
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Не все двоечники ленивы». |
| | 5. Является ли тавтологией формула $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Является ли тавтологией формула $(A \& (A \vee C) \& (B \vee C)) \sim ((A \& B) \vee (A \& C))$? |
| | 7. Является ли тавтологией формула $((P \supset Q) \& (R \supset Q) \& (T \supset (P \vee R))) \& T \supset Q$? |
| | 8. Пусть A, B, C – такие множества, что $B \subseteq A$, $A \cap C = \emptyset$. Найдите множество X , удовлетворяющее условиям $A \setminus X = B$ и $X \setminus A = C$. (X должно быть какой-то комбинацией множеств A, B и C .) |
| | 9. Следующее утверждение докажите или опровергните: $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$. |
| | 10. Проверить тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$. |

| | |
|-----------|--|
| Вариант 4 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Все битвы сопровождаются страшным шумом». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «В нашем классе ровно три отличника». Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |

| | |
|--|--|
| | <p>3. Перевести с формального языка на человеческий:</p> <p>$\forall x, y (Z(x) \& Z(y) \& V(x, y) \supset E(x, y) \& E(y, x))$, где Z – быть змеей, V – встречаться, $E(x, y)$ – x съедает y.</p> |
| | <p>4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум):</p> <p>«Ни один бездельник не станет знаменитостью».</p> |
| | <p>5. Является ли тавтологией формула $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$?</p> <p>Используйте метод доказательства от противного.</p> |
| | <p>6. Является ли тавтологией формула $(\neg A \supset \neg B) \supset (B \supset A)$?</p> |
| | <p>7. Является ли тавтологией формула $(P \supset Q) \sim (\neg P \vee Q)$?</p> |
| | <p>8. Решить систему уравнений</p> $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C \end{cases}$ <p>где A, B, C – данные множества: $B \subseteq A \subseteq C$. ($X$ должно быть какой-то комбинацией множеств A, B и C.)</p> |
| | <p>9. Проверить тождество $(A \cap B) \cup (A \cap \neg B) = (A \cup B) \cap (A \cup \neg B) = A$.</p> |
| | <p>10. Проверить тождество $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.</p> |

| | |
|-----------|---|
| Вариант 5 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые людоеды – плохие люди». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «В нашем цехе никто, кроме Иванова, Петрова, Васильева и Сидорова, не умеют играть в домино». Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\exists x \exists y (\sin x + ax + b = 0 \ \& \ \sin y + ay + b = 0 \ \& \ x \neq y)$. |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые художники не бездельники». |
| | 5. Является ли тавтологией формула $((p \supset q) \& p) \supset q$? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Является ли тавтологией формула $(P \supset Q) \sim (\neg Q \supset \neg P)$? |
| | 7. Является ли тавтологией формула $(P \supset Q) \supset ((P \supset (Q \supset R)) \supset (P \supset R))$? |
| | 8. Следующее утверждение докажите или опровергните: $(\neg A \cap B) \cup (\neg B \cap A) \subseteq B$. |
| | 9. Проверить тождество $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$. |
| | 10. Найдите множество X , удовлетворяющее условию $A \setminus X = A$ и $A \cup X = U$. (A – заданное множество, U – универсум; решение должно зависеть от A). |

| | |
|-----------|---|
| Вариант 6 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Мери любила Печорина, но не взаимно». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «В нашем классе есть единственный отличник». Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\exists n(n \in N \ \& \ x \cdot n + a = y)$. (N – множество натуральных чисел). |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые бездельники не художники». |
| | 5. Является ли тавтологией формула $((p \supset q) \& (r \supset s)) \supset ((p \vee r) \supset (q \vee s))$? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Является ли тавтологией формула $((A \vee B) \& (B \vee C) \& (C \vee A)) \sim ((A \& B) \vee (B \& C) \vee (C \& A))$? |
| | 7. Является ли тавтологией формула $(A \supset B) \supset ((C \vee A) \supset (C \vee B))$? |
| | 8. Проверить тождество $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. |
| | 9. Проверить, что $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$. |

| | |
|--|--|
| | 10. Найдите множество X , удовлетворяющее условию $A \setminus X = \emptyset$ и $A \cup X = A$. (A – заданное множество; решение должно зависеть от A). |
|--|--|

| | |
|--------------|---|
| Вариант 7 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Нет действительных чисел, больших 10^{10^0} ». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Если будешь хорошо учиться, поступишь в вуз, а иначе провалишься». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\exists x, y, z (Z(x) \& Z(y) \& Z(z) \& x \neq y \& y \neq z \& z \neq x) \supset \forall x Z(x)$, где Z – знать тайну. |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые подушки мягкие». |
| | 5. Является ли тавтологией формула $\neg(p \sim q) \sim (\neg(p \supset q) \vee \neg(q \supset p))$? |
| | 6. Докажите выполнимость $(P \supset Q) \supset (Q \supset P)$. |
| | 7. Является ли тавтологией формула $((A \vee B) \& (B \vee C) \& (C \vee D)) \sim ((A \& C) \vee (B \& C) \vee (B \& D))$? |
| | 8. Проверить, что $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$. |
| | 9. Проверить тождество $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$. |
| | 10. Проверить тождество $A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B)$. |

| | |
|-----------|--|
| Вариант 8 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Ни одному лысому не нужна расческа». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): У уравнения $f(x)=0$ не менее двух решений. Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x (O(x) \supset \forall y (T(y) \supset B(x, y)))$, где T – быть тигром, O – быть обезьяной, $B(x, y)$ – x боится y . |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Всякий орел умеет летать». |
| | 5. Является ли тавтологией формула $((A \supset B) \supset A) \supset A$? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Докажите равносильность (без таблицы истинности): $(A \& B) \vee (A \& C) \vee (B \& D) \vee (C \& D) \equiv (A \vee D) \& (B \vee C)$. |
| | 7. Доказать, что если $A \vee B$ и $\neg A \vee C$ – истинные высказывания, то $B \vee C$ – истина. |
| | 8. Проверить, что $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$. |
| | 9. Найдите множество X , удовлетворяющее условию $A \cap X = \emptyset$ и $A \cup X = U$. (A – заданное множество, U – универсум; решение должно зависеть от A). |

| | |
|--|--|
| | 10. Докажите тождество $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup D) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C)$. |
|--|--|

| | |
|-----------|---|
| Вариант 9 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Все мои тетки не справедливы». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): У Вани только один друг. Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x, y, z (x \neq y \ \& \ y \neq z \ \& \ z \neq x \supset f(x) \neq 0 \vee f(y) \neq 0 \vee f(z) \neq 0)$. |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые свиньи не умеют летать». |
| | 5. Формула $((p \supset q) \& (p \vee r) \& \neg r) \supset \neg p$ является ли тавтологией? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Является ли тавтологией формула $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$? |
| | 7. Является ли тавтологией формула $(A \supset (B \supset (C \supset C))) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset (C \supset C)))$? |
| | 8. Проверить, что $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ и $A \subseteq C$. |
| | 9. Проверить тождество $(\neg A \cup B) \cap A = A \cap B$. |

| | |
|--|---|
| | 10. Определить операции \cup и \setminus (каждую по отдельности) через операции \div и \cap . |
|--|---|

| | |
|------------|--|
| Вариант 10 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Одно из чисел a, b равно 0». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Стоят три женщины у колодца и не разговаривают». Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x, y (x > 1 \ \& \ y > 1 \ \& \ x = y^2 \supset x > y)$. |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые свиньи – не орлы». |
| | 5. Является ли тавтологией формула $A \supset (B \supset A)$? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Доказать равносильности (не используя основные равносильности): а) $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \ \& \ \neg B$; б) $A \equiv (A \vee B) \ \& \ (A \vee \neg B)$. |
| | 7. Является ли тавтологией формула $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$? |
| | 8. Определить операции \cup и \cap (каждую по отдельности) через операции \setminus и \div . |

| | |
|--|---|
| | 9. Проверить, что $A = \neg B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ и $A \cup B = U$. (U – универсум) |
| | 10. Докажите или опровергните: $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cap C)$. |

| | |
|------------|---|
| Вариант 11 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые лентяи не оптимисты, но жизнелюбы». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Два философа сидят за столом и спорят» Подсказка. Используйте предикат « \Rightarrow ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x(x \in R \supset \exists y(y \in R \ \& \ \sin y = 0 \ \& \ y > x))$. (R – множество вещественных чисел). |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Ни один судья не справедлив». |
| | 5. Является ли формула $((p \supset (q \supset r)) \& (\neg t \vee p) \& \neg q) \supset (t \supset r)$ тавтологией? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. При каких значениях переменных формула $(X \vee Y) \supset ((\neg X \& Y) \vee (X \& \neg Y))$ ложна? |
| | 7. Является ли формула $((p \vee q) \& (p \supset r) \& (q \supset t)) \supset (r \vee t)$ тавтологией? |

| | |
|--|---|
| | 8. Проверить, что $(A \cup B) \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ и } B \subseteq C$. |
| | 9. Проверить, что $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$. |
| | 10. Проверить тождество $A \div (A \div B) = B$. |

| | |
|------------|---|
| Вариант 12 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Тот, кто может укрощать крокодилов, заслуживает уважения». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «В нашем цехе никто, кроме Иванова, Петрова, Васильева и Сидорова, не умеют играть в домино». Подсказка. Используйте предикат « \Leftarrow ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\exists x (S(x) \& C(x) \& O(x)) \& \exists x (S(x) \& C(x) \& \neg O(x))$, где $S(x)$ – быть студентом, $C(x)$ – быть старательным, $O(x)$ – быть отличником. |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Все шутки для того и предназначены, чтобы смешить людей». |
| | 5. Является ли формула $((p \supset q) \& (q \supset p) \& (p \vee r) \& \neg r) \supset p$ тавтологией? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 6. Является ли формула $((p \supset q) \& (q \supset r) \& (\neg t \vee p) \& r) \supset (t \supset q)$ тавтологией? |

