

Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

В. М. Зюзьков

Синергетика для программистов (Спецкурс)

Учебное пособие

УДК 510.8:519.6

Зюзьков В. М. Синергетика для программистов (Спецкурс): Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2003. – 144 с.

Предназначено для студентов специальности 220400 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», обучающихся на всех формах обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

Пособие содержит курс лекций, требования к выполнению контрольных заданий, варианты заданий.

Рецензенты:

Кафедра прикладной математики Томского государственного архитектурно-строительного университета, зав кафедрой д-р физ.-мат. наук

М. И. Слободской

Зав. кафедрой программирования Томского государственного университета, профессор, д-р тех. наук

А. Ю. Матросова

© В. М. Зюзьков, 2003

Оглавление

1 Введение	5
2 Нелинейные динамические системы	10
2.1 Динамические системы: основные определения	10
Основные задачи теории динамических систем	12
2.2 Примеры поведения потоков в двумерном случае	14
2.3 Популярно о детерминированном хаосе	23
2.4 Одномерные дискретные динамические системы	34
Траектории одномерных динамических систем	34
Топологически сопряженные отображения	35
Диаграммы Ламерея	35
Неподвижные точки и лестницы Ламерея	36
Квадратичное отображение единичного интервала	40
2.5 Универсальность Фейгенбаума	48
2.6 Строго о хаосе	51
Определение хаоса	51
Хаос и топологическая сопряженность	52
Примеры хаоса	53
Условие существенной зависимости избыточно	53
2.7 Канторовы множества	54
2.8 Периодичность Шарковского	57
3 Фракталы	58
3.1 Фрактальная геометрия природы	58
3.2 Размерности	60
3.3 Избранные классические фракталы	65
Салфетка и ковер Серпинского	66
Недифференцируемые функции	68
Динамическая система Лоренца	72
3.4 L-системы	76
L-система Фибоначчи	77
L-система Туэ	78

Графическая интерпретация L-систем	79
3.5 Системы итерированных функций	89
3.6 Комплексная динамика	97
Множества Жюлиа	97
Множество Мандельброта	101
Бассейны притяжения для метода Ньютона	107
4 Клеточные автоматы	110
4.1. Что такое клеточный автомат?	110
4.2. Одномерные клеточные автоматы	112
4.3. Игра «Жизнь»	117
4.4. Двухмерные клеточные автоматы	127
Циклические клеточные автоматы	127
«Поколения»	129
Эрозия почвы	131
Диффузия	132
Ограниченное диффузией агрегирование	134
Контроль обучения	137
Литература	143

1 Введение

Изучая историю науки, мы замечаем два явления, которые можно назвать взаимно противоположными: то за кажущейся сложностью скрывается простота, то, напротив, видимая простота на самом деле таит в себе чрезвычайную сложность.

А. Пуанкаре

Общеизвестно, какой сложной и нерегулярной может быть динамика природных систем. Как подступиться к моделированию водопадов или турбулентных процессов, определяющих погоду? Какая математика отвечает за ритмы сердца и головного мозга? Можно ли математически описать внезапное возникновение волны паники на финансовых рынках или построить математическую модель землетрясения? Можно ли использовать проверенные веками методы эволюции для решения технических задач (ведь живой организм – прекрасное творение природы)?

На эти и на многие другие вопросы пытается ответить наука, к изучению которой мы приступаем. Дисциплина, которой посвящено данное учебное пособие, носит несколько названий. В нашей стране широко используется наименование «*синергетика*». Синергетика изучает механизмы *самоорганизации* в открытых нелинейных системах. Термин «*синергетика*» ввел Герман Хакен. Впрочем, вероятно, следует говорить о более широкой области исследований, называемой все чаще *нелинейной наукой* (nonlinear science в англоязычных странах) или *теорией сложных систем* (complexity). Строго говоря, в научной литературе два последних названия различаются. Общий предмет исследования называется по-разному в зависимости от того, на что делается упор: динамическая система – нелинейная или система – сложная.

В основе представлений нелинейной динамики лежит понятие *динамической системы*. Под динамической системой подразумевают объект любой природы, состояние которого изменяется во времени в соответствии с некоторой динамической закономерностью, т. е. в результате действия детерминированного оператора эволюции. Понятие динамической системы, первоначально возникшее в механике, постепенно было распространено на объекты любой природы. В настоящее время нелинейная динамика имеет дело с физическими, химическими, биологическими, экологическими, экономическими, социальными, информационными и другими динамическими системами.

Сложной системой является любая система, состоящая из некоторого числа элементов, структурная организация которых возможна на различных пространственных масштабах. Динамические изменения сложной системы не могут быть описаны с помощью одного правила и не могут быть описаны на одном уровне объяснения. На каждом более верхнем уровне в системе появляются новые феномены, предсказать которые невозможно, зная спецификацию предыдущего уровня.

Обычно, изучая какой-либо предмет, исследователь стремится использовать редуциционный подход, пытаясь упростить модель и свести дело к изучению небольшого числа факторов. Появление мощных компьютеров привело к пониманию того, что сейчас можно изучать сложные системы без упрощения.

Ученые обнаружили, что сложные системы сами по себе часто характеризуются следующими важными факторами:

- самоорганизацией;
- нелинейностью;
- динамикой на грани между порядком и хаосом;
- свойством эмерджентности.

Рассмотрим по очереди эти характеристики.

Самоорганизация. Сущность самоорганизации системы заключается в том, что её структурная реорганизация происходит без явного давления или вмешательства окружающей среды. Другими словами, ограничения на форму (организацию) системы есть внутреннее свойство этой системы, которое является результатом взаимодействия компонентов системы и обычно прямо не связано с физической природой компонентов. Система может эволюционировать во времени или пространстве, находясь в стабильных формах или показывая переходные процессы. Как правило, такая самоорганизующаяся система является *открытой*, т.е. в нее поступает вещество, энергия или информация, хотя это и необязательно.

Что такое нелинейность? В геометрии линейность связана с евклидовыми объектами: прямыми, плоскостями, трехмерным пространством и т.д. – эти объекты выглядят неизменно во время нашего исследования. Нелинейный объект, например сфера, выглядит по-разному в разном масштабе: когда рассматривается достаточно близко – это походит на плоскость, а на достаточно далеком расстоянии – это походит на точку.

В алгебре мы определяем линейность в терминах функций, которые имеют свойства $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(ax) = af(x)$. Нелинейность определяется как отрицание линейности. Это означает, что значение функции f изменяется не пропорционально изменению аргумента x .

Таким образом, основные правила исследования в линейном анализе больше не применимы: например, для линейной системы, если мы имеем два нуля, $f(x)=0$ и $f(y)=0$, то мы автоматически имеем третий ноль $f(x+y)=0$ (фактически, имеется бесконечно много нулей, так как линейность подразумевает, что $f(ax+by)=0$ для любых a и b). Это называется принципом суперпозиции – он дает много решений из нескольких. Для нелинейных систем за каждое решение нужно бороться с неизменным усердием!

Что такое *нелинейная наука*? Говорят, Станислав Улам как-то сказал: «Называть науку «нелинейная» все равно, что называть зоологию «изучением нечеловеческих животных»». Так почему мы используем название, которое по сути дела является просто отрицанием?

Во-первых, линейность – довольно специальное исключение, и никакая модель реальной системы, как правило, не является линейной. Некоторые законы успешно рассматриваются как линейные аппроксимации реальных моделей. Например, закон Гука, линейный закон упругости (напряжение линейно зависит от деформации), приближенно справедлив для колебаний маятника малой амплитуды; утверждается, что период маятника приблизительно не зависит от амплитуды. Однако, когда амплитуда становится большой, период увеличивается также, – фундаментальный эффект нелинейности в уравнении маятника.

Во-вторых, нелинейные системы проявляют удивительные свойства и сложные эффекты, которых не ожидают ученые, обученные только линейным методам. Нелинейность оказывает наиболее глубокое воздействие на динамические системы.

Далее, в то время как мы можем перечислять линейные предметы, нелинейные являются несчетными и преимущественно неклассифицируемыми. Мы не имеем в настоящее время общих методов (и имеем очень немного специальных) для распознавания, проявит ли частная нелинейная система сложность хаоса или простоту порядка. Таким образом, мы не можем разделить нелинейную науку на отдельные дисциплины, она рассматривается только как целое.

Динамика на грани порядка и хаоса. Обычно легко предсказать, как будет развиваться детерминированная система. Но если развитие будет уходить все дальше и дальше от начальной точки, то такое предсказание сделать все труднее и труднее. Возникает парадоксальная ситуация, когда знание начальных условий не гарантирует предсказания будущего, по сути дела, поведение такой системы становится хаотичным. Классической иллюстрацией этого служит «эффект бабочки», когда взмах её крыльев в одной части света может привести к урагану на другом конце земного шара.

Эмерджентность (emergent properties). Непредсказуемость, свойственная естественной эволюции сложных систем, приводит к результату, когда неожиданно появляется новое свойство системы. Свойство эмерджентности поэтому показывает, что сложным системам свойственна креативность (творчество).

Изучение сложных систем (анализ, моделирование, синтез) с помощью компьютерных программ использует следующие научные направления:

- теорию динамических систем и теорию бифуркаций;
- геометрию фракталов;
- искусственную жизнь;
- эволюционные алгоритмы;
- нейронные сети;
- клеточные автоматы;
- булевы сети.

Одним из основных инструментов исследования в нелинейной динамике, наравне со строгими математическими методами и экспериментами с реальными системами, является *компьютерное моделирование*. Именно использование компьютеров привело к качественному скачку в изучении нелинейных явлений в динамических системах, давшему возможность говорить о возникновении новой науки. Построение фазовых портретов, сечений Пуанкаре, притягивающих и не притягивающих предельных множеств, анализ устойчивости фазовых траекторий и всевозможных бифуркаций предельных множеств в нелинейных системах с размерностью $n \geq 3$ и многое другое стало возможным благодаря использованию достаточно мощной вычислительной техники и графических программ.

Еще более важно использование компьютеров для сложных систем. Теория сложных систем изучает системы, для которых использование систем уравнений становится практически невозможным (по причинам их большого числа или просто их отсутствия), а статистические методы еще не действуют. Поэтому только компьютерное моделирование спасает положение.

Синергетика имеет приложения в многообразных областях – от математики, физики, биологии и химии, до инженерии, экономики, и медицины. Наиболее захватывающе при этом то, что исследователи многих дисциплин приходят к общему языку.

Данное учебное пособие предназначено для первоначального знакомства с проблемами синергетики. Трудно сказать что-то новое, излагая азы предмета. Поэтому какая-то часть пособия составлена путем компиляции доступных бумажных и интернетовских источников с не-

большой обработкой и добавлением. Отметим один из мощных программных инструментов – систему Mathematica. Почти все иллюстрации нелинейной динамики в поведении сложных систем в данном пособии сделаны с помощью этой системы.

Научная и учебная отечественная литература по синергетике ориентирована в основном на исследования динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями. Данное пособие только кратко знакомит с этими вопросами, обращая основное внимание на остальные области синергетики, мало представленные в учебной литературе.

В дальнейшем будем использовать обозначения: \mathbf{Z} – множество целых чисел; \mathbf{Z}^+ – множество неотрицательных целых чисел; \mathbf{R} – множество вещественных чисел; \mathbf{R}^+ – множество неотрицательных вещественных чисел; \mathbf{R}^n – n -мерное евклидово пространство; \mathbf{C} – комплексная плоскость.

2 Нелинейные динамические системы

Хаос – название для любого порядка, который производит беспорядок в наших умах.

Джордж Сантьяна

2.1 Динамические системы: основные определения

Когда говорят о динамической системе, обычно имеют в виду однопараметрическую группу или полугруппу отображений f^t некоторого пространства X (топологического или метрического) в себя. Если при этом $t \in \mathbf{R}$ или \mathbf{R}^+ , то динамическую систему называют иногда *поток*ом, если же $t \in \mathbf{Z}$ или \mathbf{Z}^+ – то *каскадом*. Эти названия связаны с тем, что под действием f^t точки пространства X «приходят в движение» ($x \rightarrow f^t(x)$) и пространство «расслаивается» на траектории, по которым и происходит движение.

Проще говоря, *динамическая система* – модель, которая описывается независимой переменной – временем t и набором K величин – *динамических переменных* $\{x_i\}$ ($1 \leq i \leq K$), считающихся функциями времени: $x_i = x_i(t)$. Совокупность значений всех динамических переменных $\{x_i(t_0)\}$ в данный момент t_0 определяет *состояние динамической системы*. Множество $\{x_i(t_0)\}$ считается координатами точки в K -мерном пространстве состояний системы, которое называется *пространством состояний*. Точка этого пространства, соответствующая состоянию системы, называется *фазовой точкой*. Для упрощения записи формул координаты фазовой точки можно считать компонентами вектора $\bar{x}(t)$. Описание динамической системы может потребовать указания ряда значений *параметров* динамической системы – физических величин $\{a_j\}$, ($1 \leq j \leq L$), отличных от динамических переменных.

Множество параметров $\{a_j\}$ можно обозначать как вектор \bar{a} в L -мерном пространстве параметров.

Динамическая система определена, если задан *оператор эволюции* $S(t, t_0)$, который известному состоянию системы в момент t_0 сопоставляет единственное состояние системы в любой допустимый момент $t > t_0$: $\bar{x}(t) = S(t, t_0)(\bar{x}(t_0))$. Зависимость $\bar{x}(t)$ – *закон движения системы* или просто *движение*. Множество точек $\{\bar{x}(t) \mid t > t_0\}$ образует *фазовую траекторию* движения. Обычно оператор $S(t, t_0)$ не дан непо-

средственно, а определяется уравнениями движения. Фазовым портретом динамической системы называется множество характерных фазовых траекторий в пространстве состояний.

Когда рассматриваются потоки, то время t непрерывно; а уравнения движения суть система K обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\{x_j\}, \{a_j\}), \quad (1 \leq i \leq K),$$

где a_j , $(1 \leq j \leq L)$ – параметры. В векторных обозначениях: $\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}, \bar{a})$.

Если K – размерность пространства состояний, то $N = K/2$ – число степеней свободы. В последнее время числом степеней свободы называют также и само число K . Классическими примерами потоков служат канонические уравнения механики гамильтоновых систем, уравнения для зарядов и токов в электрических цепях с сосредоточенными параметрами, феноменологические уравнения химической кинетики и динамики популяций.

Если рассматриваются дискретные отображения (каскады), то время дискретно: $\{t_n\}$ (n – целое; $t_k < t_l$ при $k < l$). Номер n момента t_n принимают за независимую переменную. Уравнения движения выражают значения динамических переменных в момент $n+1$ через их значения в предшествующий момент времени n .

$$\bar{x}(n+1) = \bar{F}(\bar{x}(n), \bar{a}).$$

Перечислим основные источники моделей дискретных отображений (каскадов).

1. *Редукция потоков*: вместо любых t за состоянием потока $\bar{x}(t)$ следят в избранные моменты t_n . Фазовые портреты систем с размерностью $N=3$ пространства состояний становятся не столь наглядными. В этом случае полезно ввести сечения траекторий некоторой плоскостью или поверхностью, выбранной так, чтобы все траектории пересекали её под ненулевым углом. На секущей плоскости возникает множество точек, соответствующих различным фазовым траекториям исходной системы и дающих представление о её фазовом портрете. Обычно рассматриваются точки пересечения, возникающие при движении траектории в одном направлении. Оператор эволюции однозначным образом (но не взаимно однозначным) порождает некоторое дискретное отображение секущей плоскости в себя, называемое *отображением последования* или *отображением Пуанкаре*. Переход к отображению Пуанкаре понижает размерность рассматриваемых множеств на 1, что делает фазовый портрет системы более наглядным.

2. *Дискретные разностные схемы для потоков*. Пример: $\dot{x} = F(x)$ заменяется разностной схемой $x_{n+1} = x_n + h \cdot F(x_n)$, где h – шаг (метод ломаных Эйлера).

3. *Системы с дискретным счетом времени*. Пример: биология – динамика популяций. Динамическая переменная – численность особей данного вида, n – номер поколения. Одна из исторически первых динамических дискретных систем – кролики Фибоначчи (1202 г.) с уравнением $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Фазовая траектория этой модели с начальными условиями $F_1 = 1, F_2 = 1$ называется *числами Фибоначчи* F_n .

4. *Системы с итерациями*. Пара (X, f) , где f – некоторое отображение пространства X в себя, задает динамическую систему с дискретным временем – полугруппу отображений $\{f^n, n \in \mathbf{Z}^+\}$, где $f^n = f \circ f^{n-1}$ – n -кратная итерация, $n=1, 2, \dots$, f^0 – тождественное отображение. Если пространство X является действительной прямой \mathbf{R} или интервалом $I \subseteq \mathbf{R}$, то такая динамическая система с одномерным пространством состояний и дискретным временем, являясь в известном смысле наиболее простой, тем не менее во многих случаях обладает очень сложной динамикой. В некоторых отношениях, например с точки зрения дескриптивной теории множеств, одномерные динамические системы так же сложны, как и динамические системы на произвольных компактах.

Если все параметры a_j не зависят от t , то динамическая система называется *автономной*. Если параметры a_j зависят от t заданным образом, $a_j = a_j(t)$, то динамическая система называется *неавтономной*.

Основные задачи теории динамических систем

1. *Задача Коши*: по заданному начальному состоянию $\bar{x}(t_0)$ при заданных параметрах \bar{a} найти закон движения $\bar{x}(t)$ для $t > t_0$. Обычно принимают $t_0 = 0$, а начальное состояние $\bar{x}(t_0) = \bar{x}(0)$ называют *начальными условиями*.

Задача Коши особо важна для систем, в которых произвольное – по усмотрению экспериментатора – задание начальных условий $\bar{x}(0)$ невозможно, например, в небесной механике.

2. *Исследование устойчивости*. На практике значения компонент $\bar{x}(0)$ известны с конечной погрешностью. Решение задачи Коши ценно, если известно, что малые вариации начальных условий мало изменяют закон движения или отдельные его характеристики.

Важно следующее определение. Движение $\bar{x}(t)$ устойчиво по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$ такое, что $|\bar{x}(0) - \bar{x}'(0)| < \delta$ при $\forall t$ влечет $|\bar{x}(t) - \bar{x}'(t)| < \varepsilon$. При устойчивом по Ляпунову движении фазовые точки, близкие в начальный момент времени, останутся близкими во все моменты.

3. *Исследования структуры пространства состояний.* Для автономных систем с фиксированными значениями параметров определение структуры пространства состояний сводится, в первую очередь, к выделению особых (исключительных) фазовых траекторий. Состояние динамической системы в общем случае изменяется со временем. Поэтому исключительными фазовыми траекториями являются *неподвижные точки* (fixed point), представляющие *состояние равновесия* системы. Для потоков неподвижные точки \bar{x}_f определяются уравнениями $F(\bar{x}_f, \bar{a}) = 0$, а для дискретных отображений – уравнениями $\bar{x}_f = F(\bar{x}_f, \bar{a})$.

Движение динамической системы в общем случае *непериодично*. Поэтому исключительными являются фазовые траектории, соответствующие *периодическому движению*. Для автономных систем – потоков – такие траектории являются замкнутыми кривыми в пространстве состояний. Для дискретных отображений $x_{n+1} = F(x_n)$ период движения k должен быть целым. Фазовая траектория, соответствующая закону движения с периодом k , называется *циклом длины k* .

Если при любых начальных условиях \bar{x}_0 из некоторой области при достаточно больших временах фазовая точка окажется сколь угодно близко к фазовой траектории A , то такая фазовая траектория называется *аттрактором* и является исключительной. Множество Ω всех начальных состояний $\{\bar{x}_0\}$, определяющих фазовые траектории, асимптотически притягивающиеся к данному аттрактору A , называется *бассейном* этого аттрактора.

Если при движении системы значения динамических переменных остаются ограниченными (существуют такие положительные числа X_i , что $|x_i(t)| < X_i$ при всех t), то движение системы называется *финитным*. Если хотя бы для одной переменной это условие не выполняется, то движение системы называется *инфинитным*. Выделение границ областей финитного движения входит в задачу исследования структуры пространства состояний.

4. *Исследование динамической системы.* Как влияет изменение параметров \bar{a} на качественные свойства закона движения? Интересно определение граничных значений параметров, при переходе через которые меняется число и/или тип исключительных решений. Такое изменение называется *бифуркацией*, а соответствующие критические значения \bar{a}_b – *точками бифуркации*.

2.2 Примеры поведения потоков в двухмерном случае

Прежде чем разобраться, что такое хаос в динамической системе и как он возникает, рассмотрим системы с потоками в двухмерном случае.

Начнем с самого простейшего дифференциального уравнения первого порядка

$$dx/dt = F(x, \lambda). \quad (2.1)$$

Слева в этом уравнении – производная по времени (т.е. независимой переменной), справа – гладкая непрерывная функция переменной x и постоянного параметра λ . Решить уравнение (2.1) означает найти функцию

$$x = s(t, x_0, \lambda), \quad (2.2)$$

которая при подстановке в (2.1) обращает это уравнение в тождество. Величина x_0 в (2.2) есть начальное условие, удовлетворяющее соотношению

$$x_0 = s(0, x_0, \lambda).$$

Константа $x = c$ обращает производную в нуль, и если она одновременно служит решением уравнения

$$F(x, \lambda) = 0, \quad (2.3)$$

то $x = c$ есть решение уравнения (2.1), называемое *состоянием равновесия*.

Теперь, если $F > 0$, то $x(t)$ возрастает, а если $F < 0$, то $x(t)$ убывает в силу (2.1). В этом вся динамика уравнения (2.1); корни уравнения (2.3) – состояния равновесия C_1, C_2, \dots , а на интервалах (C_i, C_{i+1}) происходит либо рост, либо убывание $x(t)$ в зависимости от знака F (скорости) (рис. 2.1).

Положение равновесия может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Понятие устойчивости динамических систем имеет большое прикладное значение и является одним из наиболее важных понятий. В частности, характер эволюции некоторой системы из состояния равновесия существенно зависит от того, каким это равновесие является: устойчивым или неустойчивым. В случае неустойчивого равновесия в результате даже очень малых начальных отклонений система может быть отброшена от стационарного состояния, и движение станет либо

очень сложным, либо система перейдет в другое стационарное состояние, весьма далекое от исходного. Поэтому важно изучать характер устойчивости динамических систем.

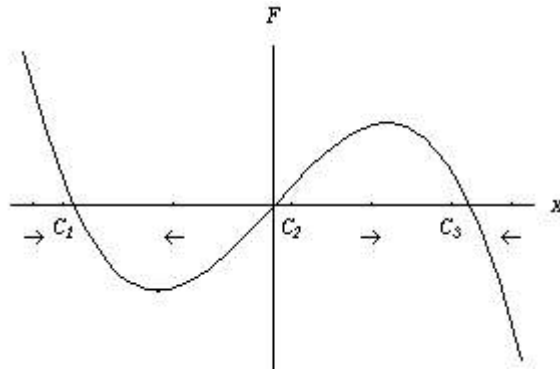


Рис. 2.1 Динамика уравнения (2.1), изменение $x(t)$ указано стрелками

Состояния равновесия C_1 и C_3 устойчивы, а C_2 неустойчиво. Если производная $F'_x(C) < 0$, то состояние равновесия устойчиво, а если $F'_x(C) > 0$, то неустойчиво (рис. 2.1).