| | |
|--|---|
| | 7. Доказать равносильность (без таблицы истинности) $A \vee (\neg A \& B) \equiv A \vee B$. |
| | 8. Проверить, что $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = A \dot{\cup} B$. |
| | 9. Проверить тождество $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. |
| | 10. Следующее утверждение докажите или опровергните: если $A \subseteq \neg(B \cup C)$ и $B \subseteq \neg(A \cup C)$, то $B = \emptyset$. |

| | |
|------------|--|
| Вариант 13 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Нельзя быть одновременно великаном и лилипутом». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Точки A, B, C являются вершинами равнобедренного треугольника». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x, y (A(x) \& A(y) \& V(x, y) \supset P(x, y) \vee P(y, x))$, где A – быть акулой, V – встречаться, P – пожирать. |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Ни один парламентарский акт не шутка». |
| | 5. Формула $((p \supset q) \supset p) \supset p$ – тавтология, противоречие или не то и не другое? Используйте метод доказательства от противного. |

| | |
|--|--|
| | 6. Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset \neg t$, если формулы $p \supset q$, $\neg s \supset \neg q$ и $t \supset \neg s$ истинны? |
| | 7. Является ли формула $((p \supset q) \& (r \supset s)) \supset ((p \& r) \supset (q \& s))$ тавтологией? |
| | 8. Проверить тождество $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. |
| | 9. Проверить тождество $A \setminus B = A \div (A \cap B)$. |
| | 10. Проверить, что $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$. |

| | |
|------------|--|
| Вариант 14 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Иванов не может решать квадратные уравнения, если он трезвый, но видит бутылку». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Чтобы прийти на свадьбу, необходимо приглашение жениха или невесты». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\exists x (F(x) \& \forall y (F(y) \supset x = y))$, где F – быть чемпионом. |
| | 4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Пауки ткut паутину». |
| | 5. Является ли тавтологией формула $(\neg(p \supset q)) \sim (p \& \neg q)$? |

| | |
|--|---|
| | 6. Является ли тавтологией формула $((A \vee B) \& (A \vee C) \& (B \vee D) \& (C \vee D)) \sim ((A \& D) \vee (B \& C))$? |
| | 7. Является ли формула $((p \sim q) \& (p \vee r) \& \neg r) \supset (\neg q \supset p)$ тавтологией? Используйте метод доказательства от противного. |
| | 8. Проверить, что $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \cap B \subseteq C$. |
| | 9. Проверить, что $A \div B = C \Leftrightarrow B \div C = A \Leftrightarrow C \div A = B$. |
| | 10. Проверить, что $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$. ($P(A)$ – множество всех подмножеств множества A). Подсказка: $X \subseteq Y \Leftrightarrow X \in P(Y)$. |

| | |
|------------|---|
| Вариант 15 | 1. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Для того чтобы выполнялось равенство $x = \sqrt{x^2}$, необходимо и достаточно, чтобы x было положительным действительным числом». |
| | 2. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Все комплексные числа действительны или становятся действительными после умножения на i ». |
| | 3. Перевести с формального языка на человеческий: $\forall x (H(x) \supset \exists y (H(y) \& B(x, y) \& B(y, x)))$, где H – быть ханом, B – враждовать. |

| | |
|--|--|
| | <p>4. Перевести на формальный язык (обязательно указываете универсум): «Некоторые секретари – птицы».</p> |
| | <p>5. Является ли тавтологией формула $((p \supset q) \vee (r \supset s)) \supset ((p \& r) \supset (q \vee s))$? Используйте метод доказательства от противного.</p> |
| | <p>6. При каких значениях переменных формула $((x \vee y) \vee z) \supset ((x \vee y) \& (x \vee z))$ ложна?</p> |
| | <p>7. Является ли тавтологией формула $\neg(A \supset B) \sim (A \& \neg B)$?</p> |
| | <p>8. Докажите, что $B = (\neg A \cap B) \cup (\neg B \cap A) \Rightarrow A = \emptyset$. Подсказка. Доказывайте от противного: предположите, что существует $x \in A$. Рассмотрите два случая: а) $x \notin B$ и б) $x \in B$ и придите в обоих случаях к противоречию. Это покажет, что $A = \emptyset$.</p> |
| | <p>9. Найдите множество X, удовлетворяющее следующим условиям $A \setminus (A \cap X) = \emptyset$ и $A \cap X = \emptyset$.</p> |
| | <p>10. Проверить булево тождество $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A)$.</p> |

ВТОРОЕ КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Второе контрольное задание содержит задачи с различного рода отношениями, задачи на математическую индукцию, задачи на мощность множеств и скорость роста функций. Задание состоит из 10 задач: 4 задачи на отношения, 1 задача с функциями, 2 задачи с отношениями эквивалентности и порядка, 1 задача на применение математической индукции, 1 задача на мощность множества или нахождения интерпретации, 1 задача на определение скорости роста функций.

Примеры задач с решениями

Рекомендуется разобраться в решениях всех задач, приведенных в примерах. Это поможет выполнить контрольное задание и компьютерную экзаменационную работу.

Для краткости письма будем использовать иногда сокращения:

3) вместо слов «следует», «влечет» и т.п. будем писать символ \Rightarrow ;

4) вместо слов «тогда и только тогда, когда» будем писать символ \Leftrightarrow .

Задачи с отношениями

(см. раздел «3.3 Отношения» учебного пособия, особо обратите внимание на приведенные там примеры)

1. Пусть $A = \{0, 1\}$. Перечислите элементы множеств A^2, A^3 .

Решение. $A^2 = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$; $A^3 = \{ \langle 0, 0, 0 \rangle, \langle 0, 0, 1 \rangle, \langle 0, 1, 0 \rangle, \langle 0, 1, 1 \rangle, \langle 1, 0, 0 \rangle, \langle 1, 0, 1 \rangle, \langle 1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle \}$.

2. Определим упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ как множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Убедимся, что такое формальное теоретико-множественное определение вполне соответствует нашему неформальному определению упорядоченной пары. Для этого достаточно доказать, что для любых элементов $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a=c, b=d$.

Решение. Доказательство. Пусть $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow$ множества должны быть поэлементно равны и равенство возможно только в ситуации $\{a\} = \{c\}$ и $\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow a = c$ и $\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$.

3. Пусть $A \subseteq C, B \subseteq C$. Докажите, что $A \times B = (A \times C) \cap (C \times B)$.

Решение. Пусть $\langle a, b \rangle \in A \times B \Rightarrow a \in A, b \in B \Rightarrow (a \in A, b \in C)$ и $(a \in C, b \in B)$ (так как, $A \subseteq C, B \subseteq C$) $\Rightarrow \langle a, b \rangle \in A \times C$ и $\langle a, b \rangle \in C \times B \Rightarrow \langle a, b \rangle \in (A \times C) \cap (C \times B)$. Наоборот, пусть $\langle a, b \rangle \in (A \times C) \cap (C \times B) \Rightarrow \langle a, b \rangle \in A \times C, \langle a, b \rangle \in C \times B \Rightarrow a \in A, b \in B \Rightarrow \langle a, b \rangle \in A \times B$.

4. Докажите, что подмножество C множества $A \times B$ является прямым произведением некоторого подмножества $A1$ множества A и подмножества $B1$ множества B тогда и только тогда, когда для любых $\langle a, b \rangle \in C, \langle c, d \rangle \in C$ следует, что $\langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle \in C$.

Доказательство. Пусть $A1 \subseteq A, B1 \subseteq B, C = A1 \times B1$. Возьмем $\langle a, b \rangle \in C, \langle c, d \rangle \in C \Rightarrow a, c \in A1, b, d \in B1 \Rightarrow \langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle \in A1 \times B1 = C$. Наоборот, пусть выполнено условие: для любых $\langle a, b \rangle \in C, \langle c, d \rangle \in C$ следует, что $\langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle \in C$. Докажем теперь, что в качестве $A1$ и $B1$ можно взять соответственно область определения D и область значения R отношения, которое задается множеством пар C . Пусть $\langle a, d \rangle \in D \times R \Rightarrow$ существуют такие b и c , что $\langle a, b \rangle \in C$ и $\langle c, d \rangle \in C$ (это выполняется по определению D и R) $\Rightarrow \langle a, d \rangle \in C \Rightarrow D \times R \subseteq C$. Отношение $C \subseteq D \times R$ очевидно выполняется, поэтому $D \times R = C$.

5. Пусть A, B, C, D – непустые множества. Докажите, что а) $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$, б) $A \times C = B \times D \Leftrightarrow A = B$ и $C = D$.

Решение. а) Пусть $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$. Тогда $\langle a, c \rangle \in A \times C \Rightarrow a \in A, c \in C \Rightarrow a \in B, c \in D$ (так как $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$) $\Rightarrow \langle a, c \rangle \in B \times D$. В другую сторону. Пусть $A \times C \subseteq B \times D$. Тогда $a \in A, c \in C \Rightarrow \langle a, c \rangle \in A \times C \Rightarrow \langle a, c \rangle \in B \times D \Rightarrow a \in B, c \in D \Rightarrow A \subseteq B$ и $C \subseteq D$. Случай б) является следствием а).

6. Докажите тождество $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Доказательство. $\langle x, y \rangle \in (A \setminus B) \times C \Leftrightarrow x \in A \setminus B, y \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$ и $y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$ и $\langle x, y \rangle \notin B \times C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \setminus (B \times C)$.

7. Докажите, что $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Доказательство. $\langle x, y \rangle \in (A \times B) \cup (C \times D) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B$ или $\langle x, y \rangle \in C \times D \Rightarrow (x \in A \text{ или } x \in C) \text{ и } (y \in B \text{ или } y \in D) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

8. Для бинарного отношения $\rho = \{\langle x, y \rangle \mid x^2 + y^2 < 1\}$ найдите D_ρ и R_ρ .