Следует заметить, что аналитически решение уравнения (2.1) можно представить в виде неопределенного интеграла

$$\int \frac{dx}{F(x, \lambda)} = t + c.$$

Однако для качественного анализа этот интеграл не нужен. Более того, такие интегралы, как правило, не берутся.

Пример 1. Линейное уравнение

$$dx/dt = \lambda x \quad (2.4)$$

имеет решение $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, определяющее экспоненциальный рост если $\lambda > 0$, или убывание, если $\lambda < 0$. Вспомним, что уравнение (2.4) определяет динамику цепной реакции ($\lambda > 0$) и распада ядра ($\lambda < 0$). Единственное состояние равновесия уравнения (2.4) $x = 0$ устойчиво при $\lambda < 0$ и неустойчиво при $\lambda > 0$.

Пример 2. Нелинейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda - x^2$$

имеет два состояния равновесия при $\lambda > 0$ и не имеет состояний равновесия при $\lambda < 0$ ($dx/dt < 0$ всюду и $x(t)$ убывает всегда). Правильность этого утверждения легко проверить, нарисовав график $F(x) = \lambda - x^2$ и расставив стрелки, как на рис. 2.1. Значение $\lambda = 0$ в этом примере соответствует бифуркации рождения двух состояний равновесия с ростом λ , и гибели – при убывании λ . Важнейшее понятие – бифуркация – было введено в конце прошлого века Анри Пуанкаре.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= F_1(x, y, \lambda), \\ dy/dt &= F_2(x, y, \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

с гладкими непрерывными функциями F_1 и F_2 , зависящими от параметра λ , решения которой есть система двух функций

$$\left. \begin{aligned} x &= s_1(x_0, y_0, \lambda), \\ y &= s_2(x_0, y_0, \lambda). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Плоскость (x, y) для дифференциальных уравнений (2.5) является пространством состояний (в данном случае плоскостью), а график функции (2.6), как параметрически заданной кривой (параметр – время t), – фазовой траекторией. Траектории пересекаться не могут по теореме единственности решения (2.6) с заданной начальной точкой. Изменяя начальную точку (x_0, y_0) , получаем семейство траекторий на плоскости, которые с отмеченными стрелками направлениями изменения точки (x, y) при увеличении времени образуют фазовый портрет системы (2.5). Состояния равновесия системы (2.5), аналогично уравнению (2.1), определяются системой алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y, \lambda) &= 0, \\ F_2(x, y, \lambda) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Пример 3. Линейная система дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= \lambda x, \\ dy/dt &= \gamma y, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

составленная из двух независимых уравнений первого порядка вида (2.4), очевидно, имеет решение

$$x = x_0 e^{\lambda t}, y = y_0 e^{\gamma t}.$$

Состояние равновесия $O(0,0)$ может быть трех типов:

- а) при $\lambda < 0, \gamma < 0$ точка O – устойчивый узел (рис. 2.2);
- б) при $\lambda > 0, \gamma > 0$ точка O – неустойчивый узел (рис. 2.3);

в) при $\lambda < 0, \gamma > 0$ (или $\lambda > 0, \gamma < 0$) состояние равновесия O называется *седлом* (рис. 2.4).

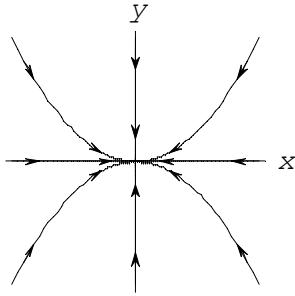


Рис. 2.2 Устойчивый узел, $\lambda < 0, \gamma < 0$

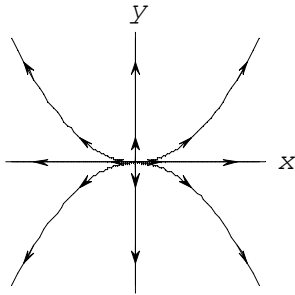


Рис. 2.3 Неустойчивый узел, $\lambda > 0, \gamma > 0$

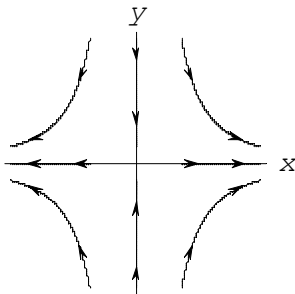


Рис. 2.4 Седло, $\lambda < 0, \gamma > 0$

Заметим, что состояния равновесия являются отдельными траекториями, так что пересечения, реализующиеся для системы (2.7) и изображенные на рис. 2.2, суть не пересечения траекторий, а пересечения так называемых интегральных кривых, составленных из трех траекто-

рий, одна из которых – состояние равновесия. Устойчивые узлы являются, конечно, аттракторами системы.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} d\rho/dt = \lambda\rho \\ d\varphi/dt = \omega \end{cases} \quad (2.8)$$

заданную в полярных координатах (φ, ρ) , связанных с декартовой системой координат формулами $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$, где φ – угол, ρ – полярный радиус, λ и ω – параметры. При этом очевидно, $\rho \geq 0$. Снова уравнения (2.8) независимы, и мы имеем решение

$$\rho = \rho_0 e^{\lambda t}, \quad \varphi = \omega t + \varphi_0,$$

где (φ_0, ρ_0) – начальная точка.

Состояние равновесия $\rho=0$ (в декартовых координатах это $O(0,0)$) есть *устойчивый фокус* при $\lambda < 0$ (рис. 2.5), или – *неустойчивый фокус* при $\lambda > 0$ (рис. 2.6). Устойчивый фокус является аттрактором системы. Заметим, что к системе (2.8) при $\lambda < 0$ приводит задача о затухающих колебаниях маятника или колебательного контура. При этом полярный радиус есть экспоненциально убывающая амплитуда, угол φ – полная фаза, ω – частота колебаний.

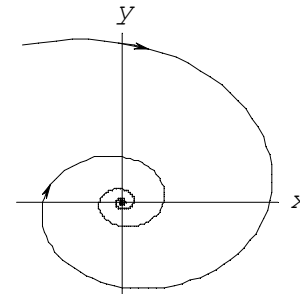


Рис. 2.5 Устойчивый фокус, система (2.8), $\lambda < 0$

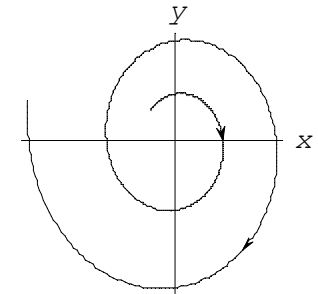


Рис. 2.6 Неустойчивый фокус, система (2.8), $\lambda > 0$

Пример 5. Нелинейная система в полярных координатах

$$\begin{cases} d\rho/dt = \rho(\lambda - \rho) \\ d\varphi/dt = \omega \end{cases} \quad (2.9)$$

с разделенными переменными исследуется с помощью рис. 2.1 с важной особенностью: устойчивое состояние равновесия $\rho = \lambda > 0$ первого уравнения соответствует замкнутой траектории системы (2.9) на плоскости (x, y) , называемой *предельным циклом* – он является

аттрактором системы (рис. 2.7). При $\lambda < 0$ $dr/dt < 0$, и цикл отсутствует (рис. 2.8).

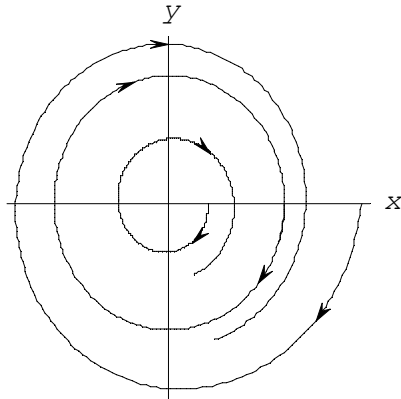


Рис. 2.7 Предельный цикл, система (2.9), $\lambda > 0$

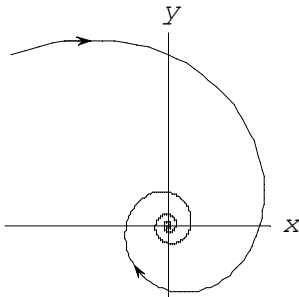


Рис. 2.8 Устойчивый фокус, система (2.9), $\lambda < 0$

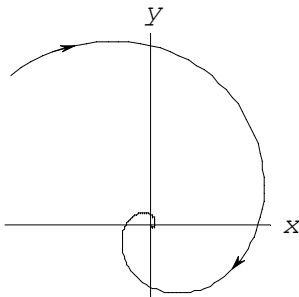


Рис. 2.9 Устойчивый фокус, система (2.10), $\lambda < 0$

Предельный цикл был введен А. Пуанкаре, впрочем, как и все основные понятия теории динамических систем, предмет которой – не интегрируя систему (2.5), нарисовать ее фазовый портрет и проследить за его изменениями при изменении параметров (предмет теории бифуркаций).

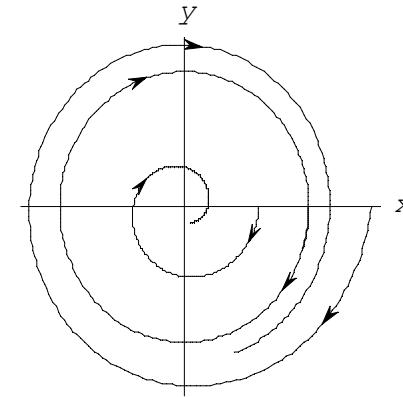


Рис. 2.10 Полуустойчивый цикл, система (2.10), $\lambda = 0$

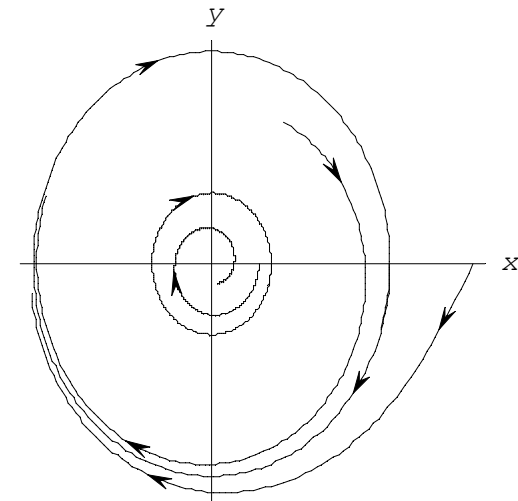


Рис. 2.11 Два цикла, система (2.10), $\lambda = 0,25$

Пример 6. Нелинейная система

$$\left. \begin{aligned} d\rho/dt &= \rho(\lambda - (\rho - 1)^2), \\ d\varphi/dt &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

при $|\lambda| < 1$ имеет следующую последовательность фазовых портретов. При $\lambda < 0$ производная $d\rho/dt$ отрицательна, и система (2.10) имеет аттрактор – устойчивый фокус, как в примере 5 (рис. 2.9).

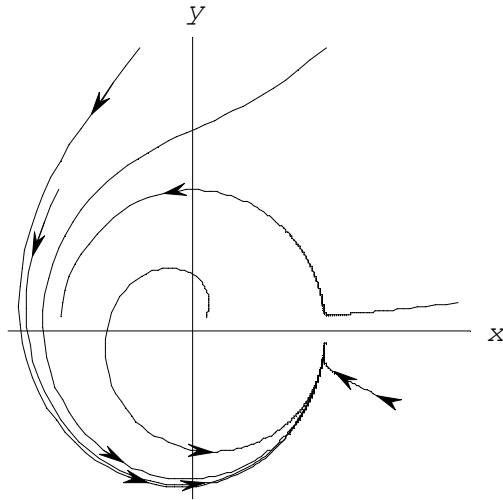


Рис. 2.12 Седло-узел, система (2.11), $\lambda = 1$

При $\lambda=0$ производная $d\rho/dt$ обращается в нуль при $\rho=1$, то есть в системе происходит рождение предельного цикла. Траектории приближаются к нему снаружи и удаляются от него внутри. Поэтому такой цикл называется *полуустойчивым* (рис. 2.10).

При $\lambda > 0$ этот цикл разваливается на два цикла: один – устойчивый снаружи и другой – неустойчивый внутри. Стало быть, имеет место бифуркация рождения двух циклов через появление полуустойчивого цикла (рис.2.11). Проанализировать эту бифуркацию можно с помощью исследования первого уравнения в (2.10) при использовании рис. 2.1.

Пример 7. Система вида

$$\left. \begin{aligned} d\rho/dt &= \rho(1 - \rho), \\ d\varphi/dt &= \lambda - \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

при $|\lambda| < 1$ помимо неустойчивого состояния равновесия $O(0,0)$ имеет два состояния равновесия $P_1(\rho_1 = 1, \varphi_1 = \arcsin \lambda)$ и $P_2(\rho_2 = 1, \varphi_2$

$= \pi - \arcsin \lambda$). Точка P_1 есть устойчивый узел, а P_2 – седло. При $|\lambda| = 1$ состояния равновесия P_1 и P_2 сливаются, образуя так называемый *седло-узел* (рис. 2.12), исчезающий при $|\lambda| > 1$. Поскольку при $\lambda > 1$ производная $d\varphi/dt > 0$ (при $\lambda < -1$ $d\varphi/dt < 0$), то есть угол $\varphi(t)$ растет, система (2.11) имеет устойчивый предельный цикл (рис. 2.13).

Рис. 2.12 подсказывает, что при $\lambda = 1$ система (2.11) имеет траекторию Γ , выходящую из седла-узла и возвращающуюся в него же. Такие траектории Пуанкаре назвал *гомоклическими*. Как оказалось впоследствии, такие траектории играют важнейшую роль в теории хаоса в многомерных динамических системах без случайных воздействий.

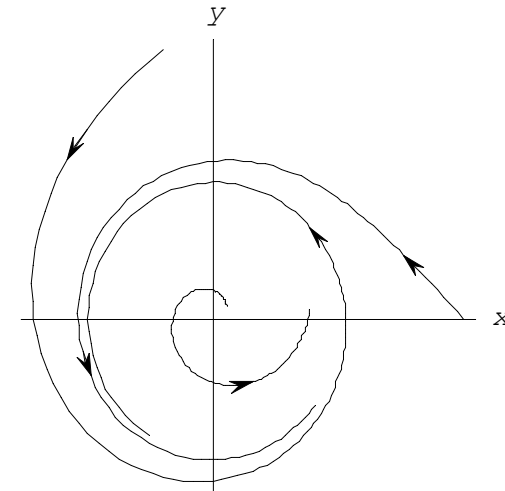


Рис. 2.13 Устойчивый предельный цикл, система (2.11), $\lambda = 2$

Таким образом, мы получили бифуркацию рождения предельного цикла в ситуации, когда исчезает седло-узел, имеющий гомоклическую траекторию.

Мы привели частные примеры, которые с помощью уравнения первого порядка объясняют различные случаи изменения фазовых портретов системы двух уравнений при изменении параметра. Но, оказывается, эти примеры отражают общую ситуацию качественного изменения фазовых картин любой динамической системы (2.5).

Резюме. Для любой системы с двумя уравнениями финитные движения относятся к одному из следующих четырех типов:

состоянию равновесия;

движению, асимптотически стремящемуся к состоянию равновесия;
 периодическому движению;
 движению, асимптотически стремящемуся к периодическому.

2.3 Популярно о детерминированном хаосе

– Из-за такой малости! Из-за бабочки!
 – закричал Экельс. Она упала на пол – изящное маленькое создание, способное нарушить равновесие, повалились маленькие костяшки домино... большие костяшки... огромные костяшки, соединенные цепью неисчислимых лет, составляющих Время. Мысли Экельса смешались. Не может быть, чтобы она что-то изменила. Мертвая бабочка – и такие последствия? Невозможно!

Рей Брэдбери. И грянул гром

Хаотические процессы в детерминированных нелинейных системах – одна из фундаментальных проблем современного естествознания. Что представляет собой явление детерминированного хаоса? Вначале необходимо внести ясность в понимание терминов *детерминированность* и *хаос*.

Детерминированность. Когда говорят о детерминированности, подразумевают однозначную взаимосвязь причины и следствия. Если задано некоторое начальное состояние системы при $t = t_0$, то оно однозначно определяет состояние системы в любой момент времени $t > t_0$. Например, если тело движется равноускоренно, то его скорость определяется детерминированным законом

$$v(t) = v(t_0) + a t.$$

При задании начальной скорости $v(t_0)$ мы однозначно определяем состояние системы в любой момент времени $t > t_0$.

В общем случае зависимость будущего состояния $x(t)$ от начального $x(t_0)$ можно записать в виде $x(t) = F(x(t_0))$, где F – детерминированный закон, который осуществляет строго однозначное преобразование начального состояния $x(t_0)$ в будущее состояние $x(t)$ для любого $t > t_0$.

Хаос. Теперь внесем ясность в понятие «хаос». Проведем мысленный эксперимент с броуновской частицей. Поместим частицу в момент $t = t_0$ в раствор жидкости и с помощью микроскопа начнем фиксировать ее положение во времени, отмечая координаты частицы через равные интервалы Δt . Нетрудно убедиться, что под действием случай-

ных толчков со стороны окружающих молекул частица будет совершать нерегулярные блуждания, которые характеризуются запутанной траекторией. Повторим эксперимент несколько раз подряд, осуществляя в пределах возможности воспроизводство начальных условий опыта. Каковы будут результаты? Их главным образом два. Первый – каждый раз траектория движения частицы будет сложной, непериодической; второй – любая попытка однозначного повторения опыта приведет к отрицательному результату. Каждый раз при повторении опыта с одинаковыми (в пределах наших возможностей) начальными условиями мы будем получать различные траектории движения частицы! Классическое явление движения броуновской частицы дает четкие физические представления о хаосе как о непредсказуемом, случайном процессе. Если мы говорим о хаосе, то подразумеваем, что изменение во времени состояния системы является случайным (его нельзя однозначно предсказать) и невоспроизводимым (процесс нельзя повторить).

Мы приходим к убеждению, что понятия «детерминизм» и «хаос» прямо противоположны по смыслу. Детерминизм ассоциируется с полной предсказуемостью и воспроизводимостью, хаос – с полной непредсказуемостью и невоспроизводимостью. Возникает закономерный вопрос, что понимается под термином *детерминированный хаос*, где объединены два противоположных по смыслу понятия? Ответить на этот вопрос непросто, но возможно.

Французский математик 18 века Пьер Симон Лаплас однажды заявил, что, если бы для каждой частицы во Вселенной были заданы положение и скорость, он мог бы предсказать будущее на все остальное время. И хотя на пути к достижению этой поставленной Лапласом цели есть очевидные практические трудности, более ста лет как будто не было никаких причин сомневаться в том, что, по крайней мере в принципе, Лаплас прав. Буквальное распространение этого заявления Лапласа на социальные явления привело к философскому выводу о полной предопределенности поведения людей: свободной воли не существует.

Наука 20 века покончила с лапласовым детерминизмом. Первый удар ему нанесла квантовая механика. Одно из главных положений этой теории – открытый Гейзенбергом принцип неопределенности, который утверждает, что одновременно положение и скорость частицы не могут быть точно измерены. Принцип неопределенности хорошо объясняет, почему некоторые случайные явления, такие как радиоактивный распад, не подчиняются лапласову детерминизму. Ядро настолько мало, что вступает в силу принцип неопределенности, и точно знать происходящие в ядре процессы принципиально невозможно, а

поэтому, сколько бы ни было собрано о нем информации, нельзя точно предсказать, когда оно распадется.

Однако источник непредсказуемости для крупномасштабных систем следует искать в другом. Одни крупномасштабные явления предсказуемы, другие – нет, и квантовая механика тут ни при чем. Например, траектория бейсбольного мяча в принципе предсказуема, и каждый игрок интуитивно пользуется этим всякий раз, когда ловит мяч. Напротив, траектория воздушного шара, когда из него вырывается воздух, непредсказуема: он кренится и беспорядочно вертится в какие-то моменты и в каких-то местах, которые нельзя предвидеть. Но весь этот воздушный шар подчиняется тем же законам Ньютона, что и бейсбольный мяч; почему же прогнозировать его поведение труднее?

Классический пример подобного двойного поведения дает течение жидкости. При одних обстоятельствах оно является ламинарным – ровным, устойчивым, регулярным – и легко предсказывается при помощи уравнений. При других обстоятельствах течение становится турбулентным – неровным, неустойчивым, нерегулярным – и трудно предсказуемым. Переход от ламинарного поведения к турбулентному знаком каждому, кто хоть раз летел в самолете в спокойную погоду, а затем внезапно попадал в грозу. Чем объяснить существующую разницу между ламинарным и турбулентным течением?

Непредсказуемое, случайное поведение проявляют даже системы, не отличающиеся ни особой сложностью, ни неопределенностью. Еще на рубеже века это осознал французский математик Анри Пуанкаре, отметив, что непредсказуемые, возникающие «по воле случая», явления присущи скорее таким системам, где небольшие изменения в настоящем приводят к заметным изменениям в будущем. Представим себе камень на вершине холма. Чуть-чуть подтолкнув его в ту или иную сторону, мы заставим его катиться вниз по совсем разным путям. Но если камень чувствителен к малым воздействиям только пока он находится на вершине холма, хаотические системы чувствительны к ним в каждой точке своего движения.

Чтобы показать, насколько чутко реагируют некоторые физические системы на внешние воздействия, приведем простой пример. Представим себе несколько идеализированный бильярд, в котором шары катятся по столу и сталкиваются между собой так, что потерями энергии можно пренебречь. Игрок делает один удар, и начинается длинная серия столкновений; естественно, он хочет знать, что последует за его ударом. На какой срок может игрок, в совершенстве контролирующий свой удар, предсказать траекторию шара, который он толкнул своим кием? Если он пренебрежет даже столь малым воздействи-

ем, как гравитационное притяжение электрона на краю галактики, прогноз окажется неверным уже через одну минуту! Быстрый рост неопределенности объясняется тем, что шары не идеальны, и небольшие отклонения от идеальной траектории в точке удара с каждым новым столкновением увеличиваются экспоненциально.

Экспоненциальное накопление ошибок, свойственное хаотической динамике, стало вторым камнем преткновения для лапласова детерминизма. Квантовая механика установила, что начальные измерения всегда неопределенны, а хаос гарантирует, что эти неопределенности быстро превысят пределы предсказуемости. Не будь хаоса, Лаплас мог бы тешиться надеждой, что ошибки останутся ограниченными или хотя бы будут расти достаточно медленно, позволяя делать долгосрочный прогноз. При наличии хаоса достоверность прогнозов быстро падает.

Рассмотрим неустойчивую детерминированную систему с учетом нелинейного ограничения возрастания возмущений. Для простоты рассмотрим состояние равновесия, которому отвечает точка в пространстве фазовых координат системы. Выведем систему из равновесия малым отклонением. Это возмущение начнет нарастать в силу неустойчивости. Далее нарастание возмущения начнет замедляться (вступит в силу механизм нелинейного ограничения). Чего можно ожидать в этой ситуации? В силу нелинейного ограничения отклонение уменьшится строго до нуля, система вернется в исходное состояние равновесия. Теоретически это возможно, однако очень мало вероятно, так как исходное состояние равновесия неустойчиво. Более вероятна другая ситуация: система вернется в малую окрестность исходного состояния (подойдет очень близко к состоянию неустойчивого равновесия) и вновь (в силу неустойчивости) начнет от него удаляться. Этот процесс будет длиться бесконечно во времени. Но реализация такого процесса требует некоторых специальных условий.