Решение. $D_\rho = \{x \mid \text{существует } y \text{ такой, что } x^2 + y^2 < 1\} = \{x \mid -1 < x < 1\}$. Точно также $R_\rho = \{y \mid -1 < y < 1\}$.

9. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$. Для бинарного отношения $\rho = \langle a, X \rangle \in A \times B \mid a \in X$ найдите D_ρ и R_ρ .

Решение. $D_\rho = \{a \in A \mid \text{существует } X \in B \text{ такой, что } a \in X\} = \{1, 2, 3, 5\}$. $R_\rho = \{X \in B \mid \text{существует элемент } a \in A \text{ такой, что } a \in X\} = B$.

10. Какими свойствами обладает отношение $x \rho y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$, определенное на множестве действительных чисел?

Решение. Имеем а) для любого x выполнено $x^2 + x = x^2 + x \Rightarrow \rho$ рефлексивно; б) если $x^2 + x = y^2 + y \Rightarrow y^2 + y = x^2 + x \Rightarrow \rho$ симметрично; в) $x^2 + x = y^2 + y$ и $y^2 + y = z^2 + z \Rightarrow x^2 + x = z^2 + z \Rightarrow \rho$ транзитивно; г) проверим антисимметричность: имеем $2^2 + 2 = (-3)^2 + (-3)$ и 2 не равно $-3 \Rightarrow \rho$ не антисимметрично.

Ответ: отношение рефлексивно, симметрично, не транзитивно, не антисимметрично.

11. Какими свойствами обладает отношение ρ , определенное на множестве всех прямых плоскости: $x \rho y \Leftrightarrow x$ пересекается с y ?

Ответ: отношение рефлексивно, симметрично, не транзитивно, не антисимметрично.

12. Какими свойствами обладает отношение ρ , определенное на множестве всех прямых плоскости: $x \rho y \Leftrightarrow x$ не пересекается с y ?

Ответ: отношение не рефлексивно, симметрично, не транзитивно, не антисимметрично.

13. Пусть ρ – отношение на множестве X . Докажите:

а) ρ симметрично $\Leftrightarrow \rho^{-1} = \rho$;

б) ρ транзитивно $\Leftrightarrow \rho \circ \rho \subseteq \rho$;

в) ρ рефлексивно $\Rightarrow \rho \subseteq \rho \circ \rho$;

г) ρ рефлексивно и транзитивно $\Rightarrow \rho = \rho \circ \rho$.

Доказательство.

а) Пусть ρ симметрично. Возьмем $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ (по определению ρ^{-1}) $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \rho$ (так как ρ симметрично). Пусть теперь $\rho^{-1} = \rho$. Тогда $\langle x, y \rangle \in \rho \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \rho^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \rho \Leftrightarrow \rho$ симметрично.

б) Пусть ρ транзитивно. Тогда $\langle x, y \rangle \in \rho \circ \rho \Rightarrow$ существует такое z , что $\langle x, z \rangle \in \rho$ и $\langle z, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho$ (так как ρ транзитивно). Пусть теперь $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Тогда $\langle x, y \rangle \in \rho, \langle y, z \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho \circ \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$ (по условию, $\rho \circ \rho \subseteq \rho$) $\Rightarrow \rho$ транзитивно.

в) Пусть ρ рефлексивно. Тогда $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho$ (так как ρ рефлексивно) и $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho \circ \rho$ (по определению композиции отношений).

г) это утверждение следует из б) и в).

14. Какова характеристическая особенность декартовой диаграммы рефлексивного (симметричного, антисимметричного) отношения, определенного на множестве вещественных чисел \mathbf{R} ?

Ответ. Декартова диаграмма отношения ρ – это множество таких точек (x, y) плоскости, что $\langle x, y \rangle \in \rho$. Поэтому для рефлексивного отношения декартова диаграмма содержит прямую $y=x$; для симметричного отношения декартова диаграмма симметрична относительно прямой $y=x$; для антисимметричного отношения декартова диаграмма не содержит ни одной пары точек

(x, y) и (y, x) , $x \neq y$, симметричных относительно биссектрисы первой четверти.

15. Пусть $\rho_1 = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x \times y > 0 \}$, $\rho_2 = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x + y - \text{целое число} \}$. Найти $\rho_1 \circ \rho_2$.

Решение. $\rho_1 \circ \rho_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } \langle x, z \rangle \in \rho_2 \text{ и } \langle z, y \rangle \in \rho_1 \} = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } x + z - \text{целое число и } z \times y > 0 \}$. Если $y \neq 0$, то такое z всегда найдется. Поэтому $\rho_1 \circ \rho_2 = R \times (R \setminus \{0\})$.

16. Пусть $\rho_1 = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x \times y > 0 \}$, $\rho_2 = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x = y^2 \}$. Найти $\rho_1 \circ \rho_2$.

Решение. $\rho_1 \circ \rho_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } \langle x, z \rangle \in \rho_2 \text{ и } \langle z, y \rangle \in \rho_1 \} = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } x = z^2 \text{ и } z \times y > 0 \} = \{ \langle x, y \rangle \mid x > 0 \text{ \& } y \neq 0 \}$

17. Пусть ρ и φ – бинарные отношения, определенные на некотором множестве. Тогда $(\varphi \setminus \rho)^{-1} = \varphi^{-1} \setminus \rho^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\langle x, y \rangle \in (\varphi \setminus \rho)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \varphi \setminus \rho \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \varphi \text{ и } \langle y, x \rangle \notin \rho \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \varphi^{-1} \text{ и } \langle x, y \rangle \notin \rho^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \varphi^{-1} \setminus \rho^{-1}$.

18. Пусть $x \rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Определите ρ^{-1} , $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$.

Отношение ρ – рефлексивное, симметричное и транзитивное. Поэтому (см. упражнение 13) $\rho^{-1} = \rho$, $\rho \circ \rho = \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1} = (\rho \circ \rho)^{-1} = \rho$.

19. Пусть ρ – бинарное отношение на A и $e = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$. Доказать, что $\rho = e \Leftrightarrow \rho \circ \varphi = \varphi \circ \rho = \varphi$ для любого отношения φ на A .

Доказательство. Пусть $\rho \circ \varphi = \varphi \circ \rho = \varphi$ для любого отношения φ на $A \Rightarrow$ для $\varphi = e$ имеем $\rho = \rho \circ e = e$ (по определению e и по условию). Обратно, по определению e , имеем $e \circ \varphi = \varphi \circ e = e$ для любого отношения φ на A .

20. Какое обратное отношение к отношению «быть отцом».

Решение. Имеем $\langle x, y \rangle \in p \Leftrightarrow \langle x - \text{отец } y \rangle \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in p^{-1} \Leftrightarrow \langle y - \text{отец } x \rangle$. Поэтому обратное отношение есть « x – сын или дочь мужчины y ».

21. Построить композицию следующих отношений («Быть A » означает « x является A для y »): быть родителем, быть отцом. Рассмотрите две различные композиции в зависимости от порядка членов.

Решение. Имеем $\langle x, y \rangle \in p \Leftrightarrow \langle x - \text{родитель } y \rangle$, $\langle x, y \rangle \in \varphi \Leftrightarrow \langle x - \text{отец } y \rangle$. Поэтому $\varphi \circ p = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует } z \text{ такой, что } \langle x, z \rangle \in p \text{ и } \langle z, y \rangle \in \varphi \} = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует } z \text{ такой, что } x - \text{родитель } z \text{ и } z - \text{отец } y \} = \{ \langle x, y \rangle \mid x - \text{родитель отца } y \}$, $p \circ \varphi = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует } z \text{ такой, что } \langle x, z \rangle \in \varphi \text{ и } \langle z, y \rangle \in p \} = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует } z \text{ такой, что } x - \text{отец } z \text{ и } z - \text{родитель } y \} = \{ \langle x, y \rangle \mid x - \text{дедушка } y \}$.

22. На множестве $S = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ задано отношение R , определяемое как $\langle m, n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $m - n = 2$.

А) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.

Б) Является ли отношение R :

1) Рефлексивным?

2) Симметричным?

3) Транзитивным?

4) Антисимметричным?

Решение. А) $R = \{ \langle 3, 1 \rangle, \langle 5, 3 \rangle, \langle 7, 5 \rangle, \langle 9, 7 \rangle \}$. Б) Отношение R – не рефлексивно, так как, например, $\langle 1, 1 \rangle \notin R$. Отношение R – не симметричное, так как, например, $\langle 3, 1 \rangle \in R$, а $\langle 1, 3 \rangle \notin R$. Отношение R – не транзитивное, так как, например, $\langle 5, 3 \rangle \in R$ и $\langle 3, 1 \rangle \in R$, а $\langle 5, 1 \rangle \notin R$. Отношение R – антисимметричное, так как вообще нет пар вида $\langle x, y \rangle \in R$ и $\langle y, x \rangle \in R$ (см. раздел 3.3, замечание 2 из учебного пособия).

Задачи с функциями

(см. раздел «3.5 Функции» учебного пособия)

23. Укажите все сюръективные отображения множества $A = \{1, 2, 3\}$ на множество $B = \{a, b\}$.

Решение удобно изобразить диаграммой (рис. 1).

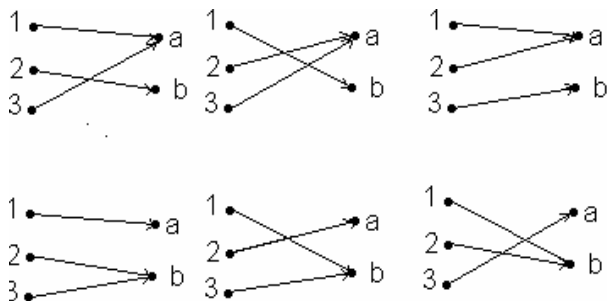


Рис. 1 – Все сюръективные отображения $f: A \rightarrow B$

24. Найдите все отображения множества $A = \{1, 2\}$ в себя, укажите, какие из них инъективные, сюръективные.

Решение удобно изобразить диаграммой (рис. 2).