Предположим, что мы имеем дело с двумерной дифференциальной динамической системой. Пространство ее состояний – плоскость с координатами x и y . Если малое возмущение состояния равновесия в такой системе будет нарастать, а в результате нелинейного ограничения далее уменьшаться, то возможны два варианта: появление новых устойчивых состояний равновесия вблизи неустойчивого либо переход в новый режим, отвечающий периодическим колебаниям.

Второй вариант иллюстрирует рисунок 2.7 из подраздела «Примеры поведения потоков в двухмерном случае». Вместо неустойчивого состояния равновесия появляется новый режим – периодические авто-

колебания, которым соответствует предельный цикл на плоскости состояний.

Система с маятником имеет два аттрактора: при небольшом смещении маятника от точки покоя он возвращается в эту точку, однако при большом отклонении часы начинают тикать, и маятник совершает стабильные колебания.

Более сложный аттрактор имеет форму тора (напоминающую поверхность бублика). Такая форма отвечает движению, составленному из двух независимых колебаний, так называемому квазипериодическому движению. (Физические примеры можно построить при помощи электрических осцилляторов.) Траектория навивается на тор в пространстве состояний: одна частота определяется временем оборота по малому кругу тора, другая – по большому кругу. При комбинациях более чем двух вращений аттракторами могут быть многомерные торы.

Важное отличительное свойство квазипериодического движения состоит в том, что, несмотря на сложный характер, оно предсказуемо. Хотя траектория может никогда не повторяться точно (если частоты несоизмеримы), движение остается регулярным. Траектории, начинающиеся поблизости одна от другой на торе, так и остаются поблизости одна от другой, и долгосрочный прогноз гарантирован.

Когда мы рассматривали двухмерную дифференциальную систему с неустойчивым состоянием равновесия с нелинейным ограничением, мы допустили появление новых устойчивых состояний равновесия вблизи неустойчивого. Если мы вообразим себе такую ситуацию, когда отклонение от состояния равновесия вначале нарастает, а затем в силу нелинейности вновь стремится к нулю, мы придем к противоречию: фазовая траектория обязательно будет самопересекаться (рис. 2.14)!

Картина принципиально изменится, если мы рассмотрим динамическую систему, состояние которой характеризуется тремя независимыми переменными (фазовыми координатами). Другими словами, давайте повторим наши рассуждения, осуществив выход с плоскости в трехмерное пространство состояний. Ничто не запрещает нам реализовать ситуацию рисунка 2.14 в пространстве трех измерений. Траектория раскручивается в трехмерном пространстве, удаляясь от начальной точки по спирали. Достигнув некоторых значений и испытывая действие механизма нелинейного ограничения, траектория вновь вернется в окрестность исходного состояния. Далее ввиду неустойчивости процесс будет повторяться. Возможны два варианта: траектория спустя конечное время замкнется, демонстрируя наличие сложного, но перио-

дического процесса; траектория будет воспроизводить некий аperiодический процесс, если при $t \rightarrow \infty$ замыкание не произойдет. Второй случай и соответствует режиму детерминированного хаоса.

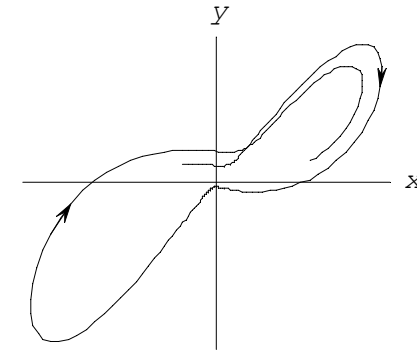


Рис.2.14 Поведение динамической системы, которое невозможно реализовать в силу пересечения фазовых траекторий. Реально эта картина получается путем проекции трехмерной траектории на плоскость двух переменных

Аттрактор Лоренца. До недавнего времени были известны лишь перечисленные виды аттракторов: неподвижные точки, предельные точки (фокусы), предельные циклы и торы. В 1963 году Э. Лоренц из Массачусетского технологического института открыл конкретную систему низкой размерности со сложным поведением. Движимый желанием понять, в чем трудность с прогнозами погоды, он рассмотрел уравнения движения жидкости (они описывают и атмосферные течения) и путем упрощения получил систему ровно с тремя степенями свободы.

Тем не менее, эта система вела себя случайным образом и не поддавалась адекватному описанию с помощью какого-нибудь из известных аттракторов. Обнаруженный Лоренцем аттрактор, называемый теперь его именем, стал первым примером хаотического, или странно-го аттрактора.

Система Лоренца следующая:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma (y - x), \\ dy/dt &= r x - y - x z, \\ dz/dt &= x y - b z, \end{aligned}$$

где r , b и σ – параметры.

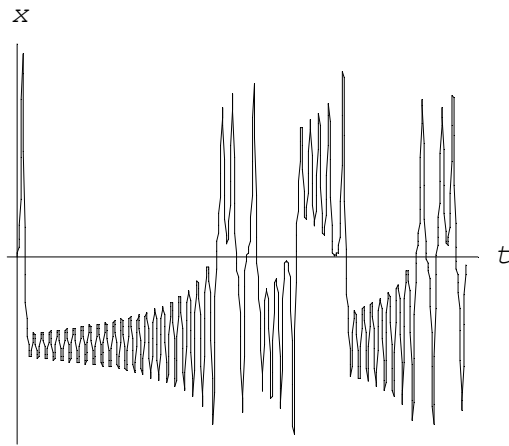


Рис. 2.15 Решение $x(t)$, начальная точка $(0, 1, 0)$

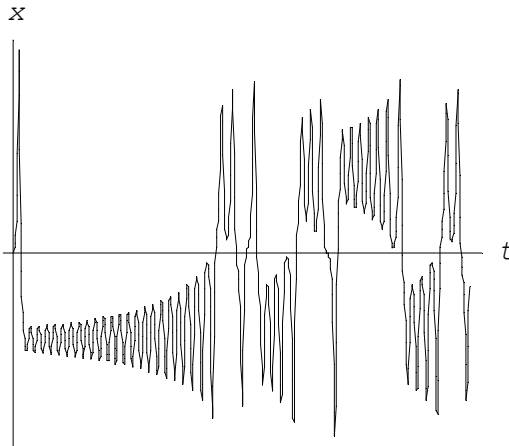


Рис. 2.16 Решение $x(t)$, начальная точка $(0, 1,001, 0)$

Зададим значения параметров $r = 28,0$, $b = 8/3$ и $\sigma = 10,0$. Рассмотрим поведение системы для двух близких начальных значений $x = 0, y = 1, z = 0$ и $x = 0, y = 1,001, z = 0$ при $t_0 = 0$. На рис. 2.15 и 2.16 показаны решения $x = x(t)$ для этих двух случаев.

Несмотря на близость начальных значений, решения с некоторого момента совершенно различны. Такое поведение решений носит название *существенной зависимости от начальных данных*. На рисунке 2.17 изображена фазовая траектория с начальным вектором $(0, 1, 0)$ и прежними значениями параметров.

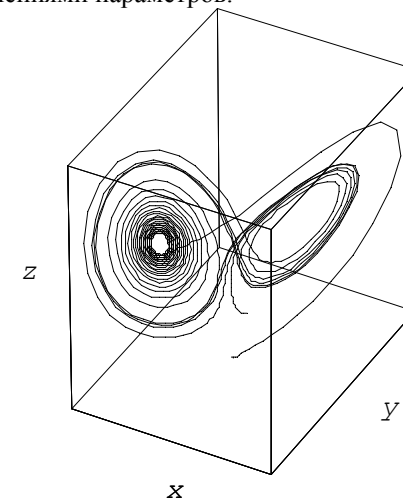


Рис. 2.17 Аттрактор Лоренца

Промоделировав свою систему на компьютере, Лоренц выявил основной механизм, который вызывал случайное поведение: микроскопические возмущения накапливаются и влияют на макроскопическое поведение. Две траектории с близкими начальными условиями экспоненциально расходятся в процессе эволюции, так что они проходят рядом лишь совсем недолго. В случае нехаотических аттракторов качественная картина совершенно другая. Для них близкие траектории так и остаются близкими, небольшие ошибки остаются ограниченными, и поведение предсказуемо.

Сформулируем математические определения.

Движение динамической системы называется *экспоненциально неустойчивым* (по Ляпунову), если расстояние $\Delta(t)$ между близкими в начальный момент фазовыми траекториями растет со временем по экспоненциальному закону: $\Delta(t) \approx \Delta(0)e^{\sigma t}$.

Величина σ , характеризующая скорость экспоненциального расхождения близких траекторий в пространстве состояний, называется *показателем Ляпунова* (Lyapunov exponent).

Уточнение определения: 1) $\Delta(0) \rightarrow 0$; 2) $t \rightarrow \infty$; 3) почти для всех направлений вектора начального смещения $\bar{\Delta}(0) = \bar{x}(0) - \bar{x}'(0)$

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta(0)} \ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(0)}.$$

Финитное экспоненциально неустойчивое движение нелинейной динамической системы называется *хаотическим движением* (chaotic motion), или *хаосом* (chaos).

Области пространства состояний, в которых движение системы хаотично, называются *хаотическими компонентами* пространства состояний. Изменение характеристик регулярного (нехаотического) движения при приближении к границам хаотической компоненты в пространстве параметров называется *сценарием перехода к хаосу*. Таких сценариев немного, и они обладают универсальными свойствами.

Аттрактор Лоренца является *странным аттрактором*. Странные аттракторы возникают в режиме детерминированного хаоса и имеют два существенных отличия: траектория такого аттрактора непериодическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив (малые отклонения от режима нарастают).

Ключ к пониманию хаотического поведения дает простая процедура растягивания и образования складок в пространстве состояний. Экспоненциальная расходимость – локальное явление: поскольку аттрактор имеет конечные размеры, две орбиты на хаотическом аттракторе не могут расходиться навсегда. Это означает, что такой аттрактор должен образовывать складки внутри самого себя. И хотя орбиты расходятся и следуют совершенно разными путями, в конце концов они должны снова пройти вблизи друг от друга. В результате орбиты на хаотическом аттракторе перемешиваются. Случайность хаотических орбит есть результат этого процесса перемешивания. Вытягивание и образование складок происходит снова и снова, создавая складки внутри складок, и так до бесконечности. Иначе говоря, странный аттрактор является фракталом – объектом, в котором по мере увеличения выявляется все больше деталей.

Хаос перемешивает орбиты в пространстве состояний точно так же, как пекарь месит тесто для выпечки хлеба. Представить себе, что происходит с близлежащими траекториями на хаотическом аттракторе, поможет такой эксперимент. Добавим в тесто каплю синей пищевой краски. Вымешивание теста – это комбинация двух действий: его то раскатывают (при этом цветное пятно расширяется), то складывают. Поначалу пятно просто становится длиннее, затем образуются складки, и все это повторяется снова и снова. При ближайшем рассмотрении оказывается, что тесто состоит из многих слоев попеременно белого и

голубого цвета. Уже через 20 шагов исходное пятно вытягивается более чем в 20 миллионов раз по сравнению с начальной длиной, а его толщина сокращается до молекулярных размеров. Синяя краска полностью перемешалась с тестом. Хаос действует точно так же, только вместо теста он перемешивает пространство состояний.

Локализация системы в малой области пространства состояний, достигнутая путем измерения, дает определенное количество информации об этой системе. Чем точнее проведено измерение, тем больше знает наблюдатель о состоянии системы. И наоборот, чем больше область, тем меньше уверенности у наблюдателя. Поскольку в нехаотической системе близко расположенные точки остаются близкими в процессе эволюции, часть информации, полученной измерением, сохраняется во времени. Именно в этом смысле такие системы предсказуемы: начальное измерение содержит информацию, которой можно воспользоваться для прогноза будущего поведения. Иначе говоря, предсказуемые динамические системы не особенно чувствительны к ошибкам измерения.

Вытягивание и складывание странного аттрактора систематически устраняет начальную информацию и заменяет ее новой: при растяжении увеличиваются мелкомасштабные неопределенности, при складывании сближаются далеко отстоящие траектории и стирается крупномасштабная информация. Таким образом, странные аттракторы действуют как своего рода помпа, "подкачивающая" микроскопические флуктуации в макроскопическом проявлении. Отсюда ясно, что никакого точного решения, никакого кратчайшего пути для прогноза будущего быть не может. Проходит совсем немного времени, и неопределенность, возникшая при начальном измерении, покрывает весь аттрактор, лишая нас возможности делать какие бы то ни было предсказания: между прошлым и будущим уже нет никакой причинной связи.

В последние несколько лет для многих систем со случайным поведением удалось найти простой хаотический аттрактор. Среди них – конвективное течение в жидкости, нагреваемой в небольшом сосуде; колебание концентрации веществ при химических реакциях с перемешиванием; сокращение клеток сердца животных; а также колебательные процессы в большом числе электрических цепей и механических установок. Вдобавок тот же простой тип случайности был установлен для построенных при помощи компьютера моделей многих столь разнообразных явлений, как эпидемия, электрическая активность нервной клетки, пульсации звезд.

Существование хаоса затрагивает сам научный метод. Классический способ проверки теории состоит в том, чтобы сделать предсказание и сверить его с экспериментальными данными. Но для хаотических явлений долгосрочный прогноз в принципе невозможен, и это следует принимать при оценке достоинств теории. Таким образом, проверка теории становится гораздо более тонкой процедурой, опирающейся больше на статистические и геометрические свойства, чем на подробное предсказание.

Хаос бросает новый вызов сторонникам редукционизма, которые считают, что для изучения системы ее нужно разбить на части и изучать каждую часть. Эта точка зрения удерживалась благодаря тому, что есть очень много систем, для которых поведение в целом действительно складывается из поведения частей. Однако хаос показывает, что система может иметь сложное поведение вследствие простого нелинейного взаимодействия всего нескольких компонент.

Хаос часто рассматривают в свете налагаемых его существованием ограничений, таких как отсутствие предсказуемости. Однако природа может пользоваться хаосом конструктивно. Через усиление малых флуктуаций она, возможно, открывает системам природы доступ к новизне. Быть может, жертва, ускользнувшая от хищника, чтобы не быть схваченной, воспользовалась хаотической регулировкой полета как элементом неожиданности. Биологическая эволюция требует генетической изменчивости, а хаос порождает случайные изменения структуры, открывая тем самым возможность поставить изменчивость под контроль эволюции.

Даже процесс интеллектуального прогресса зависит от появления новых идей и нахождения новых способов увязывать старые идеи. Врожденная творческая способность, быть может, скрывает за собой хаотический процесс, который селективно усиливает малые флуктуации и превращает их в макроскопические связные состояния ума, которые мы ощущаем как мысли. Иногда это могут быть какие-то решения или то, что осознается как проявление воли. С этой точки зрения хаос представляет нам механизм для проявления свободной воли в мире, который управляется детерминированными законами.

2.4 Одномерные дискретные динамические системы

Рассмотрим подробно одномерные дискретные динамические системы, определяемые парой (X, f) , где f – некоторое отображение пространства X в себя (X – действительная прямая или интервал на ней).

Траектории одномерных динамических систем

Основной объект изучения в теории динамических систем – это траектория, или орбита (мы будем употреблять оба этих термина). *Траекторией* динамической системы (X, f) , проходящей через точку $x \in X$, называется множество $\text{orb}(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(x)$ (иногда

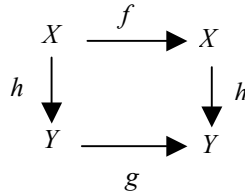
удобно понимать траекторию не как множество, а как последовательность точек $x, f(x), f^2(x), \dots$, что ближе к понятию движения по траектории – отображения $n \rightarrow f^n(x)$). Чаще всего требуется выяснить, как ведет себя та или другая траектория (или некоторое множество траекторий) на конечном или бесконечном интервале времени. В каких терминах и в какой форме может быть дан ответ на этот или подобные ему вопросы?

В теории динамических систем асимптотическое поведение траекторий обычно характеризуется с помощью предельных множеств. Точка $x' \in X$ называется предельной точкой траектории $\{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$, если для любого $n' > 0$ и любой окрестности U точки x' найдется $n'' > n'$, для которого $f^{n''}(x) \in U$ (иначе говоря, существу-

ет последовательность $n_1 < n_2 < \dots \rightarrow \infty$ такая, что $f^{n_i}(x) \rightarrow x'$). Множество всех предельных точек траектории, проходящих через точку x , обозначают $\omega(x)$. Это замкнутое множество, и в случае, когда X – компакт, оно инвариантно и непусто (если X не является компактом, то возможно $\omega(x) = \emptyset$, т. е. с течением времени траектория стремится покинуть X). Таким образом, если X – компакт, то $\omega(x)$ – наименьшее замкнутое множество, любая окрестность которого содержит все точки траектории $\{f^n(x)\}$, начиная с некоторого n (зависящего от выбранной окрестности).

Топологически сопряженные отображения

Отображения $f: X \rightarrow X$ и $g: Y \rightarrow Y$ топологически сопряжены или эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow Y$ такой, что диаграмма



коммутативна, т. е. $h \circ f = g \circ h$.

Если два отображения сопряжены, то сопряжены (или эквивалентны) и динамические системы, порожденные этими отображениями (если $h \circ f = g \circ h$, то при любом $n > 0$ имеем $h \circ f^n = g^n \circ h$). Каждой траектории одной динамической системы соответствует траектория другой динамической системы (и это соответствие задает отображение h ; траектории отображения f , проходящей через точку x_0 , соответствует траектория отображения g , проходящая через точку $h(x_0)$). Асимптотические свойства соответствующих друг другу траекторий одинаковы (предельные множества траекторий $\{f^n(x_0)\}$ и $\{g^n(h(x_0))\}$ гомеоморфны между собой).

Диаграммы Ламерея

Орбиты для одномерных дискретных отображений $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ удобно изображать с помощью так называемых диаграмм Ламерея (или Кёнигса–Ламерея). Диаграмма (лестница) Ламерея для отображения $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ с начальной точкой x_0 изображает последовательность образов точки x_0 при итерации отображения f .

На одном рисунке изображаются два графика: $y = f(x)$ и $y = x$. Выберем начальную точку $x_0 \in \mathbf{R}$, и пусть $x_n = f^n(x_0)$. Далее мы соединяем вертикальными отрезками пары точек $(x_0, 0)$ и (x_0, x_1) , (x_1, x_1) и (x_1, x_2) , (x_2, x_2) и (x_2, x_3) и т. д. Кроме того, соединяем горизонтальными отрезками пары точек (x_0, x_1) и (x_1, x_1) , (x_1, x_2) и (x_2, x_2) , (x_2, x_3) и (x_3, x_3) и т. д. (рис. 2.18). Полученная картинка напоминает паутину, сплетенную пауком, поэтому называется также паутинной диаграммой (по-английски – web-диаграммой).

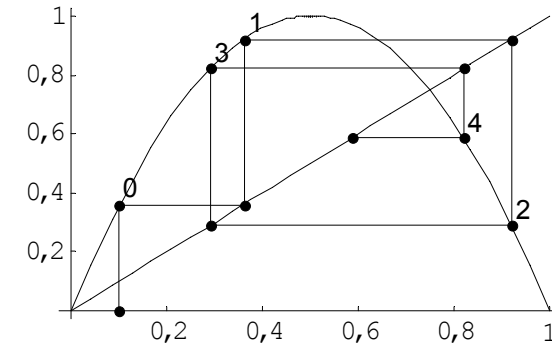


Рис. 2.18 Лестница Ламерея:
числами 0, 1, 2, ... обозначены значения $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$

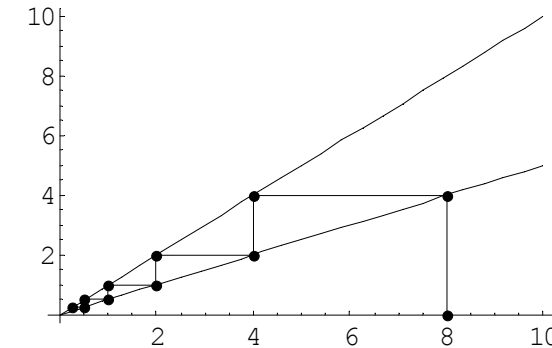


Рис. 2.19 $f(x)=0,5x$ и $x_0=8$

Неподвижные точки и лестницы Ламерея

Пусть X – метрическое пространство с расстоянием d . Отображение $f: X \rightarrow X$ называется *сжимающим отображением* (или *сжатием*), если существует такое число s , $0 < s < 1$, что $d(f(x), f(y)) \leq s d(x, y)$, $x, y \in X$.

Основные результаты теории сжимающих отображений связаны с неподвижными точками таких отображений. На диаграммах Ламерея мы всегда чертим график функции $f(x)$ и график диагональной линии $y = x$. Пересечения этих двух кривых представляют чрезвычайно важную сторону динамической системы итерации $f(x)$. Они являются, конечно, неподвижными точками отображения f . В этом курсе мы часто имеем дело с динамическими системами, которые являются сжимающимися,

этим самым гарантируя, что они сходятся к неподвижной точке (или точке равновесия) системы.

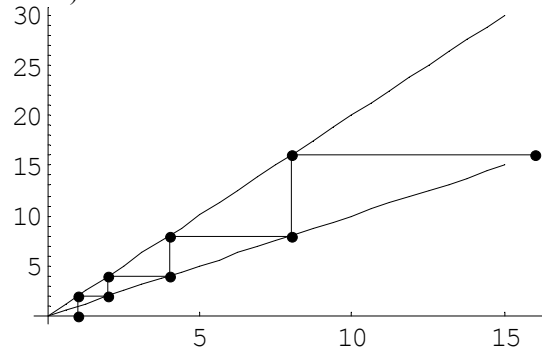


Рис. 2.20 $f(x)=2x$ и $x_0=1$

Одномерное аффинное отображение $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ есть $x \rightarrow ax + b$. Различие между $0 < a < 1$ и $a > 1$ легко выявить с помощью лестницы Ламерея. В сжимающемся случае ($a < 1$) мы видим последовательность ступенек, сходящихся к неподвижной точке (рис. 2.19), в то время как в расширяющемся случае лестница ведет в бесконечность (рис. 2.20).

Когда наклон отрицателен, мы видим другое поведение итерации $f(x) = ax + b$. Это все еще верно, что итерации сходятся к неподвижной точке, если $|a| < 1$, и расходятся в бесконечности, если $|a| \geq 1$. Тем не менее, отрицательный знак вызывает осцилляцию, которая появляется как спираль на паутиной диаграмме (рис. 2.21, рис. 2.22).