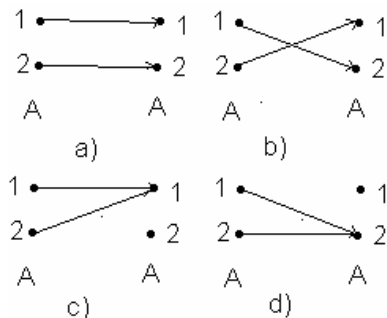


Рис. 2 – Все отображения A в себя:
а) и б) инъективные и сюръективные
отображения

25. Пусть X – конечное множество и отображение $f: X \rightarrow X$ инъективно. Доказать, что тогда f биективно.

Доказательство. Достаточно показать, что отображение сюръективно, т. е. область значений совпадает с X . Из конечности и инъективности отображения f следует, что количество элементов во множестве значений должно быть такое же, как и в X , но это множество значений является подмножеством X , поэтому любой элемент из X должен быть значением некоторого элемента при отображении f .

26. Характеристическая функция множества A определяется следующим образом

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Доказать:

- a) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \chi_B(x)$;
- b) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \chi_B(x)$;
- c) $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$;
- d) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \chi_B(x)$.

Доказательство. а) Пусть $x \in A \cap B \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = 1$. С другой стороны, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A, x \in B \Rightarrow \chi_A(x) \chi_B(x) = 1 \times 1 = 1$. Пусть $x \notin A \cap B \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = 0$. С другой стороны, $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Rightarrow \chi_A(x) \chi_B(x) = 0$. с) Очевидно, так как $x \in A \Leftrightarrow x \notin \bar{A}$. б) Из а) и с) и $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_C(x)$, где $C = \neg(\neg A \cap \neg B)$, следует, что $\chi_{A \cup B}(x) = 1 - \chi_{\neg A \cap \neg B}(x) = 1 - (\neg \chi_A(x))(1 - \chi_B(x)) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \chi_B(x)$. d) Доказывается аналогично.

27. Пусть $f: X \rightarrow Y$ и A, B – подмножества Y . Доказать, что $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Доказательство. $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A$ или $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ или $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

28. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – конечное множество. Определим отображение

$f: P(A) \rightarrow \{0, 1\}^n$ следующим образом:

$f(B) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$, где $\alpha_i = 0$, если $a_i \notin B$, и $\alpha_i = 1$, если $a_i \in B$.

Докажите, что f – биекция.

Доказательство. Докажем сначала, что f – сюръективное отображение. Пусть $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle \in \{0, 1\}^n$. Нетрудно видеть, что если возьмем в качестве B множество тех элементов $a_i \in A$, для которых $\alpha_i = 1$, то $f(B) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$. Теперь докажем инъективность. Пусть B_1 и B_2 – два различных непустых подмножества $A \Rightarrow$ существует элемент $a_i \in A$, $a_i \notin (B_1 \cup B_2) \setminus (B_1 \cap B_2) \Rightarrow \alpha_i = 1$ принадлежит $f(B_1)$ или $f(B_2)$, но не одновременно $\Rightarrow f(B_1) \neq f(B_2)$. Если же, скажем, B_1 – пустое множество, а B_2 – нет, то $f(B_1)$ состоит из одних нулей, $f(B_2)$ – нет. Биjectивность f доказана.

29. Найдите прообраз множества $\{0\}$ при следующих отображениях $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$:

- a) $x \rightarrow \sin(x)$;
- b) $x \rightarrow \lg(x^2 + 1)$;
- c) $x \rightarrow x^2 + 2x + 1$.

Решение. $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 0\}$. Поэтому: a) $\{\pi n \mid n - \text{целое}\}$; b) \emptyset ; c) $\{-1\}$.

30. Какие отображения инъективны, сюръективны?

- a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^2 + 3x + 5$;
- b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^{15}(x^2 - 1)$;
- c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow 2^{3x+1}$;
- d) $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, \langle a, b \rangle \rightarrow a + b$, \mathbf{Z} – множество целых чисел;
- e) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, a \rightarrow \langle a, a \rangle$;
- f) $f: P(A) \rightarrow N, f(X) =$ количество элементов в X , N – множество неотрицательных целых чисел, A – конечное множество.

Решение.

a) f – не сюръективно (не принимает значения меньше минимума функции), не инъективно (любое значение принимает в двух точках);

b) f – сюръективно (так как $\lim f$ в $+\infty$ и $-\infty$ равен соответственно $+\infty$ и $-\infty$, т. е. функция пробегает все значения), не инъективно, так как $f(-1) = f(1) = 0$;

с) f – не сюръективна (так как всегда больше 0), инъективна (существует обратная функция на положительной оси);

д) f – сюръективна, но не инъективна, так как любое целое число можно несколькими способами представить в виде суммы двух слагаемых;

е) f – не сюръективна, инъективна;

ф) f – не сюръективна (значение $f(X)$ не может быть больше количества элементов в A), не инъективна, если A содержит более одного элемента (значения f совпадают на подмножествах A с одинаковым количеством элементов).

Задачи с отношениями эквивалентности и порядка

(см. раздел «3.4 Эквивалентность и порядок»; изучите приведенные там примеры)

31. Пусть отношение ρ определено на множестве N^2 (N – множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \dots\}$):

$\langle x, y \rangle \rho \langle u, v \rangle \Leftrightarrow x+v = y+u$. Доказать, что ρ – отношение эквивалентности.

Доказательство. Для любого $\langle x, y \rangle \in N^2$ имеем $x+y = y+x \Rightarrow \rho$ рефлексивно.

Пусть $\langle x, y \rangle \rho \langle u, v \rangle \Rightarrow x+v = y+u \Rightarrow u+y = v+x \Rightarrow \langle u, v \rangle \rho \langle x, y \rangle \Rightarrow \rho$ симметрично. Пусть $\langle x, y \rangle \rho \langle u, v \rangle$ и $\langle u, v \rangle \rho \langle w, z \rangle \Rightarrow x+v = y+u$ и $u+z = v+w \Rightarrow$ (сложим два равенства почленно) $x+z = y+w \Rightarrow \langle x, y \rangle \rho \langle w, z \rangle \Rightarrow \rho$ транзитивно. Доказательство закончено.

32. Если ρ и φ – отношения эквивалентности на X , то $\rho \cap \varphi$ также отношение эквивалентности на X .

Доказательство. Для любого $x \in X$ имеем $\langle x, x \rangle \in \rho$ и $\langle x, x \rangle \in \varphi$ (из-за рефлексивности ρ и φ) $\Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \rho \cap \varphi$ рефлексивно. Пусть $\langle x, y \rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho$ и $\langle x, y \rangle \in \varphi \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ и $\langle y, x \rangle \in \varphi$ (из-за симметричности ρ и φ) $\Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \rho \cap \varphi$ симметрично. Пусть $\langle x, y \rangle \in \rho \cap \varphi$ и $\langle y, z \rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho$, $\langle x, y \rangle \in \varphi$, $\langle y, z \rangle \in \rho$, $\langle y, z \rangle \in \varphi \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$ и $\langle x, z \rangle \in \varphi$ (из-за транзитивности ρ и φ) $\Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \rho \cap \varphi$ транзитивно $\Rightarrow \rho \cap \varphi$ – отношение эквивалентности.

33. Если ρ и φ – отношения эквивалентности на X , то $\rho \cup \varphi$ – отношение эквивалентности на $X \Leftrightarrow \rho \cup \varphi = \rho \circ \varphi$.

Доказательство. а) Пусть $\rho \cup \varphi$ – отношение эквивалентности на X , докажем, что $\rho \cup \varphi = \rho \circ \varphi$. Пусть $\langle x, y \rangle \in \rho \cup \varphi \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho$ или $\langle x, y \rangle \in \varphi \Rightarrow$ для определенности будем считать, что $\langle x, y \rangle \in \rho$ (точно также доказывается в случае $\langle x, y \rangle \in \varphi$) $\Rightarrow \langle x, x \rangle \in \varphi$ (так как φ рефлексивно) и $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho \circ \varphi$ (по определению композиции). В обратную сторону, $\langle x, y \rangle \in \rho \circ \varphi \Rightarrow$ существует такой $z \in X$, что $\langle x, z \rangle \in \varphi$ и $\langle z, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \varphi \cup \rho$ и $\langle z, y \rangle \in \rho \cup \varphi \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho \cup \varphi$ (поскольку $\rho \cup \varphi$ – отношение эквивалентности, и, следовательно, транзитивно).

б) Пусть $\rho \cup \varphi = \rho \circ \varphi$ (поскольку ρ и φ входят в $\rho \cup \varphi$ симметричным образом, то также имеем $\rho \cup \varphi = \varphi \circ \rho$), докажем, что $\rho \cup \varphi$ – отношение эквивалентности на X . Имеем $(\rho \cup \varphi)^{-1} = (\rho \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \rho^{-1} = \varphi \circ \rho = \varphi \cup \rho = \rho \cup \varphi \Rightarrow \rho \cup \varphi$ симметрично (см. задачу 13 из примеров задач с отношениями). Используя задачу 13, докажем транзитивность $\rho \cup \varphi$, для этого убедимся, что $(\rho \cup \varphi)^\circ (\rho \cup \varphi) \subseteq \rho \cup \varphi$. Имеем $(\rho \cup \varphi)^\circ (\rho \cup \varphi) = (\rho^\circ \varphi)^\circ (\rho^\circ \varphi) =$ (из-за ассоциативности композиции) $\rho^\circ (\varphi^\circ \rho)^\circ \varphi = \rho^\circ (\rho^\circ \varphi)^\circ \varphi = (\rho^\circ \rho)^\circ (\varphi^\circ \varphi) = \rho^\circ \varphi$. Осталось теперь доказать, что $\rho \cup \varphi$ рефлексивно. Пусть $x \in X \Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho$ и $\langle x, x \rangle \in \varphi$ (так как ρ и φ рефлексивны) $\Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho \cup \varphi$. Доказательство закончено.