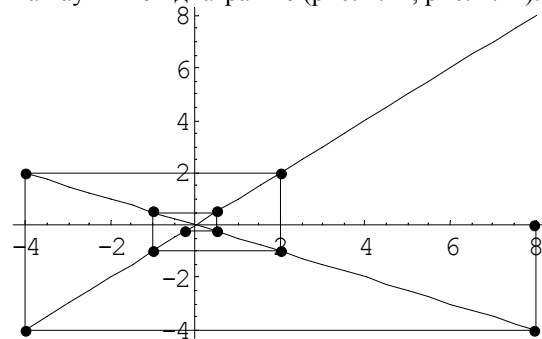


Рис. 2.21 $f(x) = -0,5x$ и $x_0=8$

Для нелинейных функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ сжимающееся поведение можно увидеть около определенных неподвижных точек также с помощью паутиных диаграмм, но есть и другие возможности. Если функция f — непрерывно дифференцируема, мы можем определить коэффициент сжатия около неподвижной точки. Предположим, что p — неподвижная точка, то есть $f(p) = p$, и полагаем, что x находится вблизи p . Если f является сжимающим отображением в некоторой окрестности p , то $|f(x) - p|$ должна быть меньше, чем $|x - p|$. Теорема о среднем значении дает нам путь описать эту ситуацию точнее. Теорема говорит, что для любых двух различных точек a и b существует точка ξ (традиционное написание) строго между a и b , так что

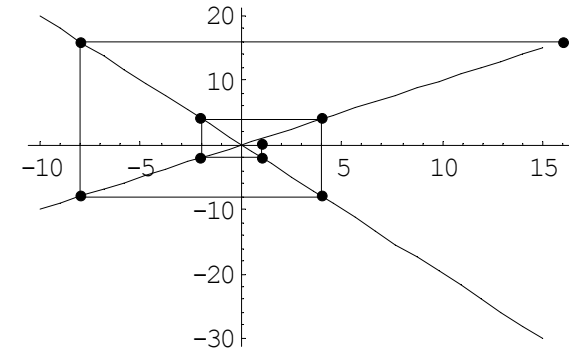
$$(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(\xi).$$


Рис. 2.22 $f(x) = -2x$ и $x_0=1$

Это означает, что наклон касательной к графику $y = f(x)$ в точке ξ равен наклону прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Для нашей ситуации мы имеем $(f(x) - p)/(x - p) = (f(x) - f(p))/(x - p) = f'(\xi)$ для некоторой точки ξ , лежащей между x и p . Если мы имеем $|f'(\xi)| < 1$ в некоторой окрестности p , то мы можем заключить, что $f(x)$ — сжимающее отображение вблизи p .

Теорема 2.1. Предположим, что $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция в интервале $[a, b]$. Допустим, что $f(p) = p$ для некоторой точки $p \in [a, b]$ и, что $|f'(p)| < 1$. Тогда существует открытый интервал (a_1, b_1) , содержащийся в $[a, b]$ и содержащий точку p , такой, что для всех $x \in (a_1, b_1)$ мы имеем $\lim_{m \rightarrow \infty} f^m(x) = p$.

Чтобы доказать эту теорему, выберем точку c так чтобы $|f'(p)| < c < 1$ (это позволяет нам строгое неравенство). То что производная

непрерывна означает, что есть интервал (a_1, b_1) , содержащий p и что $|f'(x)| < c$ для всех $x \in (a_1, b_1)$. По теореме о среднем значении следует, что $|f(x) - p| = c|x - p|$ для всех $x \in (a_1, b_1)$. Повторяя это неравенство, мы получаем $|f^m(x) - p| = c^m|x - p| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Если есть интервал, содержащий неподвижную точку p для $f(x)$ со свойством описанным в теореме 2.1, мы говорим, что p — *притягивающая неподвижная точка* $f(x)$ (или *стабильная неподвижная точка*). Теорема 2.1 говорит, что если $|f'(p)| < 1$, тогда p — притягивающая неподвижная точка.

Если $|f'(p)| > 1$, имеем противоположную ситуацию, а именно: итерации удаляются от p , по крайней мере, когда начальная точка находится вблизи p . В этом случае p называется *отталкивающей неподвижной точкой*. Если $f'(p) = \pm 1$, ситуация непонятна. Все неподвижные точки с условием $|f'(p)| \neq 1$ называются *гиперболическими неподвижными точками*. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - x$. Уравнение $x^3 - x = x$ имеет три решения: $x = 0, \pm\sqrt{2}$. Мы можем вычислить $f'(0) = -1$ и $f'(\pm\sqrt{2}) = 5$. Поэтому точки $x = \pm\sqrt{2}$ являются отталкивающими неподвижными точками, в то время как ситуация с $x = 0$ непонятна. Вычислительные эксперименты показывают, что $x = 0$ — притягивающая неподвижная точка (аттрактор) и бассейн аттрактора для нее — $\{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$ (рис.2.23).

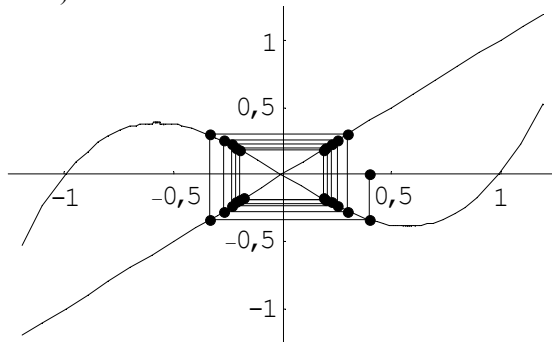


Рис.2.23 $f(x)=x^3-x$, $x_0=0,4$

Возможно определить поведение итерации в определенном аспекте отображения $y=f(x)$, не используя производную. Предположим, что у нас есть ситуация такая, как показано на рис. 2.24. Пусть есть неподвижная точка p , и слева от неподвижной точки в интервале $[a, p]$ мы имеем $x < f(x) \leq p$. Поведение ступенек в данном случае показывает

совершенно ясно, что они стремятся к p . Мы можем выяснить это точно следующим образом. Начнем с $x_0 \in [a, p]$. Затем $x_1 = f(x_0) > x_0$ и $x_1 \leq p$. Продолжая итерации, будем иметь $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq p$. Ограниченная возрастающая последовательность имеет предел, который должен быть неподвижной точкой $f(x)$, так как f — непрерывная функция. Единственная неподвижная точка f в этом интервале есть p , по нашему предположению (рис. 2.24).

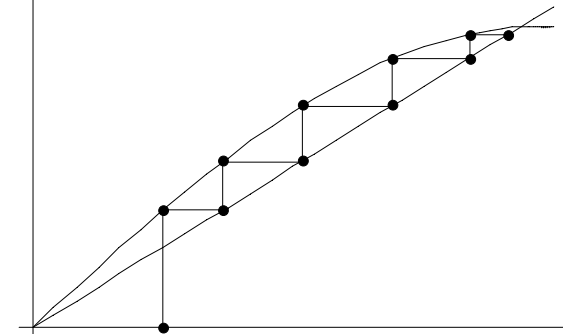


Рис. 2.24 Неподвижная точка $f(p) = p$

Квадратичное отображение единичного интервала

Перейдем к рассмотрению полиномиальных отображений второго порядка. Квадратичное полиномиальное отображение имеет три параметра $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Два из этих параметров лишние с точки зрения динамики. Все квадратичные отображения являются топологически сопряженными, причем эта сопряженность достигается с помощью аффинного гомеоморфизма.

Возьмем аффинное отображение $L(x) = ax + b$ с $a \neq 0$. Тогда $L(x)$ есть биекция и имеет обратное отображение $L^{-1}(x) = (x - b)/a$. Функция $g(x) = (L^{-1} \circ f \circ L)(x)$ является также квадратичным отображением с дополнительным свойством

$$g^m = L^{-1} \circ f \circ L \circ L^{-1} \circ f \circ L \circ \dots \circ L^{-1} \circ f \circ L = L^{-1} \circ f^m \circ L$$

для всех m . Поэтому описание орбит g эквивалентно описанию орбит f . Мы всегда можем выбрать подходящее линейное отображение L для упрощения f .

Один из стандартных случаев выбора квадратичных отображений есть $f(x) = x^2 + c$. Этот случай наиболее часто встречается в обсуждении поведения комплексного квадратичного полиномиального отображения. Другой стандартный выбор есть $f(x) = \lambda x(1 - x)$.

В этом разделе мы будем предполагать, что наше квадратичное отображение имеет форму

$$x \rightarrow f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$$

при различных значениях параметра $\lambda \in (0, 4]$. При этих значениях интервал $[0, 1]$ отображением f_λ отображается в себя. Это так называемое логистическое отображение, которое моделирует рост популяции животных, занимающих данную экологическую нишу. Считаем, что численность популяции ограничена максимальным значением ($= 1$) и минимальным значением ($= 0$), λ – коэффициент прироста. Рассмотрим траектории точек из $[0, 1]$. Наибольший интерес сейчас будут представлять периодические точки и образуемые ими циклы.

Пусть дана дискретная динамическая система (X, f) . Точка $x_0 \in X$ называется периодической точкой периода m , если $f^m(x_0) = x_0$ и $f^n(x_0) \neq x_0$ при $0 < n < m$. Каждая из точек $x_n = f^n(x_0)$, $n = 1, 2, \dots, m-1$, также является периодической периода m , и точки x_0, x_1, \dots, x_{m-1} образуют периодическую траекторию или цикл периода m . Периодические траектории играют важную роль в теории динамических систем. В особенности это относится к одномерным динамическим системам.

Для периодических траекторий предельное множество совпадает с самой траекторией. Вообще, если для какой-то траектории ее предельное множество представляет собой цикл, то эта траектория является либо периодической, либо асимптотически периодической, т.е. притягивается периодической траекторией.

Цикл $B = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ называется притягивающим, если существует окрестность U этого цикла такая, что $f(U) \subseteq U$ и $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = B$.

В этом случае для каждой точки $x_0 \in U$ имеет место $\omega(x_0) = B$, и траектория $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^\infty$ распадается на m последовательностей, сходящихся к точкам x_0, x_1, \dots, x_{m-1} соответственно.

Цикл B называют отталкивающим, если существует его окрестность U , которую каждая точка из множества $U \setminus B$ покидает за конечное время, т.е. для каждого $x \in U \setminus B$ найдется $n = n(x)$, при котором $f^n(x) \notin U$.

Следующие случаи показывают, как изменяется поведение траекторий отображения f_λ при изменении параметра λ .

1. $0 < \lambda \leq 1$. В этом случае на $I = [0, 1]$ есть только одна неподвижная точка $x = 0$. Для малых λ максимум также мал и вся парабола лежит целиком ниже прямой $y = x$ (рис. 2.25). Такая ситуация имеет место, когда касательная в точке $x = 0$ имеет наклон меньше 1, т.е. $f'_\lambda(0) =$

$\lambda < 1$. Точка $x = 0$ является аттрактором, и все начальные точки в I стремятся к 0 под действием итерации.

2. $1 < \lambda \leq 3$. Когда $\lambda > 1$, парабола первоначально расположена выше прямой $y = x$, затем пересекает её и уходит вниз. Точка пересечения – $x_f = 1 - 1/\lambda$.

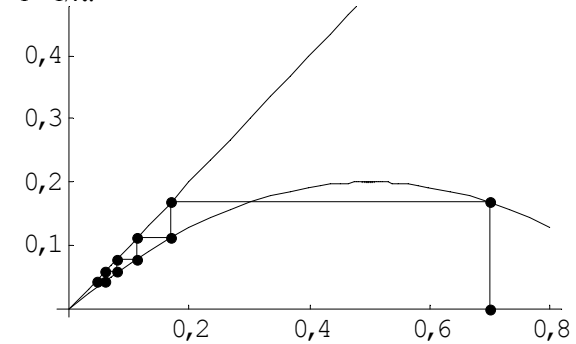


Рис. 2.25 Лестница Ламерея для $\lambda=0,8$

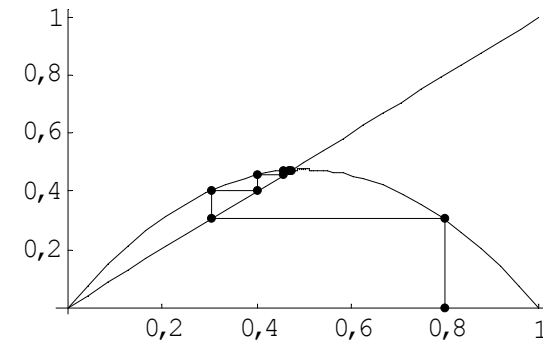


Рис. 2.26 Аттрактор $x_f = 1 - 1/\lambda$. Параметры $\lambda=1,9$ и $x_0=0,8$

Производная f в этой неподвижной точке $f'_\lambda(1 - 1/\lambda) = 2 - \lambda$. Поэтому, $0 \leq f'_\lambda(x_f) < 1$ для $1 < \lambda \leq 2$, в то время как $-1 < f'_\lambda(x_f) < 0$ для $2 < \lambda \leq 3$. Точка x_f является аттрактором для $1 < \lambda < 3$. Причем в диапазоне $1 < \lambda \leq 2$ орбита приближается к аттрактору монотонно (рис. 2.26), а в диапазоне $2 < \lambda < 3$ орбита приближается к аттрактору по спирали (рис. 2.27).

Таким образом, при значениях параметра λ меньших 3 и начальной численности популяции $x_0 > 0$ система стремится к состоянию равновесия.

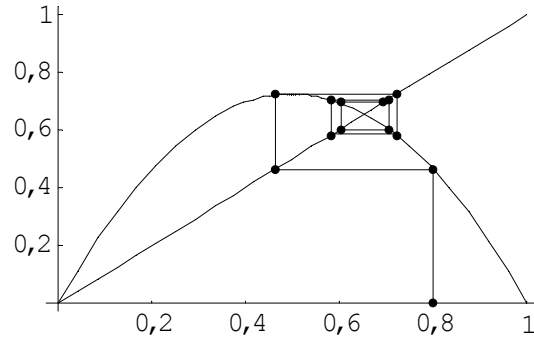


Рис. 2.27 Спираль подходит к неподвижной точке для $2 < \lambda < 3$

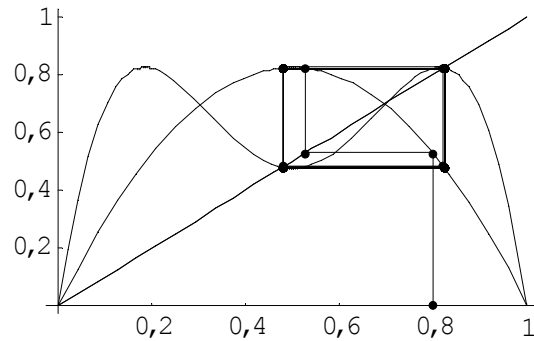


Рис. 2.28 При $\lambda=3,3$ цикл периода 2. Вторая кривая есть график функции $y=f^2(x)$. Он пересекает прямую $y=x$ в своих неподвижных точках, две из которых образуют цикл периода 2

3. $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6}$. В точке $\lambda_1 = 3$ происходит качественная перестройка поведения динамической системы f_λ (такие переходные процессы в теории динамических систем называются *бифуркациями*). Как только параметр λ переходит 3, неподвижная точка $x=1-1/\lambda$ становится отталкивающей. Но может быть здесь какой-то новый тип установившегося движения? Мы видим, как диаграмма приближается к неподвижной точке, затем отталкивается от неё и стабилизируется на квадратной орбите около неподвижной точки (рис. 2.28). Это означает, что

здесь существуют две точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1) = x_2$ и $f(x_2) = x_1$. Эти точки являются примерами периодических точек периода 2.

Как только λ переходит через 3, фиксированная точка f_λ «распадается» на притягивающий цикл периода 2 $\{x_1, x_2\}$. Значения x_1 и x_2 определяются как корни уравнения $f^2(x)=x$, отличные от корней уравнения $f(x)=x$ (из которого определяются неподвижные точки). Точно эти значения получаем, решив уравнение

$$\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda+1)x + (\lambda+1) = x.$$

Корни таковы: $\{0, 1 - 1/\lambda, (\lambda + 1 - \sqrt{-3 - 2\lambda + \lambda^2})/(2\lambda), (\lambda + 1 + \sqrt{-3 - 2\lambda + \lambda^2})/(2\lambda)\}$. Таким образом, двухпериодические точки суть $x_1, x_2 = 1/2 + 1/(2\lambda) \pm 0.5\sqrt{(1+1/\lambda)(1-3/\lambda)}$.

Стабильность этого цикла зависит от $(f^2)'(x_j)$, $j = 1, 2$ (величина производной одна и та же для всех элементов цикла). Вычисляя производную по цепному правилу, получаем

$$(f^2)'(x_j) = f'(f(x_j))f'(x_j) = f'(x_1)f'(x_2) = 4 + 2\lambda - \lambda^2.$$

Решая неравенство $|4 + 2\lambda - \lambda^2| < 1$ для $0 \leq \lambda \leq 4$, мы получаем, $3 < \lambda \leq 1 + \sqrt{6} \approx 3,449489743$. Для λ из этого интервала орбита любой точки в $[0, 1]$ становится в пределе циклом периода 2 $\{x_1, x_2\}$. Пусть $V_1 = \{x \mid \exists n \geq 0 \ f^n(x) = 1 - 1/\lambda\}$. Какова бы ни была точка $x_0 \in I \setminus \{0, 1\} \setminus V_1$, траектория $\{f^n(x_0)\}$ притягивается циклом $\{x_1, x_2\}$. Например, при $\lambda = 3,2$ численность популяции периодически осциллирует между двумя значениями 0,5130445095 и 0,7994554905 (рис. 2.29).

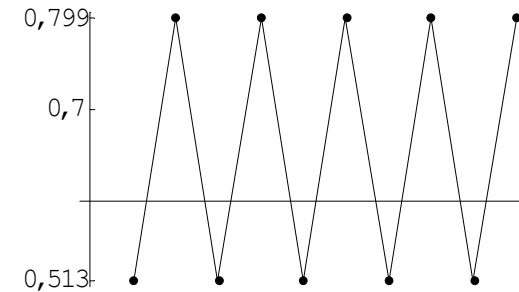


Рис. 2.29 Цикл периода 2 при $\lambda = 3,2$

4. $1 + \sqrt{6} < \lambda \leq 3,569...$ При переходе через $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6} \approx 3,449...$ происходит следующая бифуркация: цикл $\{x_1, x_2\}$ из притягивающего превращается в отталкивающий и при этом от него рождается притягивающий цикл периода 4. Чтобы найти цикл периода 4, мы должны решить уравнение $f^4(x)=x$. Этот цикл будет притягивать все точки интервала $[0, 1]$ за исключением счетного множества точек

$\{0,1\} \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$, где при $i = 2, 3$ множество $V_i = \{x \mid \exists n \geq 0 f^n(x) = x_i\}$. При $\lambda = 3,5$ система периодически осциллирует между значениями 0,5008842103, 0,8749972636, 0,382819683 и 0,8269407066 (рис. 2.30 и 2.31).

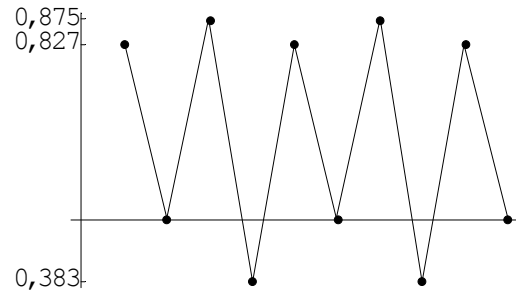


Рис. 2.30 Цикл периода 4, $x_0=0,45$, график показывает поведение системы после 500 предварительных шагов

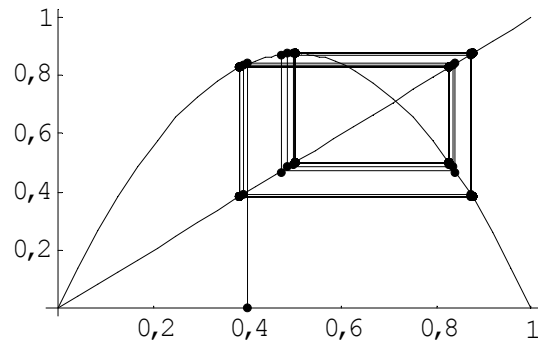


Рис. 2.31 $\lambda=3,5$: после 100 итераций появился цикл периода 4

Если параметр λ увеличивать дальше, при $\lambda_3 \approx 3,5459...$ цикл периода 4 также станет отталкивающим, и от него рождается притягивающий цикл периода 8 (притягивающий все точки интервала за исключением счетного множества точек). На рис. 2.32 изображено поведение системы при $\lambda = 3,5463$ после предварительных 1500 шагов: 8 периодических состояний популяции суть $\{0,3582385609, 0,3677996654, 0,5129264332, 0,5340061041, 0,8153074714, 0,8245965685, 0,8824740051, 0,8859824393\}$.

При дальнейшем росте параметра λ происходят новые удвоения цикла – 16, 32 и т.д., причем расстояние между точками бифуркации

уменьшается. Последовательное удвоение периодов притягивающих циклов при увеличении параметра λ будет происходить вплоть до $\lambda = \lambda^* \approx 3,569945662...$

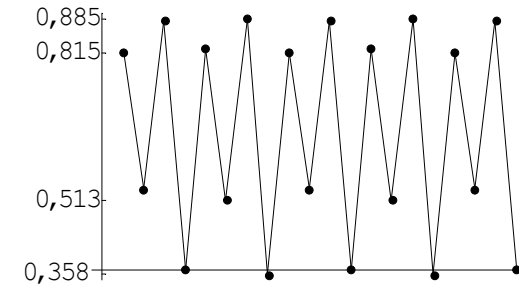


Рис. 2.32 Цикл периода 8

5. $\lambda \geq \lambda^*$. При любом $\lambda < \lambda^*$ динамическая система, задаваемая отображением $x \rightarrow \lambda x(1-x)$, устроена на $[0,1]$ достаточно просто. Каждая траектория является асимптотически периодической. Каково бы ни было λ , существует единственный притягивающий цикл периода 2^m (m зависит от λ), который притягивает все точки из $[0,1]$, за исключением счетного числа точек («приклеивающихся» к отталкивающим циклам периодов 2^i , $i = 0, 1, \dots, m-1$).

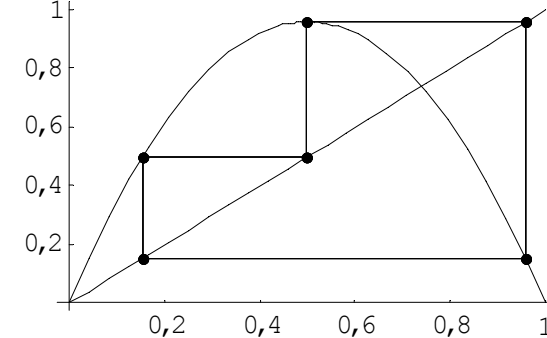


Рис. 2.33 Цикл периода 3: $\lambda=3,834$, $x_0=0,52$, пропущены первые 100 итераций, потом показаны 10 итераций.

Что будет при $\lambda \geq \lambda^*$? Динамическая система устроена более сложно. В частности, при любом $\lambda \geq \lambda^*$ существуют траектории, не притягивающиеся к циклам, и следовательно, для таких траекторий аттрактор бесконечен. Подробно поведение отображения описано в

научной литературе. Отметим только некоторые факты. При $\lambda = \lambda^*$ отображение имеет циклы всех периодов 2^i , $i = 0, 1, 2, \dots$ (и все они отталкивающие) и не имеет циклов других периодов. Если продолжать увеличивать параметр λ , будут появляться новые циклы, в том числе периодов, отличных от 2^i , $i = 0, 1, 2, \dots$. При $\lambda = 3,83$ отображение имеет циклы с любым периодом $m \in \mathbb{N}$ (рис. 2.33).

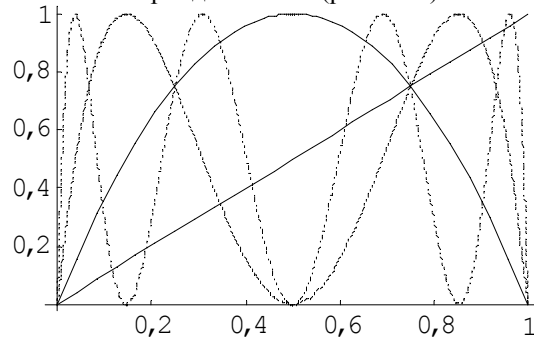


Рис. 2.34 Графики функций f, f^2 и f^3 при $\lambda=4$

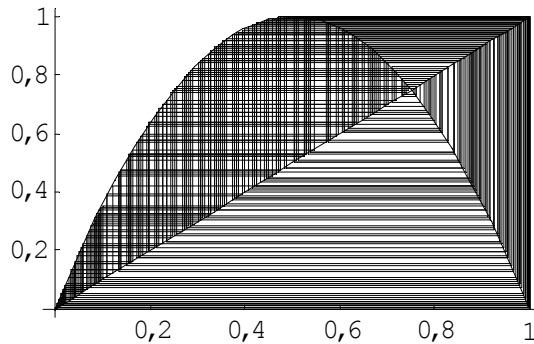


Рис. 2.35 Хаос при $\lambda = 4$: $x_0=0,52$, пропущены первые 100 итераций, потом показаны 100 итераций

6. $\lambda = 4$. Очень просто доказать, что в этом случае существуют периодические орбиты функции f любой длины $n = 2, 3, 4, \dots$. В самом деле, f при $\lambda=4$ отображает $[0, 1]$ на себя. То же самое верно и для f^2, f^3, \dots , как показано на рис. 2.34. Прямая $y=x$ пересекает график $y = f^n(x)$ точно 2^n раз в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Каждое пересечение есть

не что иное, как неподвижная точка функции f^n и, следовательно, периодическая точка с периодом n (необязательно наименьшим).

Диаграмма Ламерея для $\lambda = 4$ показывает, что орбита покрывает весь интервал $[0, 1]$ (рис. 2.35). Движение динамической системы в этом случае хаотично (см. теорему 2.5).

2.5 Универсальность Фейгенбаума

Для логистического отображения $f: x \rightarrow \lambda x(1-x)$ при фиксированном $0 < \lambda \leq 4$ существует самое большее один аттрактор A , и бассейн этого аттрактора – открытое множество, которое плотно в интервале $[0, 1]$. Аттрактор A является либо циклом, либо бесконечным множеством. Аттрактор динамической системы может быть обнаружен, по крайней мере, численно, просто позволяя системе эволюционировать достаточно долго. Для каждого λ мы выбираем первоначальное значение x_0 и затем вычисляем, скажем, 1000 итераций $f_\lambda^m(x_0)$. Мы игнорируем первые 1000 значений в последовательности итераций и только когда достигнем $f_\lambda^{1000}(x_0)$, записываем следующие 1000 значений $f_\lambda^m(x_0)$, $1001 \leq m \leq 2000$. Тем самым мы считаем, что после первоначальных 1000 шагов орбита становится близкой к аттрактору и следующие 1000 точек находятся все на аттракторе. Если, например, аттрактор – стабильный цикл периода 4, то четыре точки в этом цикле будут записаны 250 раз каждая.

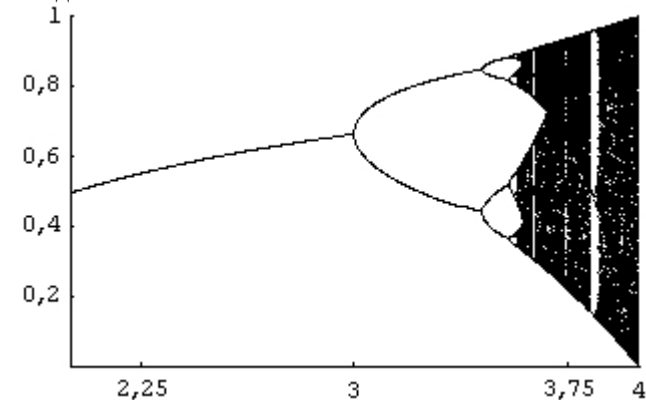


Рис. 2.36 Бифуркационная диаграмма

Мы можем сейчас начертить аттрактор для всех λ сразу на одной диаграмме, которая называется *бифуркационной диаграммой*. На горизонтальной оси откладывается параметр λ , меняющийся от 0 до 4; вертикальная ось измеряет x от 0 до 1. Вертикальные «сечения» есть аттрактор отображения f_λ (рис. 2.36).

Увеличивая масштаб, мы можем обнаружить, что бифуркационная диаграмма имеет фрактальную структуру (рис. 2.37). Удивительно, но диаграмма бифуркаций показывает, что есть диапазоны спокойствия за порогом хаоса. Мы видим промежутки, где аттрактор снова становится конечным множеством (рис. 2.38).

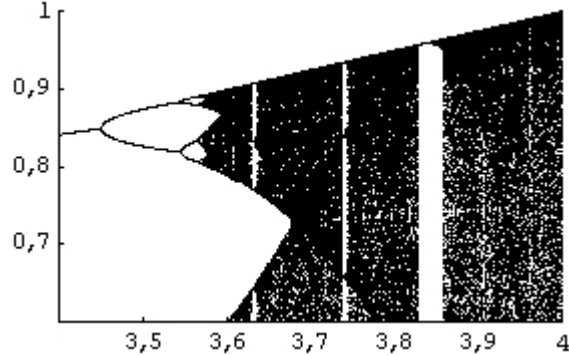


Рис. 2.37 Бифуркационная диаграмма в большом масштабе

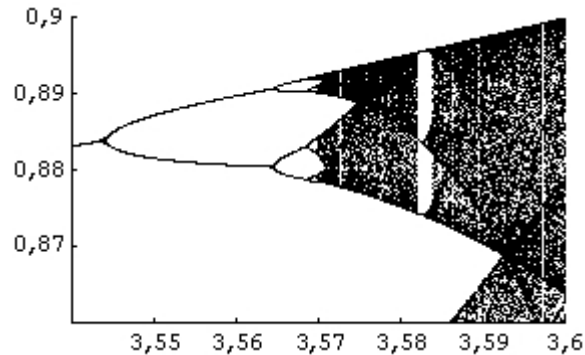


Рис. 2.38 Окно на бифуркационной диаграмме в районе точки Фейгенбаума: $3,54 < \lambda < 3,6$, $0,86 < x < 0,90$

Если мы изменяем размер окна очень тщательно, то появляется небольшой регион, где аттрактор имеет точно 3 точки; т.е. притягивающий цикл периода 3. Интервал циклов периода 3 есть $3,828 < \lambda < 3,840$ (рис. 2.39).

Обозначим через $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$, $\lambda_3 = 3.5459$, λ_4, \dots , точки бифуркации на бифуркационной диаграмме, т. е. те точки λ_n , в

которых итерирование $f(x) = \lambda x(1-x)$ сменяет притягивающую орбиту периода 2^n на притягивающую орбиту периода 2^{n+1} .

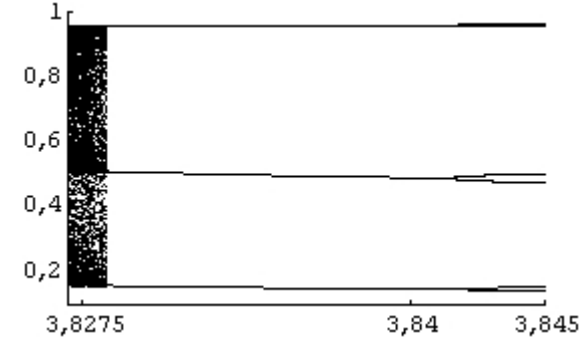


Рис. 2.39 Интервал циклов периода 3

Бесконечная последовательность бифуркаций удвоения обладает универсальными свойствами, обнаруженными Фейгенбаумом в 1978 году. Во-первых, значения точек бифуркаций стремятся к пределу $\lambda^* = 3.569\dots$. Во-вторых, отношение разностей значений управляющего параметра, соответствующих последовательным бифуркациям удвоения периода, с ростом номера бифуркации стремится к пределу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = \delta.$$

Константа $\delta = 4,669162\dots$ называется *постоянной Фейгенбаума*. Эволюция регулярного (нехаотического) движения, при котором с изменением управляющего параметра происходит бесконечная последовательность удвоения периода, приводящая к возникновению хаотического движения, называется *сценарием Фейгенбаума*. Существование двух пределов λ^* и δ возможно и для других одномерных отображений. Можно построить бифуркационную диаграмму для отображения $f: x \rightarrow x^2 + c$, отображающего в себя интервал $[-2, 0.25]$. Для этого отображения выполняется также сценарий Фейгенбаума, но соответствующее значение первого предела, конечно, другое, $c^* = -1,401155\dots$

Но самым замечательным обстоятельством является то, что постоянная Фейгенбаума δ имеет одно и то же значение для многих различных одномерных отображений, включая и $f: x \rightarrow x^2 + c$. По этой причине значение δ называется универсальной константой. В частности, δ имеет то же значение, равное $4,669162\dots$, для всех, так называемых, унимодальных отображений $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, достигающих максимума в точке $x_M \in (0, 1)$, при условии, что $f''(x_M) = 0$, причем f моно-

тонна на отрезках $[0, x_M]$ и $[x_M, 1]$ и её производная Шварца $(\frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}(\frac{f''(x)}{f'(x)})^2)$ отрицательна при всех $x \in [0, 1]$.

2.6 Строго о хаосе

Хаос – в древнегреческой мифологии – есть предельное разряжение и распыление материи, и поэтому он – вечная смерть для всего живого. Но он является также и предельным сгущением всякой материи. Он – континуум, лишенный всяких разрывов, всяких промежутков, даже вообще всяких различий. И поэтому он принцип и источник всякого становления, вечно творящее живое лоно для всех жизненных оформлений. Хаос всемогущ и безлик, он всё оформляет, но сам бесформен. Он – мировое чудовище, сущность которого есть пустота и ничто. Но это такое ничто, которое стало мировым чудовищем, это бесконечность и ноль одновременно.

*Мифологический словарь
М.: Советская энциклопедия, 1991.*

Мы уже имеем некоторые представления о хаотическом поведении детерминированных динамических систем. Перейдем к строгому математическому изложению.

Определение хаоса

Рассмотрим динамическую систему (X, f) , где на X задано расстояние d . Будем называть отображение $f: X \rightarrow X$ *хаотическим*, если выполняются следующие условия:

- f обладает существенной зависимостью от начальных условий;
- f транзитивно;
- периодические точки f плотны в X .

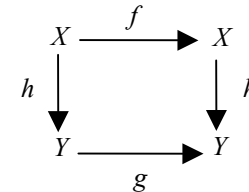
Строгая формулировка первого условия такова. Отображение f обладает существенной зависимостью от начальных условий, если существует такое $\delta > 0$, что для любого $x \in X$ и U – произвольного открытого множества, содержащего x , существуют такое целое число $n > 0$ и такая точка $y \in U$, для которых $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

Отображение f называется *транзитивным*, если для любой пары U, V открытых множеств существует такое $n \geq 0$, что $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Используя теорему Бэра о категориях из теории метрических пространств, можно показать, что, если метрическое пространство X полное, то транзитивность эквивалентна существованию плотной орбиты, т. е. такой орбиты, замыкание которой равно всему X . Свойство транзитивности в литературе называется также свойством перемешивания.

Наконец, свойство плотности периодических точек означает, что в любой окрестности любой точки в X существует по крайней мере одна периодическая точка (и следовательно, бесконечно много периодических точек).

Хаос и топологическая сопряженность

Пусть даны X – метрическое пространство с метрикой r и Y – метрическое пространство с метрикой d . Пусть непрерывные отображения $f: X \rightarrow X$, $g: Y \rightarrow Y$ и непрерывная сюръекция $h: X \rightarrow Y$ таковы, что диаграмма



коммутативна, т. е. $h \circ f = g \circ h$.

Теорема 2.2. Справедливы следующие утверждения:

1. Если отображение f удовлетворяет условию транзитивности на X , то g также удовлетворяет условию транзитивности на Y .
2. Если отображение f удовлетворяет условию периодичности на X , то g также удовлетворяет условию периодичности на Y .
3. Если дополнительно X – компактное пространство и h – инъективно, то из того, что f удовлетворяет условию существенной зависимости от начальных условий, следует, что g удовлетворяет условию существенной зависимости от начальных условий.

Следствие. Пусть $f: X \rightarrow X$ хаотично на компакте X и топологически сопряжено к $g: Y \rightarrow Y$, тогда g хаотично на Y .

Примеры хаоса

Рассмотрим простейший пример хаотического поведения. Обозначим через S^1 окружность (одномерную сферу) на плоскости, $\{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$. В комплексной записи

$$S^1 = \{e^{i\theta}: \theta \in \mathbf{R}\}.$$

Определим $f: S^1 \rightarrow S^1$ уравнением:

$$f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}.$$

Если же обозначить элементы S^1 как комплексные числа z , тогда получим: $f(z) = z^2$, то есть обычный комплексный квадратичный полином.

Теорема 2.3. Функция $f(e^{i\theta}) = e^{2i\theta}$ или, что эквивалентно, квадратичная функция $f(z) = z^2$, хаотична на окружности S^1 .

Теорема 2.4. Отображение $g: x \rightarrow x^2 - 2$ хаотично на замкнутом интервале $[-2, 2]$.

Теорема 2.5. Отображение $x \rightarrow 4x(1-x)$ хаотично на замкнутом интервале $[0, 1]$.

Действительно, отображения $x \rightarrow x^2 - 2$ и $x \rightarrow 4x(1-x)$ топологически сопряжены посредством отображения $x \rightarrow -x/4 + 1/2$, и из хаотичности отображения $x^2 - 2$ следует хаотичность $x \rightarrow 4x(1-x)$.

Рассмотрим пример кусочно-линейного отображения (рис. 2.40)

$$x \rightarrow g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \leq 1. \end{cases}$$

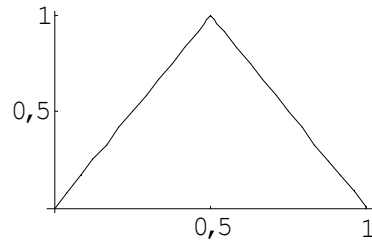


Рис. 2.40 $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$

Теорема 2.6. Отображение g хаотично на $[0, 1]$.

Доказательство. Отображение $x \rightarrow 4x(1-x)$ топологически сопряжено отображению g при помощи гомеоморфизма $x \rightarrow \sin^2(\pi x/2)$.

Условие существенной зависимости избыточно

Следующая неожиданная теорема, касающаяся определения хаоса, впервые доказана в 1992 году.

Теорема 2.7. Пусть X – метрическое пространство, содержащее бесконечное множество точек. Если отображение $f: X \rightarrow X$ непрерывно и транзитивно, а периодические точки f плотны в X , то f обладает существенной зависимостью от начальных условий.

2.7 Канторовы множества

С нелинейной динамикой связаны хорошо известные в математике *канторовы множества*. Забегая вперед, отметим, что канторовы множества являются фракталами.

Множество Кантора названо в честь немецкого математика Георга Кантора (1845–1918 г.), который описал его в 1883 году.

Классическое канторово множество «средних третей» определяется с помощью удаления открытых средних третей из последовательности замкнутых интервалов. Начнем с интервала $C_1 = [0, 1]$ и удалим среднюю треть $(1/3, 2/3)$. Получим множество C_2 , состоящее из двух отрезков $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$. К каждому из этих двух отрезков применим ту же операцию: выбрасываем средние интервалы $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$. Останется множество C_3 , состоящее из четырех отрезков длиной $(1/3)^2$ каждый. Продолжая этот процесс, получим убывающую последовательность замкнутых множеств $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \dots$

Множество C_n состоит из 2^{n+1} отрезков длиной $(1/3)^{n+1}$ каждый, так что длина $C_n = (2/3)^{n+1}$. Множество C_n называется *предканторовым*, само *канторово* множество C определяется как пересечение предканторовых:

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Итак, канторово множество C получено из $[0, 1]$ выбрасыванием счетного числа интервалов (рис. 2.41). Дополнительное к нему множество есть объединение этих интервалов.

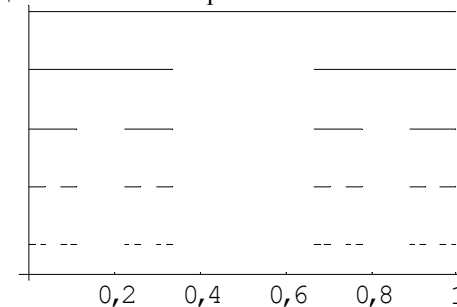


Рис. 2.41 Построение канторова множества

Очевидно, что длина C равна нулю. В этом можно убедиться, просуммировав геометрическую прогрессию длин выброшенных интервалов:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \dots = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

Конструкция канторовых множеств, описанная выше, есть теоретико-множественная, или геометрическая. Рассмотрим другой способ описания канторова множества.

Каждое вещественное число из интервала $[0, 1]$ представимо в троичной системе счисления, в которой все числа записываются с помощью всего лишь трех цифр: 0, 1 и 2. В этой системе число "семь" записывается в виде 21 (так как $7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$), а дробь $1/4$ – как 0,020202... Как и в случае десятичных дробей, некоторые числа (числа вида $a/3^k$, a – целое) допускают двоякую запись, например

$$1/3 = 0,100\dots = 0,0222\dots$$

Посмотрим, как выглядят в троичной системе точки, которые были удалены из отрезка $[0, 1]$. На первом шаге мы выбросили интервал $(1/3, 2/3)$. Троичное разложение точки x из этого интервала обязательно содержит цифру 1 на первой позиции, $x=0,1\dots$, а точки из отрезков $[1,1/3]$, $[2/3,1]$ могут быть записаны как $0,0\dots$ и $0,2\dots$.

Аналогично на втором шаге мы выбросили два интервала $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$. Троичное разложение чисел из этих интервалов обязательно содержит цифру 1 на второй позиции, а для оставшихся чисел возможно разложение с цифрами 0 или 2 на этой позиции. Продолжая этот процесс до бесконечности, приходим к выводу: число x принадлежит канторову множеству «средних третей» в том и только в том случае, если его можно представить троичной дробью, используя лишь цифры 0 и 2. Отсюда, в частности, следует, что канторово множество несчетно.

Аналогично можно получить и другие канторовы множества, используя N -ичные системы счисления. Зафиксируем целое число $N > 2$, тогда любое число $x \in [0, 1]$ можно записать в виде бесконечной последовательности

$$x = \frac{x_1}{N} + \frac{x_2}{N^2} + \frac{x_3}{N^3} + \dots,$$

где $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Фиксируя какую-нибудь цифру из $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, мы можем определить канторово множество типа «выброшенная цифра», как множество тех $x \in [0, 1]$, которые не содержат в

своей записи отмеченной цифры. Канторовы множества можно построить также, если будем «выбрасывать» несколько цифр.

Все канторовы множества являются компактными, совершенными и вполне несвязными. *Совершенным* называется замкнутое множество, каждая точка которого является предельной точкой этого множества. Поскольку каждую точку канторова множества можно сколь угодно точно приблизить концевыми точками удаленных интервалов (все эти концевые точки принадлежат канторову множеству), то канторово множество совершенно. Множество называется *вполне несвязным*, если каждая его компонента связности состоит из одной точки. Так как внутри $[0, 1]$ не существует открытого интервала, который не имел бы общих точек по крайней мере с одним из интервалов, точки которого были удалены на некоторой стадии построения, то канторово множество вполне несвязно. Отметим, что свойства компактности, вполне несвязности и совершенности сохраняются при гомеоморфизмах.

Укажем еще один способ построения компактных совершенных вполне несвязных множеств. Каждое из этих множеств, которые мы также назовем канторовыми, есть множество точек, остающихся на интервале $[0, 1]$ после удаления из него последовательности интервалов следующим образом. Пусть α – произвольное положительное число < 1 . Сначала удалим из $[0, 1]$ все точки открытого интервала $(1/2 - \alpha/4, 1/2 + \alpha/4)$ длины $\alpha/2$ с центром в точке $1/2$. Из двух оставшихся замкнутых интервалов $[0, 1/2 - \alpha/4]$ и $[1/2 + \alpha/4, 1]$, каждый из которых имеет длину $(1 - \alpha/2)/2$, удалим средние открытые интервалы, длина каждого из которых равна $\alpha/8$. Затем из оставшихся четырех замкнутых интервалов, длина каждого из которых равна $(1 - \alpha/2 - \alpha/4)/4$, удалим средние открытые интервалы, каждый из которых имеет длину $\alpha/32$. Из восьми оставшихся замкнутых интервалов, длина каждого из которых равна $(1 - \alpha/2 - \alpha/4 - \alpha/8)/8$, удалим средние открытые интервалы, каждый из которых имеет длину $\alpha/128$. После n шагов мера Лебега (длина) удаленных открытых интервалов будет равна $\alpha(1/2 + 1/4 + \dots + 2^{-n})$, и следовательно, мера совокупности удаленных открытых интервалов после бесконечной последовательности удалений будет равна α . Мера оставшегося канторова множества будет равна $1 - \alpha$. По этой причине построенные таким образом канторовы множества часто называют *канторовыми множествами положительной меры*.

Оказывается, что все канторовы множества положительной или нулевой меры гомеоморфны.

2.8 Периодичность Шарковского

Одно из главных достижений нелинейной динамики – это теорема, доказанная киевским математиком А. Н. Шарковским в 1964 году.

Упорядочим все натуральные числа следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft \dots \\
 &\triangleleft 2 \times 3 \triangleleft 2 \times 5 \triangleleft 2 \times 7 \triangleleft 2 \times 9 \triangleleft \dots \\
 &\triangleleft 2^2 \times 3 \triangleleft 2^2 \times 5 \triangleleft 2^2 \times 7 \triangleleft 2^2 \times 9 \triangleleft \dots \\
 &\triangleleft 2^3 \times 3 \triangleleft 2^3 \times 5 \triangleleft 2^3 \times 7 \triangleleft 2^3 \times 9 \triangleleft \dots \\
 &\dots \\
 &\dots \triangleleft 2^n \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1.
 \end{aligned}$$

Сначала идут все нечетные числа, потом все нечетные, умноженные на 2, потом – на 4, и т. д. После бесконечного множества таких бесконечных «секций» стоит секция степеней двойки, выстроенных в обратном порядке. Такая упорядоченность натуральных чисел называется *порядком Шарковского*.

Теорема 2.10. Пусть I – конечный замкнутый или бесконечный интервал в \mathbf{R} . Если непрерывное отображение $I \rightarrow I$ имеет цикл периода m , то оно имеет также и циклы каждого периода m' такого, что $m \triangleleft m'$. Более того, для всякого m существует отображение, имеющее цикл периода m и не имеющее циклов периода m' , если $m' \triangleleft m$.

Частный случай этой теоремы для периода 3 был рассмотрен известными западными «нелинейщиками» Т. Й. Ли и Джеймсом Йорком в 1975 г. в статье под названием «Период 3 влечет хаос!». Общая теорема Шарковского на Западе тогда была неизвестна.

3 Фракталы

Книгу можно открыть на любой странице. Каждая ее страница содержит ее целиком.

Флашен Л. Книга

3.1 Фрактальная геометрия природы

Слово *фрактал* введено в 1975 году Бенуа Мандельбротом. Оно произведено от латинского слова *fractus*, от которого происходят английские термины *fraction*, *fractional* – дробь, дробный. С математической точки зрения фрактал – это прежде всего множество с *дробной размерностью*.