34. Если ρ – частичный порядок на X , то ρ^{-1} также частичный порядок на X .

Доказательство. Рефлексивность: $\langle x, x \rangle \in \rho \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in \rho^{-1}$. Антисимметричность: пусть $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1}$ и $\langle y, x \rangle \in \rho^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ и $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow x = y$. Транзитивность: пусть $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1}$ и $\langle y, z \rangle \in \rho^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ и $\langle z, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle z, x \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho^{-1}$.

35. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. На множестве $P(A)$ задано бинарное отношение $X \rho Y \Leftrightarrow$ «множества X и Y имеют равное количество элементов». Докажите, что это отношение эквивалентности и найдите классы эквивалентности.

Решение. Рефлексивность: $X \rho X$ для любого подмножества A . Симметричность: $X \rho Y \Leftrightarrow$ «множества X и Y имеют равное

количество элементов» $\Leftrightarrow Y \rho X$. Транзитивность: $X \rho Y$ и $Y \rho Z \Leftrightarrow$ «множества X и Y имеют равное количество элементов» и «множества Z и Y имеют равное количество элементов» \Rightarrow «множества X и Z имеют равное количество элементов» $\Rightarrow X \rho Z$. Классы эквивалентности: $\{A\}, \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \emptyset$.

36. Докажите, что $M = \{\{1\}, \{2,5\}, \{3\}, \{4,6,7\}\}$ – разбиение множества $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Перечислите все элементы отношения эквивалентности ρ , соответствующего разбиению M .

Решение. Каждый элемент из A принадлежит какому-то элементу из M , причем только одному, следовательно, M – разбиение A . $\rho = \{<1,1>, <2,2>, <5,5>, <2,5>, <5,2>, <3,3>, <4,4>, <6,6>, <7,7>, <4,7>, <7,4>, <4,6>, <6,4>, <6,7>, <7,6>\}$.

37. Докажите, что отношение делимости на множестве натуральных чисел N является отношением частичного порядка. Является ли это отношение линейным порядком? Является ли отношением частичного порядка отношение делимости на множестве целых чисел Z ?

Решение. Для краткости вместо « a делит b (a делитель b)» будем писать $a|b$. Рефлексивность: $a|a$. Антисимметричность: $a|b$ и $b|a \Rightarrow a = b$ (так как для натуральных чисел $a|b \Rightarrow a \leq b$). Транзитивность: $a|b$ и $b|c \Rightarrow a|c$. Отношение делимости является частичным порядком на множестве N .

Линейным порядком не является, так как, например, ложно $2|3$ и ложно $3|2$.

Отношение делимости на множестве целых чисел Z не является отношением частичного порядка – не выполнена антисимметричность: $1|-1$ и $-1|1$.

38. Построить линейный порядок: а) на множестве N^2 ; б) на множестве $N \cup N^2 \cup \dots \cup N^n \cup \dots = \{\text{все конечные последовательности из натуральных чисел}\}$.

Решение. а) Определим отношение линейного порядка ρ на N^2 следующим образом: $\langle x, y \rangle \rho \langle z, w \rangle \Leftrightarrow (x < z) \vee ((x = z) \& (y \leq w))$. б) Отношением частичного порядка на множестве всех конеч-

ных последовательностей натуральных чисел будет лексикографический порядок.

39. Пусть $T = \{5, 3, 7\}$. На множестве $T \times T$ задано отношение R , определяемое следующим образом: $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$, если $a - b = c - d$.

а) Показать, что R есть отношение эквивалентности.

б) Описать классы эквивалентности.

Решение. а) Рефлексивность: для любого $\langle a, b \rangle \in T \times T$ имеем $a - b = a - b$, т.е. $\langle a, b \rangle R \langle a, b \rangle$. Симметричность: пусть $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle \Rightarrow a - b = c - d \Rightarrow c - d = a - b \Rightarrow \langle c, d \rangle R \langle a, b \rangle$. Транзитивность: $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$ и $\langle c, d \rangle R \langle w, z \rangle \Rightarrow a - b = c - d$ и $c - d = w - z \Rightarrow$ (сложим два равенства) $a - b = w - z \Rightarrow \langle a, b \rangle R \langle w, z \rangle$. Следовательно, R – отношение эквивалентности.

б) Классы эквивалентности: $[\langle 5, 5 \rangle] = \{\langle x, y \rangle \in T \times T \mid x - y = 0\} = \{\langle 5, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 7, 7 \rangle\} = \{\langle 3, 3 \rangle\} = [\langle 7, 7 \rangle]$;

$[\langle 5, 3 \rangle] = \{\langle x, y \rangle \in T \times T \mid x - y = 2\} = \{\langle 5, 3 \rangle, \langle 7, 5 \rangle\} = [\langle 7, 5 \rangle]$;

$[\langle 3, 5 \rangle] = \{\langle x, y \rangle \in T \times T \mid x - y = -2\} = \{\langle 3, 5 \rangle, \langle 5, 7 \rangle\} = [\langle 5, 7 \rangle]$;

$[3, 7] = \{\langle x, y \rangle \in T \times T \mid x - y = -4\} = \{\langle 3, 7 \rangle\}$;

$[7, 3] = \{\langle x, y \rangle \in T \times T \mid x - y = 4\} = \{\langle 7, 3 \rangle\}$.

Таким образом, классами эквивалентности являются следующие множества: $\{\langle 5, 5 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 7, 7 \rangle\}$, $\{\langle 5, 3 \rangle, \langle 7, 5 \rangle\}$, $\{\langle 3, 5 \rangle, \langle 5, 7 \rangle\}$, $\{\langle 3, 7 \rangle\}$ и $\{\langle 7, 3 \rangle\}$.

Задачи на математическую индукцию и мощность множеств

О математической индукции см. раздел «4.2 Математическая индукция» учебного пособия. Пример решения задачи на использование математической индукции.

40. Докажите, что $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство.

Пусть S_n есть утверждение $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Базис индукции. Докажем S_1 . При $n=1$ левая часть равенства $1 + 2 + 3 + \dots + n$ равна 1. Справа получаем

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

так что S_1 истинно.

Индуктивный переход. Предполагаем, что для любого положительного числа k утверждение S_k истинно. Это означает, что

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (1)$$

Теперь необходимо доказать, что S_{k+1} истинно. Другими словами, требуется доказать, что

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}. \quad (2)$$

Используя предположение (1) и сравнивая это равенство с (2), замечаем, что, добавив $k+1$ к обеим частям равенства (1), получим левую и правую части искомого равенства:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \\ &= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}. \end{aligned}$$

Итак, доказано равенство (2). Этот результат обеспечивает истинность S_{k+1} . Следовательно, в силу принципа математической индукции, S_n истинно для любого положительного целого числа n .

При решении задач, связанных с мощностью множеств, см. раздел «3.6 Мощность множеств» учебного пособия.

Задачи с предикатами и интерпретацией

41. Пример

Рассмотрим три формулы:

- 1) $A(x, y)$;
- 2) $\forall y A(x, y)$;

3) $\exists x \forall y A(x, y)$.

1. Возьмем в качестве области интерпретации множество целых положительных чисел и интерпретируем $A(x, y)$ как $x \leq y$. Тогда первая формула – это предикат $x \leq y$, который принимает истинное значение для всех пар a, b целых положительных чисел таких, что $a \leq b$. Вторая формула выражает свойство: «для каждого целого положительного числа y имеем $x \leq y$ », которое выполняется только при $x=1$. Наконец, третья формула – это истинное высказывание о существовании наименьшего целого положительного числа.

2. Если бы в качестве области интерпретации мы рассматривали множество целых чисел, то третья формула была бы ложным высказыванием.

3. Возьмем в качестве области интерпретации множество людей и интерпретируем $A(x, y)$ как « x – женщина-предок y ». Тогда первая формула – это предикат, который принимает истинное значение для всех пар a, b людей таких, что a является прародительницей b . Вторая формула выражает свойство: «для каждого человека y имеем x – прародительница y », которое ложно при всех x . (Если даже считать, что библейская Ева существовала, то $A(\text{Ева}, \text{Ева})$ – ложно.) Наконец, третья формула – это ложное высказывание о существовании единственной прародительницы всех людей, в том числе, и самой себя.

42. На интерпретации из двух предметов, варьируя значение R , проверьте, всегда ли истинны следующие формулы:

1. $\forall x \exists y R(x, y) \supset \forall y \exists x R(x, y)$,
2. $\forall x \exists y R(x, y) \supset \exists x \forall y R(x, y)$,
3. $\exists x \forall y R(x, y) \supset \forall x \exists y R(x, y)$,
4. $\forall y R(y, y) \supset \forall x \exists y R(x, y)$.

Подсказка. Пусть область интерпретации $M = \{a, b\}$. Тогда R есть одно из подмножеств $M \times M$. Выбирая различные R , можно проверить требуемые свойства. Всего число различных R равно $2^4 = 16$, каждое R содержит не более четырех упорядоченных пар.

Например, проверим на истинность формулу $\forall x \exists y R(x, y)$. Одно из R есть $\{<a, a>, <b, b>, <a, b>\}$. Для такой интерпретации формула истинна. Но если взять интерпретацию $\{<a, a>, <a, b>\}$, то для $x=b$ формула $\exists y R(a, y)$ ложна, следовательно, и ложна формула $\forall x \exists y R(x, y)$.

43. Формула $\forall x R(x, y) \supset \exists x R(x, y)$ будет истинной в любой интерпретации.

Сравнения скорости роста

44. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть $O(\text{следующая})$), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость.

$$f_1(n) = n!;$$

$$f_2(n) = n^2;$$

$$f_3(n) = \ln n;$$

$$f_4(n) = n (\ln n).$$

Решение. Для этих функций правильный порядок следующий:

$$\ln n = O(n (\ln n)), n (\ln n) = O(n^2), n^2 = O(n!).$$

Для того чтобы убедиться в справедливости $f(n) = O(g(n))$ существуют два строгих способа:

1) доказать, что, начиная с некоторого n_0 , для всех больших значений n , имеем $f(n) \leq c (g(n))$, где c – некоторое положительное число;

$$2) \text{ обнаружить, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty;$$

и два эвристических способа:

3) начертить графики функций $f(n)$ и $g(n)$ и усмотреть, что график первой функции «в бесконечности» находится ниже графика второй функции;

4) догадаться.