Мандельброт отыскал нишу в природных явлениях для имевших репутацию патологий множеств Кантора, кривых Пеано, функций Вейерштрасса и их многочисленных разновидностей. Мандельброт показал, что существование фрактальных множеств позволяет объяснить (а в некоторых случаях и предсказать) экспериментальные результаты, полученные в разных областях. Среди них космология, теория турбулентности, химическая кинетика, физика полимеров, анализ явлений просачивания жидкости и многие другие. Он и его ученики открыли много новых фракталов, например, фрактальное броуновское движение для моделирования лесного и горного ландшафта, флуктуаций уровня рек и биения сердца.

Один из неожиданных примеров фракталов представляет собой береговая линия многих островов. При измерении длины побережья L сложная изрезанная береговая линия заменяется ломаной, состоящей из звеньев длиной не менее ε . Для обычных гладких кривых (окружности, эллипса, части синусоиды) с уменьшением ε величина $L(\varepsilon)$ стремится к некоторому значению, которое и является длиной этой кривой. Однако для побережья Великобритании оказалось, что L зависит от ε в интервале ε от 10 до 1000 км по степенному закону $L(\varepsilon) \approx \varepsilon^{1-d}$, $d \approx 1.3$, что характерно для фрактальной кривой. Аналогичная зависимость определяет длину некоторых рек, побережья многих других островов, путь, проходимый частицей при броуновском движении. Таким образом, если не знать о фрактальной природе изучаемого объекта, то, пользуясь различными «линейками», можно получать различные значения L , ни одно из которых нельзя рассматривать как характеристику объекта. Для фрактальной кривой длина не является адекватной характеристикой: при уменьшении ε она стремиться к бесконечности; так же, как и площадь – она равна нулю.

Заметим, что понятия «длина», «площадь», «объем» неразрывно связаны с понятием размерности. Для кривой размерность $d = 1$, для плоской фигуры $d = 2$ и т.д. Если применять к фигуре понятие, связанное с другой размерностью, ответ также будет неудовлетворительным. Например, для квадрата на плоскости в трехмерном пространстве объем равен нулю, площадь конечна и не равна нулю, длина бесконечна. Можно предположить, что для фракталов реализуется аналогичная ситуация, но поскольку между 1 и 2 нет промежуточных целых значений, «размерность» фрактальной кривой должна быть дробной.

Впервые подходящую величину для характеристики фракталов ввел в 1919 году Ф. Хаусдорф. Он же привел первые примеры множеств с дробной размерностью. Оказалось, что дробную размерность имеют канторово множество, кривая Коха и другие экзотические объекты, до недавнего времени мало известные за пределами математики.

Идеи Хаусдорфа, не опубликовавшего больше ни одной работы в этом направлении, были развиты А. С. Безиковичем, который длительное время являлся автором или соавтором практически всех работ по данной тематике. В последующие годы размерность Хаусдорфа-Безиковича получила применение в некоторых разделах математики, но ничто не предвещало той популярности этого понятия за пределами математики, которая сейчас наблюдается. В частности, этому способствовала научная деятельность Б. Мандельброта, который в своих книгах привел яркие примеры применения фракталов к объяснению некоторых природных явлений. Мандельброт уделил большое внимание интересному свойству, которым обладают многие фракталы. Дело в том, что часто фрактал можно разбить на сколь угодно малые части так, что каждая часть окажется просто уменьшенной копией целого. Иначе говоря, если мы будем смотреть на фрактал в микроскоп, то с удивлением увидим ту же картину, что и без микроскопа.

Это свойство *самоподобия* резко отличает фрактал от объектов классической геометрии. Действительно, возьмем такой привычный объект, как график дифференцируемой функции. Если мы направим микроскоп в какую-то точку этого графика, то при увеличении изображения увидим прямую линию – касательную в данной точке. Другими словами, классические объекты упрощаются при увеличении изображения, «в малом» они линейны (прямая, плоскость и т.д.), в то время как фракталам присуща «внутренняя бесконечность».

Фракталы вокруг нас повсюду: и в очертании гор, и в извилистой линии морского берега. Некоторые из фракталов непрерывно меняются, подобно движущимся облакам или мерцающему пламени, в то вре-

мя как другие, подобно деревьям или нашим сосудистым системам, сохраняют структуру, приобретенную в процессе эволюции.

Человеку, несвязанному с наукой, может показаться странным то, что такие привычные всем вещи лишь с недавних пор оказались в фокусе интенсивных научных исследований. Да, многие фракталы нам знакомы, но до самого последнего времени в нашем научном представлении о мире им не находилось места.

Вот что писал Б. Мандельброт, сопоставляя классическую геометрию с новой – фрактальной геометрией: «Почему геометрию часто называют холодной и сухой? Одна из причин заключается в ее неспособности описать форму облака, горы, дерева или берега моря. Облака – это не сферы, линии берега – это не окружность, и кора не является гладкой, и молния не распространяется по прямой. Природа демонстрирует нам не просто более высокую степень, а совсем другой уровень сложности. Число различных масштабов длин в структурах всегда бесконечно. Существование этих структур бросает нам вызов в виде трудной задачи изучения тех форм, которые Евклид отбросил как бесформенные, – задачи исследования морфологии аморфного».

Самоподобие фракталов – это на самом деле идеализация действительности. Нет ни одной реальной структуры, которую можно было бы последовательно увеличивать бесконечное число раз и которая выглядела бы при этом неизменной. Тем не менее, понятие фрактала на порядок увеличивает глубину нашего математического описания природы.

3.2 Размерности

Фракталы определяются с помощью понятия размерности. Понятие размерности \mathbf{R}^n мы считаем известным из элементарной геометрии и линейной алгебры. Однако в математике, механике, физике встречаются (и в последнее время – особенно часто) множества, для которых понятие размерности нуждается в специальном обсуждении и, более того, для которых можно естественным путем определить не одну, а несколько различных размерностей. При этом эти размерности могут не совпадать. Интуитивно ясно, что речь идет о множествах, устроенных локально «существенно хуже», чем открытые области в евклидовом пространстве. Строго говоря, разные понятия размерности можно определить для произвольного топологического пространства. Но для «хороших пространств», которые локально устроены как евклидовы, все эти числа (размерности) совпадают между собой. Однако, как только мы переходим к рассмотрению более сложных, экзотических (а иногда в некотором смысле «патологических»), объектов, разные понятия размерности приводят нас, вообще говоря, к разным числам. Рань-

ше считалось, что это происходит в основном для класса пространств, редко встречающихся на практике, например, в физике. Однако не так давно выяснилось (и стало уже общеизвестным), что такие аномальные с точки зрения размерности объекты встречаются в классических областях математики, связанных с конкретными физическими приложениями, например, в теории дифференциальных уравнений, динамических систем (странные аттракторы) и т. п. В связи с этим вновь ожил интерес, в частности, к анализу разных понятий размерности. Были выработаны понятия «фрактала» и «фрактальной геометрии».

Напомним, что система подмножеств U_i топологического пространства X называется *покрытием* (пространства X), если каждая точка x из X принадлежит какому-то множеству U_i . *Открытое покрытие* состоит из открытых множеств U_i . *Замкнутое покрытие* состоит из замкнутых множеств. Будем рассматривать сейчас лишь конечные покрытия. *Кратностью покрытия* называется наибольшее из таких целых чисел n , при котором существует n элементов покрытия (т.е. множеств) U_i , имеющих непустое пересечение.

Система множеств V_i называется вписанной в систему множеств U_i , если каждый элемент системы V_i содержится хотя бы в одном элементе системы U_i .

Сейчас мы сформулируем понятие топологической размерности, восходящее к работам Брауэра, Лебега, Менгера, Урысона. Рассмотрим для простоты класс *компактов* (компактных множеств), т. е. таких множеств, что из любого открытого их покрытия всегда можно выбрать конечное покрытие.

Топологической размерностью $\dim X$ компакта X называется наименьшее из таких целых чисел n , при котором во всякое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое покрытие кратности $\leq n+1$.

Если таких чисел нет, то размерность полагается равной бесконечности. Наглядный смысл этого определения предельно прост. Например, при $n = 2$ оно утверждает, что всякая двумерная «площадка» (компакт) может быть вымощена сколь угодно мелкими камнями (замкнутыми множествами) так, что камни будут примыкать друг к другу не более чем по три. В то же время эта площадка не может быть вымощена сколь угодно мелкими камнями так, чтобы были только примыкания по два. Поэтому утверждение, что, например, квадрат имеет размерность два, иногда называется «теоремой о мостовых» – при замощивании улиц и площадей брусчаткой всегда бывают примыкания камней по три, а примыканий по четыре можно избежать. При заполнении некоторого трехмерного объема достаточно мелкими кам-

нями (например, при заполнении большой полости кирпичной кладкой) обязательно возникают примыкания уже по четыре.

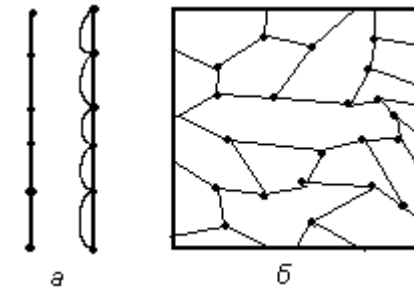


Рис. 3.1 Покрытия кратности 2(а) и 3(б)

Большим достижением математической мысли было обнаружение того, что в числе примыканий (в кратности покрытий) и заключается естественное содержание понятия размерности. Это открытие принадлежит Лебегу (1911). На рис. 3.1 показано мелкое покрытие кратности один одномерного отрезка замкнутыми множествами. Здесь же показано покрытие кратности два двухмерного квадрата. Оно характеризуется тем, что в каждом узле сходится ровно три одномерных ребра, объединение которых составляет границу элементов покрытия.

Другим подходом к понятию размерности является идея Хаусдорфа (1919), позднее развитая Безиковичем. Фактически, эта идея впервые зародилась в работах Каратеодори (1914). Чтобы сформулировать это понятие размерности, нам потребуется *сферическая мера Хаусдорфа*. Пусть X – некоторое компактное подмножество в метрическом пространстве, например в евклидовом пространстве. Рассмотрим конечное покрытие этого компакта m -мерными шарами $D_i^m(\varepsilon_i)$ с радиусами ε_i . Пусть γ_m – m -мерный объем стандартного единичного m -мерного шара (в евклидовом пространстве \mathbf{R}^n). Число γ_m можно вычислить явно, но эта формула нам здесь не потребуется, поэтому она опущена. Тогда объем шара радиуса ε_i запишется так: $\gamma_m \cdot \varepsilon_i^m$. Начиная с этого момента, мы не будем заранее предполагать, что число m целое. Пусть $m \geq 0$ – произвольное неотрицательное вещественное число. Подсчитаем сумму $\sum_i \gamma_m \cdot \varepsilon_i^m$. Беря другое покрытие компакта X шарами, мы будем получать и другое значение для этой суммы. Рассмотрим всевозможные покрытия компакта X шарами с радиусами, не превосходящими фиксированного числа ρ , и вычислим

$h_\rho = \inf_{\varepsilon_i < \rho} \sum_i \gamma_m \cdot \varepsilon_i^m$, где \inf берется по всем таким покрытиям. Если

устремить ρ к нулю, то этот \inf может лишь увеличиться. Следовательно, всегда существует предел $\lim_{\rho \rightarrow 0} h_\rho$. Это число всегда неотрицатель-

ное (оно может быть конечным или бесконечным) и называется *m-мерной сферической мерой Хаусдорфа* множества X . Будем обозначать ее через $\mu_m(X)$. Теперь можно перейти к понятию размерности. Еще раз отметим, что в определении меры Хаусдорфа число m отнюдь не предполагается целым.

Пусть X – компакт в метрическом пространстве. Безикович показал, что для каждого X всегда существует вещественное число D такое, что m -мерная мера Хаусдорфа компакта X бесконечна при $m < D$ и, напротив, равна нулю при $m > D$.

Число D называется *хаусдорфовой размерностью* компакта X (или *размерностью Хаусдорфа–Безиковича*). Будем использовать обозначение $\dim_H X$ для хаусдорфовой размерности. В отличие от топологической размерности $\dim X$ размерность $\dim_H X$ не обязана быть целым числом. В частности, эти две размерности могут не совпадать. Они связаны неравенством $\dim_H \geq \dim$, т. е. $\dim_H X \geq \dim X$ для любого X . Для «хороших пространств» эти размерности совпадают.

Фрактал – это множество, для которого $\dim_H > \dim$. В частности, любое множество, для которого размерность не является целым числом, – это фрактал.

Можно показать, что, если A – конечное или счетное подмножество в \mathbf{R}^n , то $\mu_m(A) = 0$, т. е. $\dim_H A = 0$. (Для того, чтобы $\mu_m(A) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ множество A допускало покрытие совокупностью шаров (зависящей от ε), сумма m -мер которых меньше ε .)

Более простым понятием является *размерность Минковского* (также называется *box dimension*). Пусть X некоторое компактное множество и $N(r)$ есть минимальное число шаров радиусом r , покрывающих X . Размерностью Минковского $\dim_M X$ множества X называется число D такое, что существует конечный положительный предел $\lim_{r \rightarrow 0} r^D N(r)$. Получим более удобную формулу для вычисления D .

$$\text{Пусть } C_r = r^D N(r). \text{ Имеем} \\ \ln C_r = D \times \ln r + \ln N(r),$$

отсюда

$$D = \frac{\ln C_r}{\ln r} - \frac{\ln N(r)}{\ln r}.$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$, получаем

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln(1/r)}.$$

Предел $B_m(X) = \lim_{r \rightarrow 0} r^m N(r)$ является m -мерой множества X (m -мера шара есть $\gamma_m r^m$, а чтобы определить m -меру множества X аппроксимируем X объединением шаров и суммируем их объем).

Хаусдорфова размерность не превосходит размерность Минковского, а для самоподобных фракталов они совпадают. Будем называть компактное множество A самоподобным, если существуют такие преобразования подобия S_1, S_2, \dots, S_n , при которых имеет место представление:

$$A = S_1(A) \cup S_2(A) \cup \dots \cup S_n(A)$$

причем множества $S_i(A)$ имеют лишь конечное или счетное число общих точек. Для самоподобных множеств справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть A – самоподобное множество в \mathbf{R}^n . Обозначим через d единственное решение уравнения

$$r_1^d + r_2^d + \dots + r_n^d = 1,$$

где r_i – коэффициенты подобия. Тогда, если $B_d(A) > 0$, то $\dim_M A = \dim_H A = d$.

Следствие. Если все коэффициенты подобия в теореме 3.1 равны между собой, то размерность Минковского $\dim_M A$ определяется из уравнения: $n r^d = 1$.

Имеем $d = \ln(1/n)/\ln r$.

В евклидовом пространстве при определении размерности Минковского (хаусдорфовой размерности) вместо m -мерных шаров можно рассматривать m -мерные кубы или m -мерные симплексы (аналоги тетраэдров). В любом случае значение размерности Минковского (хаусдорфовой размерности) множества от этого не изменится.

Интуитивно ясно (и можно доказать точно), что топологическая размерность канторова множества «средних третей» равна 0. Вычислим хаусдорфову размерность канторова множества. Канторово множество обладает свойством самоподобия. Действительно, по бокам первого выброшенного интервала находятся две его части, подобные целому канторову множеству с коэффициентом подобия $1/3$. Следовательно,

$$\dim_H = \ln(1/2)/\ln(1/3) = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,630929\dots$$

Определение канторова множества может быть обобщено для произвольных коэффициентов подобия. Зафиксируем два положительных числа r_1 и r_2 такие, что $r_1 + r_2 < 1$. На каждом шаге процедуры создания канторова множества будем оставлять часть r_1 слева в каждом интервале и часть r_2 справа в каждом интервале. Это удаляет порцию $1 - r_1 - r_2$ из каждого интервала. Поэтому

$$I_1 = [0, 1],$$

$$I_2 = [0, r_1] \cup [1 - r_2, 1]$$

и т.д. Пересечение всех этих множеств является также канторовым (обобщенным) множеством.

Рассмотрим обобщенное канторово множество с равными коэффициентами подобия $r_1 = r_2 < 1/2$. Тогда имеем

$$\dim_H = \ln(1/2)/\ln(r) = \ln 2 / \ln r.$$

Из полученного равенства видно, что на отрезке существуют фракталы с наперед заданной размерностью $\dim_H \in (0, 1)$.

3.3 Избранные классические фракталы

Кривая Коха

Процесс построения кривой Коха начинается с единичного отрезка S_0 на плоскости. Разделим его на три равные части и заменим средний интервал двумя связанными отрезками длиной $1/3$ (рис. 3.2).

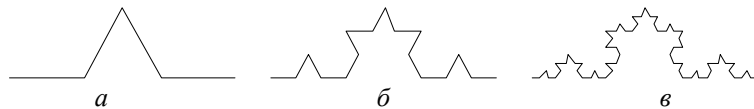


Рис. 3.2 Кривая Коха порядка 1(а), 2(б) и 3(в)

В результате образуется ломаная S_1 , состоящая из четырех звеньев длины $1/3$. На следующем шаге та же операция применяется к каждому из этих четырех звеньев в отдельности (см. рис. 3.3 и 3.4).

Получаются ломаные S_0, S_1, \dots, S_n , причем вершины каждой остаются вершинами последующей (в этом смысле каждая ломаная вписана в последующую). Предельная кривая S , в которую вписаны все эти ломаные, была открыта Хельгом фон Кохом в 1904 году.

Хотя кривая Коха и ограничена, она имеет бесконечную длину. Действительно, ломаная S_n состоит из 4^n отрезков длиной $1/3^n$ и ее периметр равен $(4/3)^n$. Отсюда ясно, что длина самой кривой Коха бесконечна. Кроме того, кривая Коха состоит из четырех равных (конгруэнтных) частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия $1/3$. Поэтому хаусдорфова размерность кривой Коха

$$\dim_H = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,26186.$$

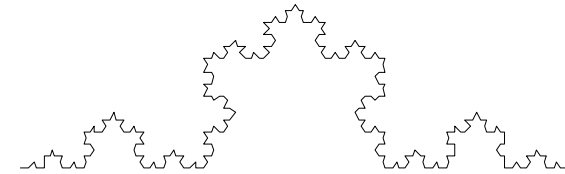


Рис. 3.3 Кривая Коха порядка 4

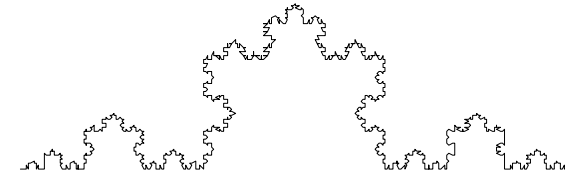


Рис. 3.4 Кривая Коха порядка 5

Три копии кривой Коха, расположенные на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую, которую часто называют *снежинкой Коха* (рис. 3.5). Итальянский математик Э. Чезаро, удивленный внутренней бесконечностью и самоподобием снежинки Коха, писал в 1905 году: «Если бы она была одарена жизнью, то можно было бы лишить ее жизни, только уничтожив кривую в целом. В противном случае она бы возрождалась снова и снова из глубины своих треугольников, как это делает жизнь во Вселенной».

Салфетка и ковер Серпинского

Проведем следующее построение. Правильный треугольник делим средними линиями на четыре равных треугольника и внутренность центрального выбрасываем. С тремя оставшимися треугольниками делаем то же самое и так до бесконечности (рис. 3.6). После счетного числа выбрасываний остается множество S , называемое *салфеткой Серпинского*.

В чем необычность полученной салфетки? Во-первых, она содержит бесконечную сетку – каркас, образованный сторонами всех участвовавших в построении треугольников. Однако, кроме этого видимого каркаса, салфетка S содержит несчетное множество других точек аналогично тому, как канторово множество не исчерпывается концами выбрасываемых интервалов.

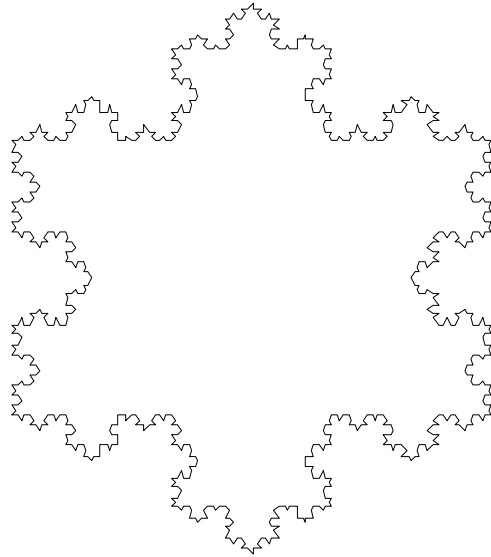


Рис. 3.5 Снежинка Коха

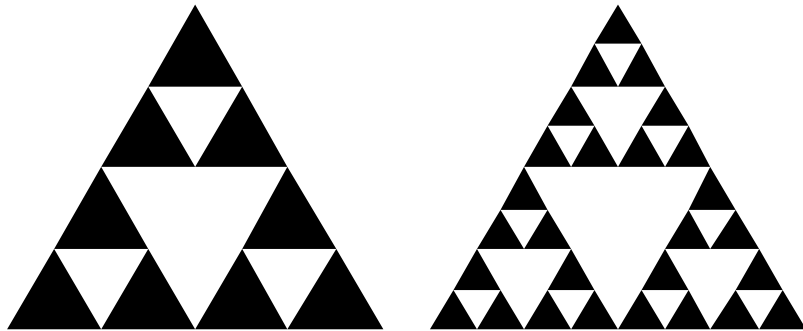


Рис. 3.6 Салфетка Серпинского

Во-вторых, салфетка самоподобна – она состоит из трех кусков, каждый из которых подобен целому с коэффициентом подобия $1/2$. «Выколем» точки, в которых эти куски соединяются, – середины сторон исходного треугольника. Тогда салфетка распадется на три салфетки меньшего размера. С ними сделаем то же самое. Что станет с салфеткой, если этот процесс продолжить до бесконечности, выколов

всего лишь счетное множество точек? Салфетка полностью рассыплется!

Чтобы лучше понять эти и другие свойства салфетки, рассмотрим процесс ее построения более подробно. Пусть S_0 – исходный правильный треугольник со стороной 1. Средние линии делят его на четыре равных треугольника, после выбрасывания внутренности центрального из них получим множество S_1 , состоящее из трех треугольников со стороной $1/2$. На следующем шаге ту же операцию осуществим для каждого из этих трех треугольников и т. д. В результате возникает убывающая последовательность замкнутых множеств S_n , и салфетка S есть их пересечение. Множество S_n состоит из 3^n правильных треугольников, стороны которых имеют длину $1/2^n$ и принадлежат S по построению (они образуют часть каркаса). Легко видеть, что при $n \rightarrow \infty$ сумма периметров треугольников, входящих в S_n , стремится к бесконечности, а сумма их площадей – к нулю. Поэтому общая длина каркаса бесконечна, площадь же салфетки равна нулю. Хаусдорфова размерность салфетки Серпинского, очевидно, равна $\dim_H = \ln 3 / \ln 2$.

Аналогично строится ковер Серпинского. Пусть F_0 – единичный квадрат; разобьем его на девять одинаковых квадратов со стороной $1/3$ и выбросим внутренность центрального квадрата. Через F_1 обозначим оставшиеся восемь квадратов. Затем повторим эту операцию с квадратами из F_1 (рис. 3.7).

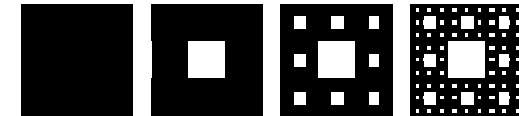


Рис. 3.7 Ковер Серпинского

На n -м шаге получаем множество F_n , составленное из 8^n квадратов со стороной 3^{-n} , $F_n \subset F_{n-1}$, так что площадь $F_n = (8/9)^n$. Ковер Серпинского F есть пересечение множеств F_n , $F = \bigcap F_n$.

Ковер обладает свойством самоподобия. Действительно, его можно разбить на восемь частей, которые получаются из F сжатием в три раза и сдвигом. Поэтому $\dim_H = \ln 8 / \ln 3$.

Недифференцируемые функции

Один из первых примеров непрерывной на всей числовой оси функции, но во всех точках не имеющей конечной производной, был продемонстрирован К. Вейерштрассом (1860, опубликован в 1872).

Функция Вейерштрасса задается сходящимся рядом

$$W(x) = \sum_{n \geq 1} a^n \cos(b^n \pi x),$$

где $0 < a < 1$, $b > 1$, $ab > 1$.

Поскольку $a < 1$, члены ряда мажорируются геометрической прогрессией, и следовательно, функция $W(x)$ непрерывна. А то, что функция не является дифференцируемой ни в одной точке, доказал Харди в 1916 году.

На рис. 3.8–3.11 изображен график этой функции при $a = 0,5$, $b = 4$ и для 9 членов ряда.

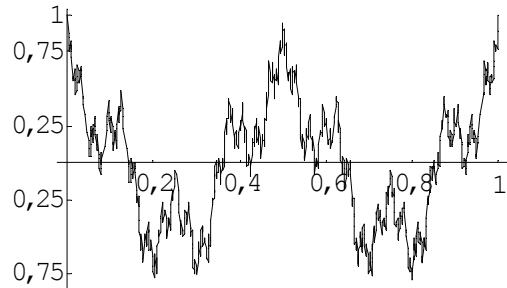


Рис. 3.8 Функция Вейерштрасса при $0 < x < 1$

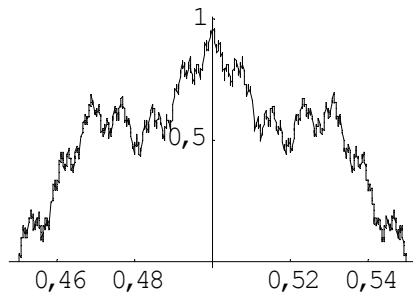


Рис. 3.9 Функция Вейерштрасса при $0,45 < x < 0,55$

Видно, что эта кривая инвариантна относительно некоторого преобразования координат (растяжение в b раз вдоль оси абсцисс и в $1/a$ раз вдоль оси ординат) и обладает сложной внутренней структурой. В меньшем масштабе она выглядит так же, как в более крупном – эта кривая является фракталом.

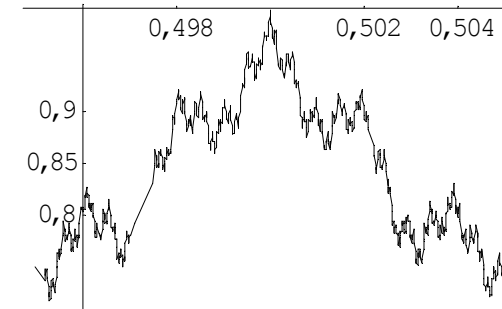


Рис. 3.10 Функция Вейерштрасса при $0,495 < x < 0,505$

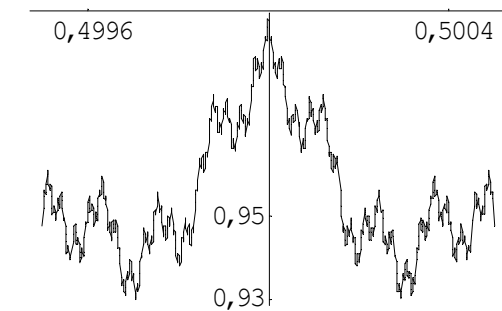


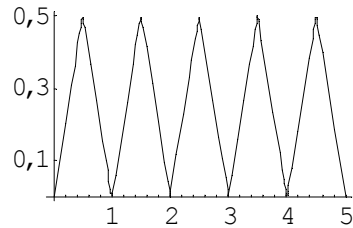
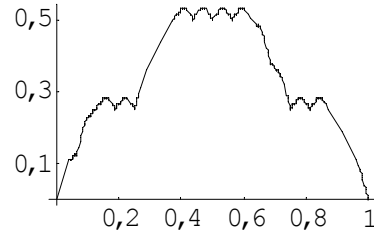
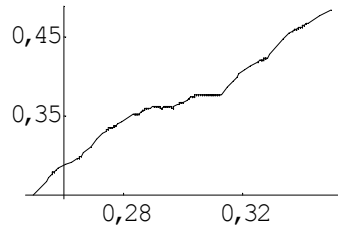
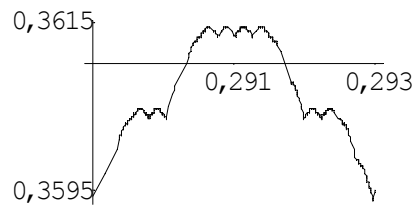
Рис. 3.11 Функция Вейерштрасса при $0,4995 < x < 0,5005$

Более простой пример, основанный на той же идее, в котором периодические функции типа $\cos \omega x$ заменены периодическими ломаными, был построен Б. Л. ван дер Варденом.

Определим сначала кусочно-линейную функцию $u_0(x) = \text{abs}(x - \text{round}(x))$ (рис. 3.12). Построим теперь семейство функций для $k=1, 2, \dots$ $u_k(x) = u_0(4^k x)/4^k$. Функция ван дер Вардена определяется как

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Эта функция непрерывна на всей числовой оси и ни в одной точке не имеет конечной производной. На рис. 3.13–3.15 изображены графики этой функции, когда взят 31 член в ряде.

Рис. 3.12 Функция $u_0(x)$ Рис. 3.13 Функция ван дер Вардена, $0 < x < 1$.Рис. 3.14 Функция ван дер Вардена, $0,25 < x < 0,35$ (этот участок выглядит «гладким» на предыдущем графике)Рис. 3.15 Функция ван дер Вардена, $0,289 < x < 0,293$

Любопытно, как менялось отношение к фракталам и недифференцируемым функциям. «Я с дрожью ужаса отворачиваюсь от ваших несчастных проклятых функций, у которых нет производных», – из письма Эрмита к Стильтесу (1893 год).

Анри Пуанкаре (1908 г.): «Логика иногда делает чудовища. Вот уже с половины века мы наблюдаем, как появляется толпа странных функций, которые, по-видимому, пытаются возможно меньше походить на честные функции, служащие какой-нибудь цели. Нет уже больше непрерывности, а если иногда бывает, то без производных и т. д. Даже больше, со строго логической точки зрения, именно эти странные функции и являются наиболее общими, а те, с которыми встречаешься без особых поисков, уже являются только как частные случаи. Для них остается только самый маленький уголок. До сих пор, пока изобретали новую функцию, это было для какой-нибудь практической цели; сегодня их изобретают для того, чтобы сделать ошибочными рассуждения наших отцов, и ничего другого получить из них нельзя».

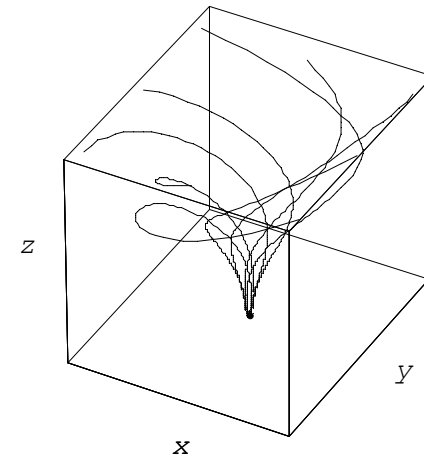
Но уже в начале нашего века французский физик Жан Перрен высказал мысль о том, что недифференцируемые функции будут полезны во многих физических задачах, в частности, связанных с броуновским движением. Работы Б. Мандельброта и его последователей сделали эту исследовательскую программу реальностью.

Динамическая система Лоренца

Система Лоренца представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается из уравнений гидродинамики в задаче о термоконвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости:

$$\left. \begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y - x), \\ dy/dt &= rx - y - xz, \\ dz/dt &= xy - bz, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где r , b и σ – параметры. Исторически уравнения Лоренца явились первой динамической системой, в которых было доказано наличие странного аттрактора.

Рис. 3.16 Точка O – глобальный аттрактор системы, $r = 0,5$

Зададим значения параметров $b = 8/3$ и $\sigma = 10$ и кратко опишем изменение режимов поведения в системе (3.1) в зависимости от значений ее параметра r . Положение равновесия – стационарные точки системы Лоренца находятся из уравнений

$$\sigma(y - x) = 0, \quad rx - y - xz = 0, \quad xy - bz = 0.$$

Начало координат, т. е. точка $O(x = y = z = 0)$ устойчива и является устойчивым узлом, если $0 < r < 1$. Когда $r > 1$, точка O теряет устойчивость, превращается в седло-узел, и в системе возникают еще две стационарные точки:

$$O_1(x, y, z) = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1),$$

$$O_2(x, y, z) = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

На рис. 3.16 видно, что точка O является простым аттрактором. Выбрано 8 фазовых траекторий с различными начальными значениями: $(5, 5, 10)$, $(5, -5, 10)$, $(-5, -5, 10)$, $(-5, 5, 10)$, $(0, 5, 10)$, $(5, 0, 10)$, $(-5, 0, 10)$ и $(0, -5, 10)$.

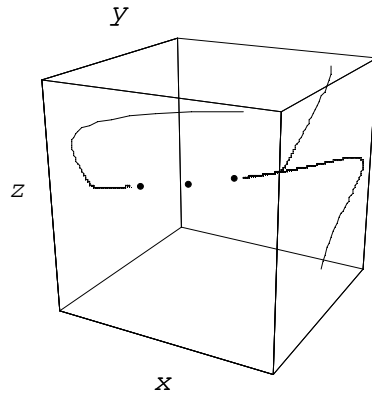


Рис. 3.17 $r = 0,01$

Рассмотрим поведение системы вблизи $r=1$. Возьмем $r = 1,01$ и три траектории с начальными точками $(0,5, 0,5, 1)$, $(0,5, -0,5, 1)$ и $(-0,5, -0,5, 1)$ (рис. 3.17). На этом и следующих рисунках жирными точками обозначены три стационарные точки системы: O , O_1 и O_2 .

Следующее событие при увеличении r — это превращение устойчивых узлов O_1 и O_2 в спирали, что имеет место при $r = 1,346$. Это первое появление колебательного движения в системе, при возрастании r от 0. На рис. 3.18 $r = 10$.

При $r = 16$ траектория, начинающаяся в начале координат, делает круг вокруг ближайшей точки равновесия O_1 и затем переходит к O_2 , где образует спираль вокруг этой точки (рис. 3.19).

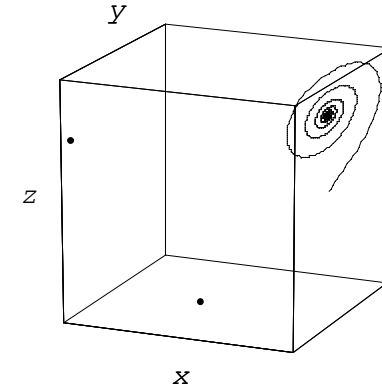


Рис. 3.18 $r = 10$

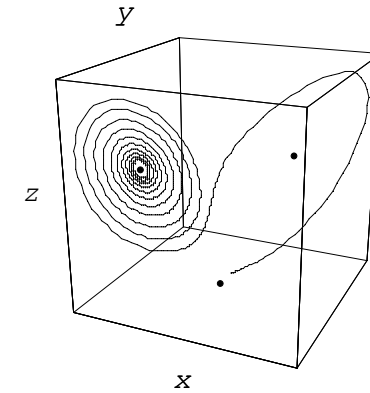
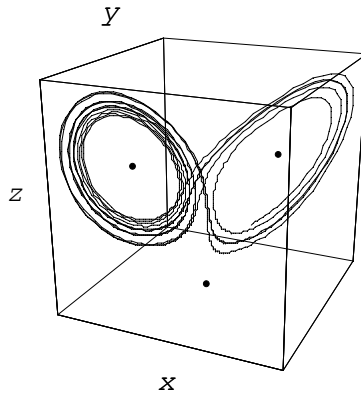
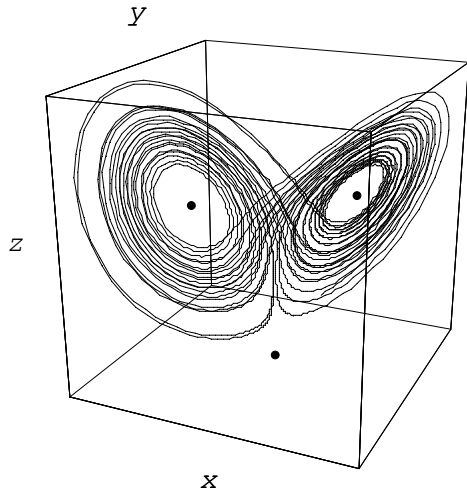


Рис. 3.19 $r = 16$

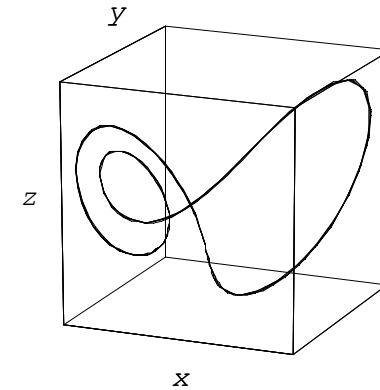
В интервале $13,926 < r < 24,06$ при возрастании r увеличивается колебательный характер решения. Для больших значений r из этого диапазона, многие решения переходят много раз туда и обратно между точками O_1 и O_2 , прежде чем начинают накручиваться на одну из точек (рис. 3.20). Но на какую именно точку — заранее предсказать нельзя. Такое поведение называется *предхаотическими переходами*.

В интервале $24,78 < r \leq 28$ все стационарные точки O , O_1 и O_2 являются неустойчивыми. Единственным устойчивым предельным множеством — аттрактором — будет аттрактор Лоренца (рис. 3.21).

Рис. 3.20 $r = 23$ Рис. 3.21 $r = 28$

Аттрактор Лоренца не является ни двумерной поверхностью, ни склеенным двумерным многообразием. Более того, поверхность, проходящая через такой аттрактор, пересекается траекториями в точках, образующих канторово множество. При больших значениях система может снова вести себя регулярно. При $r = 100$ появляется устойчивый предельный цикл (рис. 3.22).

В качестве хорошего инструмента для построения и исследования всевозможных фракталов рекомендуем программу Fractint (см. список литературы).

Рис. 3.22 $r = 100$

3.4 L-системы

Основные определения

Многие биологические объекты во время роста проявляют фрактальную структуру, например ветви дерева. Во многих случаях самоподобие независимо от масштаба в таких объектах появляется вследствие того, что их рост включает один и тот же самый простой повторяющийся процесс, например, ветвление. Эти простые повторяющиеся процессы могут быть математически описаны с помощью соответствующего множества *правил переписывания* или *продукций*.

Системы переписывания правил, работающие с символическими строками, успешно применяются для описания синтаксических свойств естественных языков или формальных определений языков программирования (системы для этих целей носят название «формальные грамматики»).

Мы рассмотрим только специальный случай правил переписывания, а именно, *L-системы*. *L-системы* введены биологом Аристидом Линдемаером в 1968 году для описания клеточного деления многоклеточных организмов и роста растений. *L-системы* нашли плодотворное применение в теории формальных языков. С другой стороны, *L-системы* можно рассматривать как частный случай символических динамических систем, которые, что очень важно, имеют простую и естественную интерпретацию. В частности, *L-системы* оказались особенно подходящими для описания фрактальных структур.

Прежде чем непосредственно определить L -системы, необходимо ввести некоторые параметры и термины.

Алфавит V – конечное непустое множество. **Буквы (символы)** – элементы алфавита V . **Слово** над алфавитом V – это конечная цепочка, состоящая из нуля или более букв из V , причем одна буква может входить в слово несколько раз. Цепочка, состоящая из нулевого количества букв, называется **пустым словом** и обозначается \emptyset . Множество всех слов над алфавитом V обозначается V^* . Если x и y – слова над алфавитом V , то их **катенация** (или **конкатенация**, результат **приписывания**) – тоже слово над V . Катенация является ассоциативной операцией, и пустое слово служит единицей по отношению к ней: $x\emptyset = \emptyset x = x$ для всех x . **Длина слова** x , обозначаемая $|x|$, есть число букв в x , причем каждая буква считается столько раз, сколько раз она входит в x . Слово x называется **подсловом** y , если существуют такие слова x_1 и y_1 , что $y = x_1 x y_1$. Если при этом $x_1 = \emptyset$, то x называется **началом** y .

Простая (детерминированная и контекстно-независимая) L -система содержит три компонента.

Алфавит – конечное множество V , элементы которого обозначаются обычно буквами a, b, c и т. д. или возможно другими символами.

Аксиома или **инициатор** – слово из V , обозначает начальное состояние системы.

Продукция (или **правило переписывания**) есть отображение символа $a \in V$ в слово $w \in V^*$. Это обозначается с помощью нотации $p: a \rightarrow w$. Мы допускаем, как возможные продукции, отображения a в пустое слово. Если символ $a \in V$ не имеет явно заданной продукции, то мы считаем, что он отображается сам на себя. В этом случае символ a есть константа L -системы.

Эволюция L -системы определяется как последовательность $\{g_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где каждое поколение g_n есть слово в V^* , что эволюционирует из предыдущего поколения g_{n-1} , применяя все продукционные правила к каждому символу из g_{n-1} . Исходное поколение g_0 есть аксиома. Важно подчеркнуть, что правила переписывания в каждом поколении применяются **параллельно и одновременно**.

L -система Фибоначчи

Нашим первым примером будет L -система *Фибоначчи* со следующими компонентами:

$$V = \{a, b\}, \\ \text{аксиома} = a,$$

$$p1: a \rightarrow b, \\ p2: b \rightarrow ba.$$

Первые несколько поколений системы Фибоначчи следующие:

$$\begin{array}{ll} g_0 & a \\ g_1 & b \\ g_2 & ba \\ g_3 & bab \\ g_4 & babba \\ g_5 & babbabab \\ g_6 & babbababbabba \\ g_7 & babbababbababbabab \end{array}$$

Мы можем мыслить объекты a и b как какие-то жизненные формы, и продукции создают различные стадии в их «жизни» (объекты a и b в каждой генерации заменяются своими потомками). Поэтому символические динамические системы есть очень простые модели популяционной динамики.

Причиной названия данной системы системой Фибоначчи послужила её связь с **числами Фибоначчи** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, Числа Фибоначчи определяются рекуррентным отношением

$$F_0 = F_1 = 1,$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ для } n > 1.$$

Легко проверить, что $|g_n| = F_n$ для $n > 0$. Еще более замечательно, что локальные продукционные правила приводят к глобальному эффекту: $g_{n+2} = g_{n+1} g_n$.

Началом каждого слова g_{n+1} с $n > 1$ является слово g_n , поэтому легко определить бесконечную последовательность $g_\infty = babbababbababbababab\dots$, для которой все g_n являются начальными подсловами.

L -система Туэ

В качестве следующего примера L -системы рассмотрим L -систему Туэ:

$$V = \{a, b\}, \\ \text{аксиома} = a, \\ p1: a \rightarrow ab, p2: b \rightarrow ba.$$

Последовательность поколений начинается так:

$$\begin{array}{ll} g_0 & a \\ g_1 & ab \\ g_2 & abba \\ g_3 & abbabaab \\ g_4 & abbabaabbaababba \end{array}$$

Число символов удваивается в каждой генерации, следовательно, $|g_n| = 2^n$. Первый вопрос, который мы можем задать, – не проявляется ли в этой системе какой-либо эффект эмерджентности?

После некоторых наблюдений мы можем заключить, что $g_{n+1} = g_n R(g_n)$, где R – отображение, определяемое двумя правилами $a \rightarrow b$ и $b \rightarrow a$.

Так как g_n есть начало g_{n+1} , то эта L -система создает бесконечную последовательность из a и b , начинающуюся с

$$g_\infty = abbabaabbaabbababababbaabbababab...$$

Эта последовательность обладает многими интересными свойствами и известна, как *последовательность Туэ*, найденная Акселем Туэ в 1912 году при изучении формальных языков (но этот термин еще не использовался тогда). Мы можем обнаружить очень интересную формулу для членов этой последовательности, если заменим a на 1 и b на -1 . В этом случае действие отображения R сводится просто к почленному умножению на минус единицу.

Графическая интерпретация L -систем

Для графической реализации L -систем в качестве подсистемы вывода используется так называемая *черепаший графика* (*тертл-графика*, turtle – черепаха). При этом точка (черепашка) движется по экрану дискретными шагами, как правило, прочерчивая свой след, но при необходимости может перемещаться без рисования следа. В нашем распоряжении имеются три параметра: x , y , α , где x , y – координаты черепашки, α – направление, в котором она смотрит. Черепашка обучена интерпретировать и выполнять последовательность команд, задаваемых кодовым словом, буквы которого читаются слева направо. Кодовое слово состоит из символов алфавита V данной L -системы и представляет собой результат работы L -системы.

Алфавит может включать следующие символы:

- F – переместиться вперед на один шаг, прорисовывая след;
- G – переместиться вперед на один шаг, не прорисовывая след;
- $+$ – увеличить угол α на величину θ ;
- $-$ – уменьшить угол α на величину θ .

Со всеми остальными символами, входящими в алфавит, обычно не связывают никаких графических действий.

Размер шага и величина приращения по углу θ задаются заранее и остаются неизменными для всех перемещений черепашки. Если начальное направление движения α (угол, отсчитываемый от положительного направления оси X) не указано, то полагаем α равным нулю.

Рассмотрим пример:

$\theta = \pi/3$;

аксиома $= F$;

правило переписывания $- F \rightarrow F+F- - F+F$

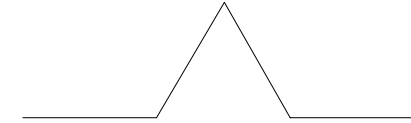


Рис. 3.23. Первая итерация ($F+F- - F+F$).

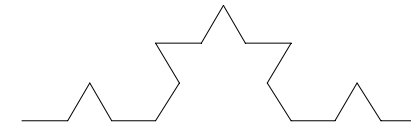


Рис. 3.24. Вторая итерация

($F+F- - F+F+F+F- - F+F- - F+F- - F+F+F+F- - F+F$)

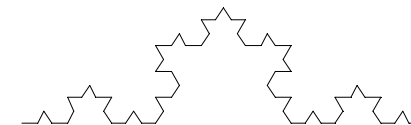


Рис. 3.25 Третья итерация

($F+F- - F+F+F+F- - F+F \dots$

(148 символов всего) $\dots F+F+F+F- - F+F$)

Таким образом, данная L -система строит кривую Коха (рис. 3.23–3.25).

Число итераций для L -системы будем называть *порядком*. Важно отметить, что L -система любого порядка не является фракталом. Для этого, строго говоря, нужно сделать бесконечное число итераций.