Варианты заданий

| | |
|-----------|---|
| Вариант 1 | <p>1. Для бинарного отношения $X \rho Y \Leftrightarrow \langle X \cap Y = \emptyset \rangle$, определенного на множестве подмножеств множества целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
| | <p>2. Построить композицию следующих отношений (математические формулы рассматриваются на множестве действительных чисел): $x = e^y$, $x = \sin y$ (возможны две композиции, в зависимости от порядка отношений).</p> |
| | <p>3. Для бинарного отношения ρ между элементами множеств $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$, $a \rho X \Leftrightarrow a \notin X$ найдите область определения D_ρ и область значений R_ρ.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle y = x \rangle$, определенного на множестве \mathbf{R} вещественных чисел.</p> |
| | <p>5. Докажите, что композиция инъективных отображений – инъективное отображение.</p> |
| | <p>6. Является ли отношением эквивалентности объединение двух отношений эквивалентностей?</p> |
| | <p>7. На множестве вещественных чисел \mathbf{R} задано бинарное отношение $a \rho b \Leftrightarrow a^2 + a = b^2 + b$. Докажите, что ρ – отношение эквивалентности. Сколько элементов в классе эквивалентности?</p> |

| | |
|--|--|
| | <p>8. Используя математическую индукцию, докажите, что</p> $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$ |
| | <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом:</p> $\begin{aligned} f(1) &= \{1, 2, 3, 4\}, \\ f(2) &= \{1, 4\}, \\ f(3) &= \{2, 3, 4\}, \\ f(4) &= \emptyset, \\ f(5) &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ f(6) &= \{1, 3\}. \end{aligned}$ <p>Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> |
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O(следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = 2^{(2^n)}, \quad f_2(n) = \ln(n!), \quad f_3(n) = n(\ln n),$ $f_4(n) = n.$ |

| | |
|-----------|--|
| Вариант 2 | <p>1. Для бинарного отношения $xру \Leftrightarrow$ «$у$ делится нацело на $х$», определенного на множестве положительных целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
|-----------|--|

| | |
|--|--|
| | <p>2. Построить композицию следующих отношений (математические формулы рассматриваются на множестве действительных чисел): $x^2 = y, y^2 = x$ (возможны две композиции, в зависимости от порядка отношений).</p> |
| | <p>3. Докажите тождество $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения $\rho^{-1}, \rho \circ \rho, \rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle x^2 + y^2 = 1 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{Z} целых чисел.</p> |
| | <p>5. Найдите $f(A)$, где $A = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3 \}$ для следующих отображений: а) $f: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle$; б) $f: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle -y, -x \rangle$. Изобразите на плоскости множества A и $f(A)$.</p> |
| | <p>6. Является ли отношением эквивалентности пересечение двух отношений эквивалентностей?</p> |
| | <p>7. Пусть $f: A \rightarrow B$ – отображение. Определите на множестве A бинарное отношение $x \rho y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Докажите, что ρ – отношение эквивалентности. Опишите классы эквивалентности. Для какого отображения каждый класс эквивалентности состоит точно из одного элемента?</p> |
| | <p>8. Используя математическую индукцию, докажите, что</p> $1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}.$ |

| | |
|--|--|
| | <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом:</p> $f(1) = \{2, 3, 4\},$ $f(2) = \{1, 4\},$ $f(3) = \{2, 4, 1\},$ $f(4) = \emptyset,$ $f(5) = \{1, 2, 3, 4, 6\},$ $f(6) = \{1, 3, 5\}.$ <p>Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> |
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть $O(\text{следующая})$), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = n^3, f_2(n) = 2^{(2^{1+n})}, f_3(n) = n^2, f_4(n) = (\ln n)^2.$ |

| | |
|-----------|--|
| Вариант 3 | <p>1. Для бинарного отношения $xру \Leftrightarrow \langle x \text{ перпендикулярна } y \rangle$, определенного на множестве всех прямых плоскости, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
| | <p>2. Построить композицию следующих отношений (математические формулы рассматриваются на множестве действительных чисел):</p> $x > y, y > x$ <p>(возможны две композиции, в зависимости от порядка отношений).</p> |

| | |
|--|--|
| | 3. Пусть ρ и φ – бинарные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cap \varphi)^{-1} = \rho^{-1} \cap \varphi^{-1}$. |
| | 4. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \perp$ « x перпендикулярна y », определенного на множестве всех прямых на плоскости. |
| | 5. Доказать тождество для любой функции f : $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$. |
| | 6. Является ли отношением эквивалентности отношение: различаться по модулю не более чем на 1. |
| | 7. На множестве σ всех отображений \mathbf{R} в \mathbf{R} определено отношение $f \rho g \Leftrightarrow$ «существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что для всех $x \in \mathbf{R}$ имеем $f(x) = g(x) + c$ ». Докажите, что ρ – отношение эквивалентности. |
| | 8. Используя математическую индукцию, докажите, что $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$ |
| | 9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом: $f(1) = \{1, 2, 3, 4\},$ $f(2) = \{1, 2, 5\},$ $f(3) = \{2, 3, 4, 5\},$ $f(4) = \{4\},$ $f(5) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$ $f(6) = \{5, 3, 6\}.$ Опишите множество W , отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия. |

| | |
|--|--|
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть $O(\text{следующая})$), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = n, f_2(n) = \ln(n!), f_3(n) = 2^{\sqrt{\ln n}}, f_4(n) = n^2.$ |
|--|--|

| | |
|-----------|---|
| Вариант 4 | <p>1. Для бинарного отношения $XrY \Leftrightarrow \langle X \subset Y \rangle$, определенного на множестве всех подмножеств множества целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
| | <p>2. Построить композицию следующих отношений («Быть A» означает «x является A для y»): быть мужем, быть отцом (возможны две композиции, в зависимости от порядка отношений).</p> |
| | <p>3. Пусть ρ и φ – антисимметричные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cap \varphi)^{-1}$ – антисимметричное отношение.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle x - y \text{ делится нацело на } 3 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{Z} целых чисел.</p> |
| | <p>5. Найдите $f(A)$, где $A = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = 2x + 3 \}$ для следующих отображений: а) $f: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle x, -y \rangle$; б) $f: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle y - 2, x + 2 \rangle$. Изобразите на плоскости множества A и $f(A)$.</p> |

| | |
|--|--|
| | 6. Является ли отношением эквивалентности отношение: различаться на рациональное число (на множестве действительных чисел). |
| | 7. Докажите, что $M = \{\{1,2,3\}\}$ – разбиение множества $A = \{1,2,3\}$. Перечислите все элементы отношения эквивалентности, соответствующего разбиению M . |
| | <p>8. Где ошибка в следующем доказательстве? Теорема. Пусть a – любое положительное число. Для положительных целых чисел n имеем $a^{n-1} = 1$. Доказательство. Если $n=1$, то $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$. Применяя метод индукции и предполагая, что теорема верна для $1, 2, \dots, n$, имеем</p> $a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1;$ <p>следовательно, теорема верна также и для $n+1$.</p> |
| | 9. Докажите, что множество всех полиномов 3-й степени с целыми коэффициентами счетно. |
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть $O(\text{следующая})$), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = (\ln n)^2, f_2(n) = (\ln n)^{\ln n}, f_3(n) = (3/2)^n, f_4(n) = n2^n.$ |

| | |
|-----------|---|
| Вариант 5 | 1. Для бинарного отношения $x \text{ рху} \Leftrightarrow \langle x \times y > 1 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{R} вещественных чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает. |
|-----------|---|

| | |
|--|--|
| | <p>2. Построить композицию следующих отношений («Быть A» означает «x является A для y»): быть соседом, быть другом (возможны две композиции, в зависимости от порядка отношений).</p> |
| | <p>3. Покажите, что равенство $\rho \circ \varphi = \varphi \circ \rho$ верно не для любых бинарных отношений. Найдите контр-пример.</p> |
| | <p>4. Найдите композиции $\rho \circ \varphi$ и $\varphi \circ \rho$, где $\varphi = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = y^2 \}$, $\rho = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \cdot y > 0 \}$, \mathbf{R} – множество вещественных чисел.</p> |
| | <p>5. Даны отображения $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$: $f: x \rightarrow \sin x$ и $g: x \rightarrow x^2$. Найдите $f \circ g$ и $g \circ f$.</p> |
| | <p>6. Является ли отношением эквивалентности отношение: иметь одну и ту же сестру.</p> |
| | <p>7. Докажите, что $M = \{ \{1, 7\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3\} \}$ – разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Перечислите все элементы отношения эквивалентности, соответствующего разбиению M.</p> |
| | <p>8. Найдите ошибку в доказательстве того, что все лошади имеют одну и ту же масть (см. задачу в разделе «4.2 Математическая индукция» учебного пособия).</p> |
| | <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом: $f(1) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $f(2) = \{1, 2, 4, 6\}$, $f(3) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $f(4) = \{4, 6\}$, $f(5) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f(6) = \{1, 3, 6\}$. Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> |

| | |
|--|---|
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть $O(\text{следующая})$), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> <p>$f_1(n) = \sqrt{2}^{\ln n}$, $f_2(n) = \sqrt{\ln n}$, $f_3(n) = \ln n$, $f_4(n) = \ln(\ln n)$.</p> |
|--|---|

| | |
|-----------|---|
| Вариант 6 | <p>1. Для бинарного отношения $xru \Leftrightarrow \langle x + y \text{ делится нацело на } 3 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{Z} целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
| | <p>2. Построить композицию следующих отношений («Быть A» означает «x является A для y»): быть родителем, быть сестрой (возможны две композиции, в зависимости от порядка отношений).</p> |
| | <p>3. Пусть ρ и φ – бинарные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cup \varphi)^{-1} = \rho^{-1} \cup \varphi^{-1}$.</p> |
| | <p>4. Найдите композиции $\rho \circ \varphi$ и $\varphi \circ \rho$, где $\varphi = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 0 \}$, $\rho = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \cdot y > 0 \}$, \mathbf{R} – множество вещественных чисел.</p> |
| | <p>5. Доказать тождество для любой функции f и произвольных множеств A и B: $f(A)f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.</p> |
| | <p>6. Является ли отношением эквивалентности отношение: иметь одну и ту же мать.</p> |

| | |
|--|---|
| | <p>7. Докажите, что $M = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ – разбиение множества $A = \{1, 2, 3\}$. Перечислите все элементы отношения эквивалентности, соответствующего разбиению M.</p> |
| | <p>8. Используя математическую индукцию, докажите, что</p> $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n} \text{ для } n \geq 2.$ |
| | <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом:</p> $\begin{aligned} f(1) &= \{2, 3, 4\}, \\ f(2) &= \{1, 4, 2\}, \\ f(3) &= \{2, 4\}, \\ f(4) &= \emptyset, \\ f(5) &= \{1, 2, 3, 4, 6\}, \\ f(6) &= \{1, 3, 2\}. \end{aligned}$ <p>Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> |
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O(следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = (\ln n)^{\ln n}, f_2(n) = \sqrt{2}^{\ln n}, f_3(n) = 2^n, f_4(n) = n^2.$ |

| | |
|-----------|---|
| Вариант 7 | <p>1. Для бинарного отношения $x \text{ рху } \Leftrightarrow \langle x^2 + y^2 = 1 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{R} вещественных чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
|-----------|---|

| | |
|--|---|
| | <p>2. На множестве $S = \{2, 4, 6, 7, 10\}$ задано отношение R, определяемое как $\langle m, n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m, n) = 7$;</p> <p>а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.</p> <p>б) Является ли отношение R:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |
| | <p>3. Для бинарного отношения $xRy \Leftrightarrow \langle x^2 = y \rangle$, определенного на множестве \mathbf{R} вещественных чисел, определите область определения, область значений и изобразите на плоскости множество всех таких точек $\langle x, y \rangle$, что xRy.</p> |
| | <p>4. Найдите композиции $\rho \circ \varphi$ и $\varphi \circ \rho$, где $\varphi = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x = y^2 \}$, $\rho = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x + y = 0 \}$, \mathbf{R} – множество вещественных чисел.</p> |
| | <p>5. Пусть $f: x \rightarrow x^2$ и $g: x \rightarrow x+1$ – отображения \mathbf{R} в \mathbf{R}. Найдите $f \circ g$ и $g \circ f$.</p> |
| | <p>6. На множестве $T \times T$, $T = \{4, 10, 6\}$, задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$, если $a + d = c + b$.</p> <p>а) Показать, что R есть отношение эквивалентности.</p> <p>б) Описать классы эквивалентности.</p> |
| | <p>7. На множестве рациональных чисел определено отношение $a \rho b \Leftrightarrow$ «существует такое целое k, что $a = 2^k b$». Доказать, что ρ – отношение эквивалентности и найти классы эквивалентности.</p> |

| | |
|-----------|--|
| | <p>8. Используя математическую индукцию, докажите, что $2^n > n^2$ для $n \geq 5$.</p> <hr/> <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом: $f(1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $f(2) = \{1, 4\}$, $f(3) = \{2, 3, 4\}$, $f(4) = \emptyset$, $f(5) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f(6) = \{1, 3, 6\}$. Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> <hr/> <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O(следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость: $f_1(n) = n!$, $f_2(n) = 4^{\ln n}$, $f_3(n) = e^n$, $f_4(n) = 2^{\sqrt{\ln n}}$. (е – основание натуральных логарифмов)</p> |
| Вариант 8 | <p>1. Для бинарного отношения $XrY \Leftrightarrow «X \setminus Y \neq \emptyset»$, определенного на множестве всех подмножеств множества целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |

| | |
|--|--|
| | <p>2. На множестве $S=\{1,2,5,7,8\}$ задано отношение R, определяемое как $\langle m,n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m,n) = 7$;</p> <p>а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.</p> <p>б) Является ли отношение R:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |
| | <p>3. Для бинарного отношения ρ: $a\rho b \Leftrightarrow \langle b \text{ делится нацело на } a \rangle$ между элементами множеств $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{12,16\}$ найдите область определения D_ρ и область значений R_ρ.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle y \text{ делится нацело на } x \rangle$, определенного на множестве положительных целых чисел.</p> |
| | <p>5. Пусть существует биекция A на $A1$ и B на $B1$. Докажите, что существует биекция $A \times B$ на $A1 \times B1$.</p> |
| | <p>6. На множестве $T \times T$, $T = \{5,2,7\}$, задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a,b \rangle R \langle c,d \rangle$, если $a+d = c+b$.</p> <p>а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности.</p> |
| | <p>7. На множестве вещественных чисел задано отношение $a\rho b \Leftrightarrow \langle a-b \text{ есть целое число} \rangle$. Доказать, что ρ – отношение эквивалентности и найти классы эквивалентности.</p> |

| | |
|--|--|
| | <p>8. Используя математическую индукцию, доказите, что $n^2 > 2n + 1$ для $n \geq 3$.</p> |
| | <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом: $f(1) = \{2, 3, 4\}$, $f(2) = \{1, 4\}$, $f(3) = \{2, 4\}$, $f(4) = \emptyset$, $f(5) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $f(6) = \{1, 3\}$. Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> |
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть $O(\text{следующая})$), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость: $f_1(n) = n (\ln n)$, $f_2(n) = (3/2)^n$, $f_3(n) = (\ln n)^{\ln n}$, $f_4(n) = (1+n)!$.</p> |

| | |
|-----------|--|
| Вариант 9 | <p>1. Для бинарного отношения $x \text{ рху} \Leftrightarrow \langle y = x \rangle$, определенного на множестве вещественных чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
|-----------|--|

| | |
|--|--|
| | <p>2. На множестве $S=\{0,3,7,4,2\}$ задано отношение R, определяемое как $\langle m,n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m,n) = 7$;</p> <p>а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.</p> <p>б) Является ли отношение R:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |
| | <p>3. Докажите тождество $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.</p> |
| | <p>4. Найдите композиции $\rho \circ \varphi$ и $\varphi \circ \rho$, где $\varphi = \{\langle x,y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x=y^2\}$, $\rho = \{\langle x,y \rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x=y\}$, \mathbf{R} – множество вещественных чисел.</p> |
| | <p>5. Докажите, что для любой функции f и произвольных множеств A и B имеет место $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Какое должно быть отображение f, чтобы включение можно было заменить равенством?</p> |
| | <p>6. На множестве $T \times T$, $T=\{2,0,4\}$, задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a,b \rangle \in R \langle c,d \rangle$, если $a+d = c+b$.</p> <p>а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности.</p> |
| | <p>7. Пусть ρ – отношение частичного порядка на множестве A, γ – отношение частичного порядка на множестве B. Докажите, что отношение φ, определяемое на $A \times B$ следующим образом $\langle a,b \rangle \varphi \langle c,d \rangle \Leftrightarrow a \rho c$ и $b \gamma d$, есть отношение частичного порядка.</p> |

| | |
|--|---|
| | <p>8. Используя математическую индукцию, докажите, что</p> $\sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$ |
| | <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом:</p> $\begin{aligned} f(1) &= \{1, 2, 3, 4\}, \\ f(2) &= \{1, 2, 4\}, \\ f(3) &= \{2, 3, 4, 5\}, \\ f(4) &= \{4\}, \\ f(5) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ f(6) &= \{1, 3, 6\}. \end{aligned}$ <p>Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> |
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O(следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = n!, \quad f_2(n) = \ln n, \quad f_3(n) = 2^{\ln n}, \quad f_4(n) = (\ln n)^2.$ |

| | |
|------------|--|
| Вариант 10 | <p>1. Для бинарного отношения $xру \Leftrightarrow \langle u \text{ делится нацело на } x \text{ и } x < u \rangle$, определенного на множестве положительных целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
|------------|--|

| | |
|--|--|
| | <p>2. На множестве $S=\{2,3,6,7,8\}$ задано отношение R, определяемое как $\langle m,n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m,n) = 7$;</p> <p>а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.</p> <p>б) Является ли отношение R:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |
| | <p>3. Докажите тождество $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in L$, определенного на множестве положительных целых чисел.</p> |
| | <p>5. Для произвольных множеств A и B определите биекцию $A \times B$ на $B \times A$.</p> |
| | <p>6. На множестве $T \times T$, $T = \{2,3,7\}$, задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a,b \rangle R \langle c,d \rangle$, если $a+d = c+b$.</p> <p>а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности.</p> |
| | <p>7. Пусть f – отображение \mathbf{R} в \mathbf{R}. Рассмотрим отношение $a \rho b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$. Приведите примеры таких отображений f, для которых отношение ρ является отношением частичного порядка.</p> |
| | <p>8. Используя математическую индукцию, докажите, что</p> $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$ |

| | |
|--|---|
| | 9. Если универсум – множество всех людей, $мать(x, y)$ означает, что x является матерью y , то верно ли утверждение $\forall y \exists x мать(x, y)$? |
| | 10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость: $f_1(n) = \ln(n!)$, $f_2(n) = 2^{\sqrt{\ln n}}$, $f_3(n) = n^3$, $f_4(n) = (\ln n)^2$. |

| | |
|------------|---|
| Вариант 11 | 1. Для бинарного отношения $xRy \Leftrightarrow \langle x \leq y + 1 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{Z} целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает. |
| | 2. На множестве $S = \{1, 4, 5, 6, 7\}$ задано отношение R , определяемое как $\langle m, n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m, n) = 7$; а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар. б) Является ли отношение R : <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |
| | 3. Докажите тождество $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$. |
| | 4. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle y^2 + x^2 = 1 \rangle$, определенного на множестве положительных целых чисел. |

| | |
|--|---|
| | 5. Докажите, что композиция сюръективных отображений – сюръективное отображение. |
| | 6. На множестве $T \times T$, $T = \{4, 6, 7\}$, задано отношение R , определяемое следующим образом: $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$, если $a + d = c + b$. а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности. |
| | 7. Докажите, что отношение $\langle a, b \rangle \rho \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ есть отношение эквивалентности $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (\mathbf{R} – множество вещественных чисел). Найдите классы эквивалентности и изобразите их на координатной плоскости. |
| | 8. Используя математическую индукцию, докажите, что $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$. |
| | 9. Дана формула $\exists x R(x) \supset \forall x R(x)$. Укажите интерпретацию, в которой эта формула истинна, и интерпретацию, в которой формула ложна. |
| | 10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O (следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость: $f_1(n) = 4^{\ln n}$, $f_2(n) = e^n$, $f_3(n) = \sqrt{\ln n}$, $f_4(n) = \ln(\ln n)$. (e – основание натуральных логарифмов). |

| | |
|------------|--|
| Вариант 12 | <p>1. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle x \text{ и } y \text{ имеют наибольший общий делитель } 1 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{N} положительных целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
| | <p>2. На множестве $S = \{3, 2, 4, 7, 9\}$ задано отношение R, определяемое как $\langle m, n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m, n) = 7$;</p> <p>а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.</p> <p>б) Является ли отношение R:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |
| | <p>3. Докажите тождество $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle y \neq x \rangle$, определенного на множестве положительных целых чисел.</p> |
| | <p>5. Пусть $f: x \rightarrow x^2 + 1$ и $g: x \rightarrow x^3$ – отображения \mathbf{R} в \mathbf{R}. Найдите отображения $f \circ g$ и $g \circ f$.</p> |
| | <p>6. На множестве $T \times T$, $T = \{4, 7, 9\}$, задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$, если $a + d = c + b$.</p> <p>а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности.</p> |

| | |
|------------|---|
| | <p>7. Докажите, что если ρ – отношение эквивалентности на некотором множестве X, то ρ^{-1} – также отношение эквивалентности на X.</p> <p>8. Используя математическую индукцию, докажите, что</p> $1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}.$ <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом:</p> $\begin{aligned} f(1) &= \{1\}, \\ f(2) &= \{2\}, \\ f(3) &= \{3\}, \\ f(4) &= \{4\}, \\ f(5) &= \{5\}, \\ f(6) &= \{6\}. \end{aligned}$ <p>Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O(следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = n^2, \quad f_2(n) = n (\ln n), \quad f_3(n) = \ln (n!), \quad f_4(n) = 5.$ |
| Вариант 13 | <p>1. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle y = x + 1 \rangle$, определенного на множестве положительных целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |

| | |
|--|--|
| | <p>2. На множестве $S=\{0,2,4,5,7\}$ задано отношение R, определяемое как $\langle m,n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m,n) = 7$;</p> <p>а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.</p> <p>б) Является ли отношение R:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |
| | <p>3. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle x + y = 1 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{R} вещественных чисел, определите область определения, область значений и изобразите на плоскости множество всех таких точек $\langle x, y \rangle$, что $x \rho y$.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow \langle y+x \text{ делится нацело на } 3 \rangle$, определенного на множестве положительных целых чисел.</p> |
| | <p>5. Пусть $f: x \rightarrow x+1$ и $g: x \rightarrow 2^x$ – отображения \mathbf{R} в \mathbf{R}. Найдите отображения $f \circ g \circ f$, $f \circ f \circ g$, $f \circ g \circ g$ и $g \circ f \circ g$.</p> |
| | <p>6. На множестве $T \times T$, $T = \{2,5,7\}$, задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$, если $a+d = c+b$.</p> <p>а) Показать, что R есть отношение эквивалентности.</p> <p>б) Описать классы эквивалентности.</p> |
| | <p>7. На множестве всех отображений $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ (\mathbf{R} – множество вещественных чисел) рассмотрим отношение $f \rho g \Leftrightarrow \langle f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in \mathbf{R} \rangle$. Является ли ρ отношением частичного порядка?</p> |

| | |
|--|---|
| | 8. Используя математическую индукцию, докажите, что $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$ |
| | 9. Пусть $S = \{a + b \mid a \text{ и } b - \text{целые числа}\}$, где $i = \sqrt{-1}$. Докажите, что S счетно. |
| | 10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть $O(\text{следующая})$), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость: $f_1(n) = n!$, $f_2(n) = 2^{(2^n)}$, $f_3(n) = 2^{\ln n}$, $f_4(n) = e^n$. (e – основание натуральных логарифмов). |

| | |
|------------|---|
| Вариант 14 | 1. Для бинарного отношения $xRy \Leftrightarrow \langle x, y \rangle$ делится нацело на 3», определенного на множестве положительных целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает. |
| | 2. На множестве $S = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ задано отношение R , определяемое как $\langle m, n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m, n) = 7$; а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар. б) Является ли отношение R : <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |

| | |
|--|--|
| | <p>3. Для бинарного отношения $xry \Leftrightarrow \langle x^2 = y^2 \rangle$, определенного на множестве \mathbf{R} вещественных чисел, определите область определения, область значений и изобразите на плоскости множество всех таких точек $\langle x, y \rangle$, что xry.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $XrY \Leftrightarrow \langle X \cap Y = \emptyset \rangle$, определенного на множестве подмножеств множества целых чисел.</p> |
| | <p>5. Доказать тождество для любой функции f: $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.</p> |
| | <p>6. На множестве $T \times T$, $T = \{4, 6, 8\}$, задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a, b \rangle R \langle c, d \rangle$, если $a + d = c + b$. а) Показать, что R есть отношение эквивалентности. б) Описать классы эквивалентности.</p> |
| | <p>7. Пусть A – непустое конечное множество. Рассмотрим отношение $X \rho Y$ на подмножествах $A \Leftrightarrow$ «число элементов в X меньше или равно числу элементов в Y». Является ли ρ отношением частичного порядка?</p> |
| | <p>8. Найдите ошибку в доказательстве того, что все лошади имеют одну и ту же масть (см. задачу в разделе «4.2 Математическая индукция» учебного пособия).</p> |

| | |
|--|---|
| | <p>9. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и f – инъективная функция из X в множество–степень $P(X)$, определенная следующим образом:</p> $f(1) = \{2, 3, 4, 5, 6\},$ $f(2) = \{1, 3, 4, 5, 6\},$ $f(3) = \{1, 2, 4, 5, 6\},$ $f(4) = \{1, 2, 3, 5, 6\},$ $f(5) = \{1, 2, 3, 4, 6\},$ $f(6) = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$ <p>Опишите множество W, отсутствие отображения на которое гарантирует нам теорема 3.16 учебного пособия.</p> |
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O(следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = n (\ln n), \quad f_2(n) = (1+n)!, \quad f_3(n) = \sqrt{2}^{\ln n},$ $f_4(n) = 2^{(2^{1+n})}.$ |

| | |
|------------|---|
| Вариант 15 | <p>1. Для бинарного отношения $xRy \Leftrightarrow \langle x-y \rangle$ – целое число», определенного на множестве вещественных чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.</p> |
|------------|---|

| | |
|--|--|
| | <p>2. На множестве $S=\{0,1,2,3,7\}$ задано отношение R, определяемое как $\langle m,n \rangle \in R$ тогда и только тогда, когда $\max(m,n) = 7$;</p> <p>а) Записать отношение в виде множества упорядоченных пар.</p> <p>б) Является ли отношение R:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Рефлексивным? • Симметричным? • Транзитивным? • Антисимметричным? |
| | <p>3. Для бинарного отношения $xry \Leftrightarrow \langle y^2 = x \rangle$, определенного на множестве \mathbf{R} вещественных чисел, определите область определения, область значений и изобразите на плоскости множество всех таких точек $\langle x,y \rangle$, что xry.</p> |
| | <p>4. Найдите отношения ρ^{-1}, $\rho \circ \rho$, $\rho^{-1} \circ \rho^{-1}$ для бинарного отношения $XrY \Leftrightarrow \langle X \cap Y \neq \emptyset \rangle$, определенного на множестве подмножеств множества целых чисел.</p> |
| | <p>5. Пусть существует биекция $f:A \rightarrow A1$ и $g:B \rightarrow B1$ и пусть $A \cap B = \emptyset$ и $A1 \cap B1 = \emptyset$. Определите биекцию $h: A \times B \rightarrow A1 \times B1$ через f и g.</p> |
| | <p>6. На множестве $T \times T$, $T=\{0,2,3\}$, задано отношение R, определяемое следующим образом: $\langle a,b \rangle R \langle c,d \rangle$, если $a+d = c+b$.</p> <p>а) Показать, что R есть отношение эквивалентности.</p> <p>б) Описать классы эквивалентности.</p> |

| | |
|--|---|
| | <p>7. На множестве всех отображений \mathbf{R} в \mathbf{R} (\mathbf{R} – множество вещественных чисел) рассмотрим отношение $f \rho g \Leftrightarrow f^{-1}(\{0\}) \subseteq g^{-1}(\{0\})$. Является ли ρ отношением частичного порядка?</p> |
| | <p>8. Используя математическую индукцию, докажите, что</p> $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$ |
| | <p>9. Докажите, что множество неотрицательных рациональных чисел счетно.</p> |
| | <p>10. Расположите следующие 4 функции в порядке увеличения скорости роста (каждая функция есть O(следующая)), не исключено, что некоторые функции имеют одинаковую скорость:</p> $f_1(n) = (3/2)^n, f_2(n) = n, f_3(n) = 2^{(2^n)}, f_4(n) = \ln n.$ |