Использование нескольких переписывающих правил в L -системах значительно увеличивает их возможности. В частности, это помогает изменить направление чтения некоторых правил (справа налево) при построении L -систем. С помощью L -систем можно построить уже нам известные классические фракталы. Например, множество Кантора описывается следующей L -системой:

аксиома $= F$;

продукции:

$F \rightarrow FGF, G \rightarrow GGG$.

Салфетка Серпинского описывается L -системой (рис. 3.26–3.27, n указывает порядок кривой):

$$\theta = \pi/3;$$

$$\text{аксиома} = FXF- - FF- - FF;$$

$$\text{продукции: } F \rightarrow FF, X \rightarrow - - FXF++ FXF++ FXF- - .$$

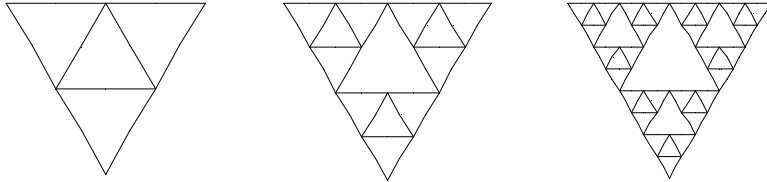


Рис. 3.26 Салфетка Серпинского, $n = 1, 2, 3$

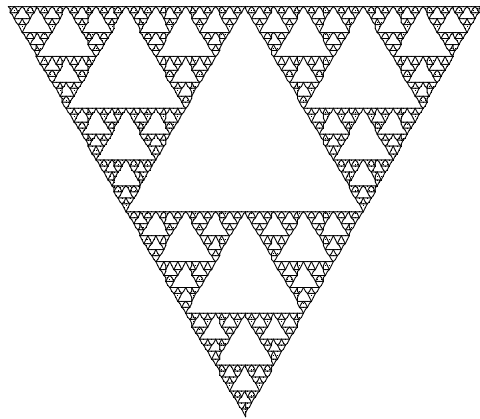


Рис. 3.27 Салфетка Серпинского, $n = 6$

L -система для снежинки Коха (см. рис. 3.5):

$$\theta = \pi/3;$$

$$\text{аксиома} = F++F++F;$$

$$\text{продукция: } F \rightarrow F-F++F- F.$$

Снежинку Коха и другие непрерывные кривые на плоскости, полученные с помощью L -систем, объединяет то, что их размерность удовлетворяет неравенству: $1 \leq \dim_H < 2$. Возникает вопрос, существует ли кривая размерности 2? Этот вопрос примечателен не только тем, что ответ на него положительный, но и тем, что он был разрешен Джузеппе Пеано еще в 1890 году. Пеано построил непрерывную кривую, область определения которой – отрезок, а область значений – квадрат

на плоскости. Соответствующая линия называется *кривой Пеано* или *кривой, заполняющей плоскость*. Кривая Пеано не является фракталом, но тем не менее интересна как пример функции, отображающей множество заданной топологической размерности на множество большей размерности. Это и другие подобные открытия примерно того же времени, в особенности работы Вейерштрасса и Кантора, оказали огромное влияние на дальнейшее развитие математического анализа. Опоры на одну только интуицию уже недостаточно. Отображение Пеано не устанавливает взаимно однозначного соответствия между точками отрезка и квадрата. Это в принципе невозможно сделать с помощью непрерывной функции. Некоторым точкам квадрата соответствуют несколько точек отрезка.

L -система, описывающая кривую Пеано, достаточно проста:

$$\theta = \pi/2;$$

$$\text{аксиома} = F;$$

$$\text{продукция: } F \rightarrow F+F- F-F- F+F+F-F- F.$$

На первом шаге единичный отрезок заменяется на 9 отрезков (рис. 3.28). На рис. 3.29 показано, в каком порядке задается непрерывное отображение отрезка на эти новые девять отрезков. При $n = 2$ исходный отрезок отображается непрерывно на 9×9 отрезков (рис. 3.30), при $n = 3$ отрезок отображается непрерывно на $9 \times 9 \times 9$ отрезков (рис. 3.31) и т. д.

Тем самым для каждого $n = 1, 2, 3, \dots$ мы получаем непрерывное отображение $P_n : I \rightarrow S$ отрезка в квадрат. Оказывается, что последовательность отображений P_n равномерно сходится на отрезке I , и следовательно, существует предельное отображение $P : I \rightarrow S$, которое является непрерывным. Более того, отображение P осуществляет отображение на квадрат S и поэтому является кривой Пеано. Можно разными способами задавать соответствующую кривую Пеано.

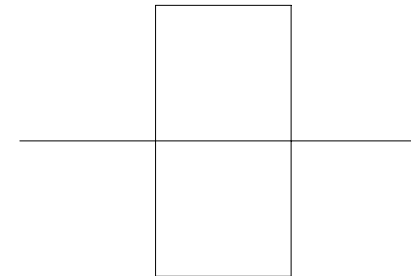
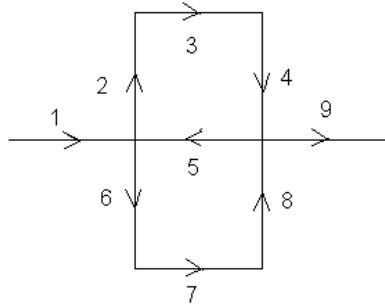
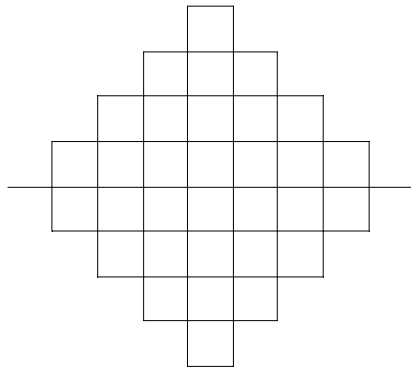


Рис. 3.28 Кривая Пеано, $n = 1$

Рис. 3.29 Кривая Пеано, $n = 1$, указан порядок обходаРис. 3.30 Кривая Пеано, $n = 2$

Приведем еще несколько кривых, заполняющих плоскость. *Кривая Серпинского* (рис. 3.32, 3.33) определяется следующей L -системой:

$\theta = \pi/2$;

аксиома = $F+XF+F+XF$;

продукция: $X \rightarrow XF-F+F-XF+F+XF-F+F-X$.

Кривой Пеано–Госпера (рис. 3.34, 3.35) соответствует L -система:

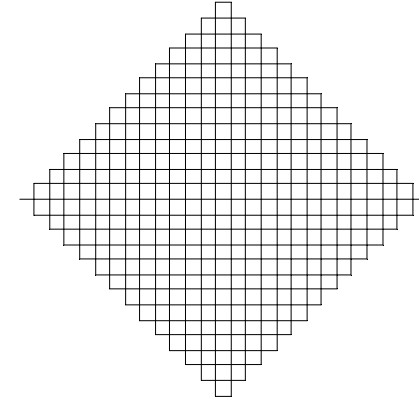
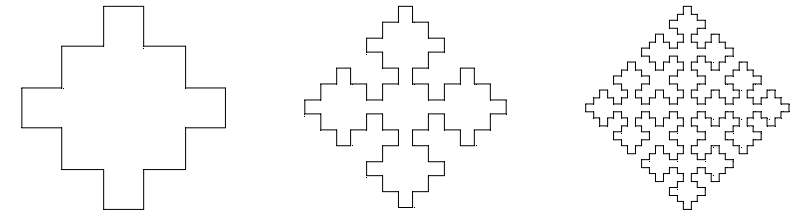
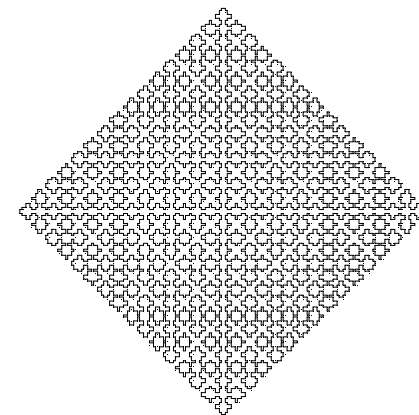
$\theta = \pi/3$;

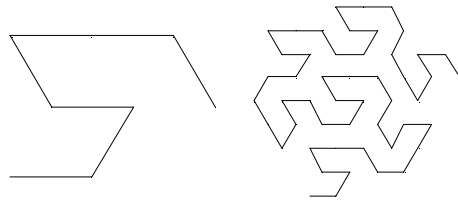
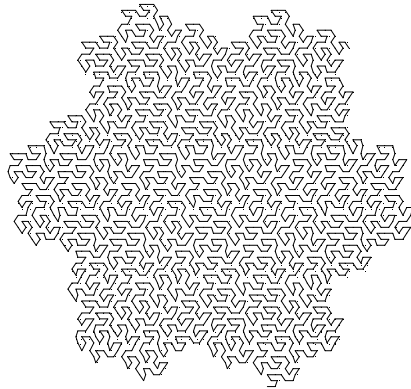
аксиома = FX ;

продукции:

$X \rightarrow X+YF+++YF- FX- -FXFX-YF+$,

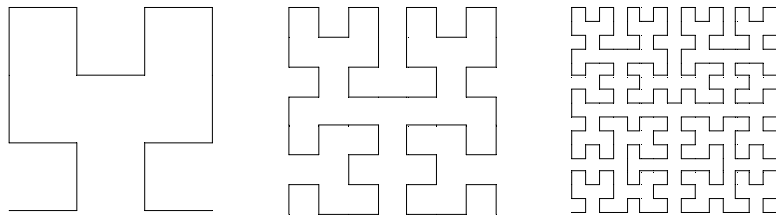
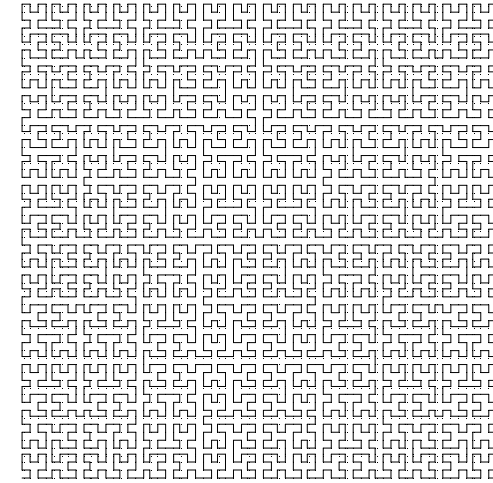
$Y \rightarrow -FX+YFYF++YF+FX- -FX-Y$.

Рис. 3.31 Кривая Пеано, $n = 3$ Рис. 3.32 Кривая Серпинского, $n = 1, 2, 3$ Рис. 3.33 Кривая Серпинского, $n = 5$

Рис. 3.34 Кривая Пеано–Госпера, $n = 1, 2$ Рис. 3.35 Кривая Пеано–Госпера, $n = 4$

Кривая Гильберта (рис. 3.36, 3.37) задается L -системой:
 $\theta = \pi/2$;
 аксиома = L ;
 продукции:

$$\begin{aligned} L &\rightarrow +RF-LFL-FR+, \\ R &\rightarrow -LF+RFR+FL-. \end{aligned}$$

Рис. 3.36 Кривая Гильберта, $n = 2, 3, 4$ Рис. 3.37 Кривая Гильберта, $n = 6$

Популярная кривая дракона (Хартера–Хайтвея) (рис. 3.38, 3.39) определяется с помощью L -системы:

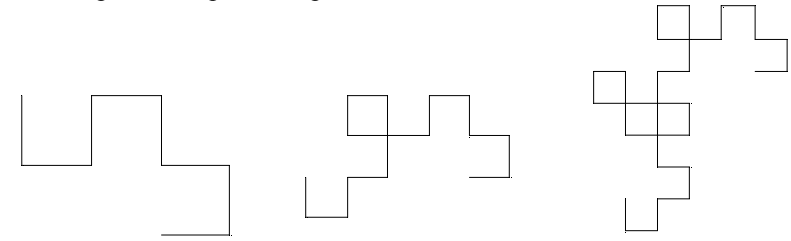
$$\theta = \pi/2;$$

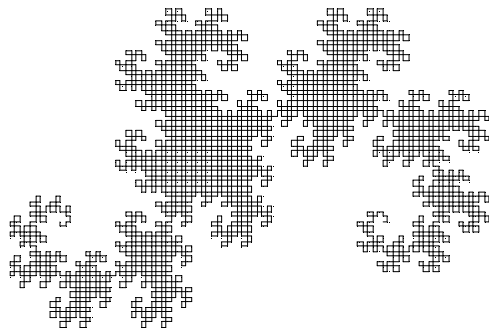
$$\text{аксиома} = FX;$$

продукции:

$$X \rightarrow X+YF+, \quad Y \rightarrow -FX-Y.$$

Добавим в алфавит V два специальных символа «[» и «]», которым соответствуют команды *ветвления*. При графической интерпретации L -системы, когда встречается символ «[» (открыть ветвь), запоминаются в специальном стеке положение и направление движения черепашки, т. е. переменные (x, y, α) . Встретив при чтении кодового слова символ «]» (закрыть ветвь), графический интерпретатор извлекает значения переменных (x, y, α) из стека. Команды ветвления используются для построения деревьев и растений.

Рис. 3.38 Кривая дракона, $n = 3, 4, 5$

Рис. 3.39 Кривая дракона, $n = 12$

Приведем два примера. Куст (Адриан Мариано) (рис. 3.40) определяется L -системой:

$\alpha = \pi/2$; $\theta = \pi/9$;

аксиома = F ;

продукция: $F \rightarrow F[+F]F[-F][F]$.

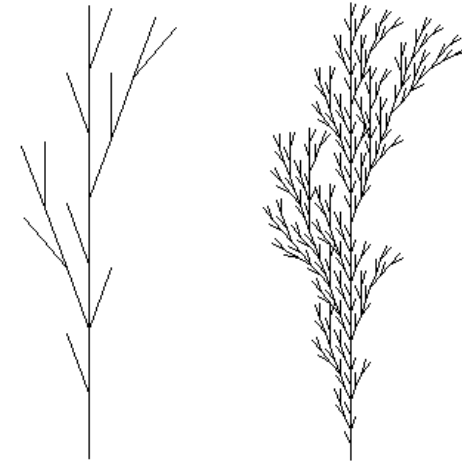
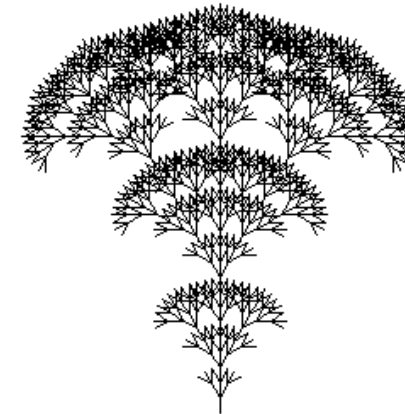
Зонтичное растение (Адриан Мариано) (рис. 3.41) определяется L -системой:

$\alpha = \pi/2$; $\theta = \pi/6$;

аксиома = F ;

продукция: $F \rightarrow F[+F[+F][-F]F][-F[+F][-F]F][+F][-F]F$.

И в заключение заметим, что все приведенные примеры L -систем и многие другие можно построить с помощью программы Fractint.

Рис. 3.40 Куст, $n = 2, 4$ Рис. 3.41 Зонтичное растение, $n = 3$

3.5 Системы итерированных функций

Один из важных способов построения фракталов – это системы итерированных функций (IFS – Iterates Function System) – совокупность сжимающих аффинных преобразований.

Системы итерированных функций являются частным случаем динамических систем. Нас будут интересовать их аттракторы, которые во многих случаях оказываются фракталами.

Предварительно рассмотрим аффинные преобразования в евклидовом пространстве, которые получаются в результате композиции линейного преобразования и последующего сдвига.

Отображение $L: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ называется *линейным*, если

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y)$$

для всех $x, y \in \mathbf{R}^n$ и произвольных скаляров λ, μ . Любому линейному преобразованию однозначно соответствует матрица A размером $m \times n$ такая, что $L(x) = Ax$ для $x \in \mathbf{R}^n$. Основное свойство линейного отображения заключается в том, что оно переводит отрезки в отрезки.

Отображение $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ называется преобразованием *сдвига* пространства \mathbf{R}^n , если $F(x) = x + a$, $x \in \mathbf{R}^n$, a – постоянный вектор. Таким образом, любое *аффинное* преобразование пространства можно представить в матричной форме:

$$F(x) = Ax + a, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

или в другой записи для двухмерного случая

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Частным случаем аффинных отображений является вращение пространства (на угол θ), которое можно задать формулой

$$R_\theta x = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} x, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Другим частным случаем аффинных преобразований является преобразование подобия $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ с коэффициентом подобия $r > 0$, которое можно представить в виде

$$S(x) = rQx + b,$$

где Q – ортогональная матрица, b – вектор-столбец.

Начнем изучение теории систем итерированных функций с рассмотрения примера, а именно салфетки Серпинского, которую мы уже строили прежде. Для построения мы выбирали в качестве исходного множества треугольник и на каждом шаге выкидывали центральную треугольную часть (не включая границу) образующихся треугольни-

ков. Другими словами, мы из одного треугольника делаем три новых с помощью аффинных преобразований (рис. 3.42):

$$F1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F2\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F3\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix}.$$

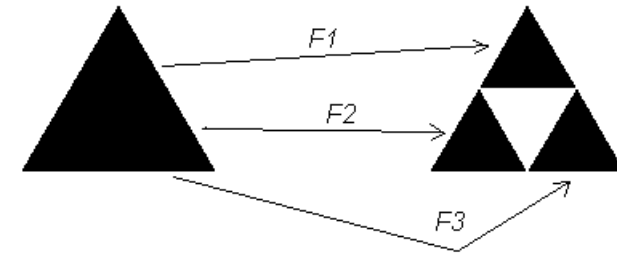


Рис. 3.42 Аффинные преобразования для салфетки Серпинского

Мы рассмотрим два других метода: детерминированный и рандомизированный. В *детерминированном алгоритме* рассматривают следующую последовательность множеств: E_0 – компактное произвольное множество; $E_n = F1(E_{n-1}) \cup F2(E_{n-1}) \cup F3(E_{n-1})$ для $n > 0$. Если в качестве E_0 выбрать замкнутый треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(1/2, \sqrt{3}/2)$, то множества E_n , построенные указанным способом, будут в точности те же, что и при выкидывании центральных треугольных областей.

В *рандомизированном алгоритме* в качестве начального множества выбирают одну произвольную точку $x_0 \in \mathbf{R}^2$. Тогда $x_n = F1(x_{n-1})$ или $x_n = F2(x_{n-1})$, или $x_n = F3(x_{n-1})$ для $n > 0$. На каждом шаге, вместо того чтобы применять сразу три преобразования $F1, F2, F3$, мы применяем только одно, выбранное случайным образом. Оказывается, что после некоторого числа шагов точки, сгенерированные в рандомизированном алгоритме, заполняют в точности салфетку Серпинского.

Замечательным свойством алгоритмов, основанных на теории систем итерированных функций, является то, что аттрактор системы совершенно не зависит от выбора начального множества E_0 или на-

чальной точки x_0 . В случае детерминированного алгоритма это означает, что в качестве E_0 можно взять любое компактное множество на плоскости: предельное множество будет по-прежнему совпадать с салфеткой Серпинского (рис. 3.43–3.45). В случае рандомизированного алгоритма, вне зависимости от выбора начальной точки x_0 , после нескольких итераций точки начинают заполнять салфетку Серпинского (рис. 3.46).

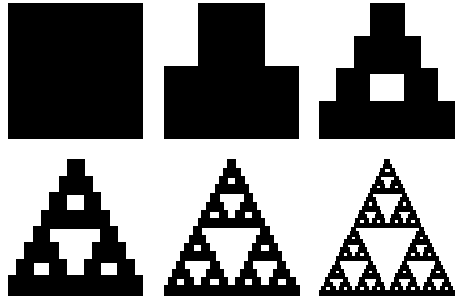


Рис. 3.43 Салфетка Серпинского: детерминированный алгоритм, E_0 – квадрат

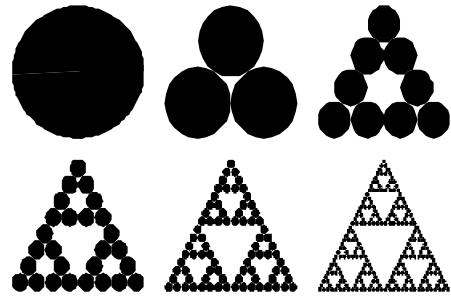


Рис. 3.44 Салфетка Серпинского: детерминированный алгоритм, E_0 – круг

В общем случае для построения системы итерированных функций вводится множество сжимающих отображений $\{F_i, \text{коэффициент сжатия } s_i < 1\}$, $1 \leq i \leq m$, действующих на \mathbf{R}^n . Эти m отображений используются для построения одного сжимающего отображения F в пространстве K всех непустых компактов из \mathbf{R}^n . Преобразование Хатчинсона $F: K \rightarrow K$ определяется следующим образом:

$$F(E) = F_1(E) \cup F_2(E) \cup \dots \cup F_m(E), \quad E \in K.$$

Это преобразование ставит в соответствие «точкам» из K также «точки» из K , причем под точками здесь понимаются компактные множества.

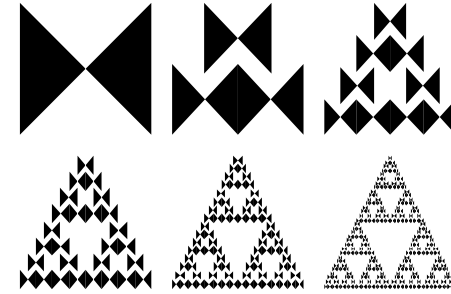


Рис. 3.45 Салфетка Серпинского: детерминированный алгоритм, E_0 – два треугольника

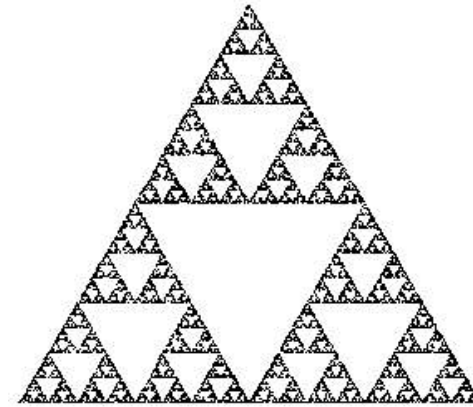


Рис. 3.46 Салфетка Серпинского: рандомизированный алгоритм, взято 15000 точек

Таким образом, *системой итерированных функций* называют совокупность введенных выше отображений вместе с итерационной схемой: E_0 – произвольное компактное множество; $E_n = F(E_{n-1})$, $n > 0$.

Пространство K непустых компактов из \mathbf{R}^n сделаем метрическим, это позволит нам говорить о сходимости последовательности множеств. Расстояние, которое мы определим, называется *расстоянием Хаусдорфа*.

Определим «расстояние» между точкой $x \in \mathbf{R}^n$ и множеством $E \subset \mathbf{R}^n$ следующим образом:

$$d(x, E) = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathbf{R}^n\}.$$

Здесь $\|x - y\|$ – обычное евклидово расстояние. Если даны два непустых компакта F и E , то отклонением $\delta(F, E)$ множества F от множества E называется

$$\sup\{d(x, E) \mid x \in F\}.$$

И, наконец, метрика Хаусдорфа на K определяется следующим образом:

$$h(E, F) = \max(\delta(F, E), \delta(E, F)).$$

Нам будут полезны следующие теоремы.

Теорема 3.2. Пусть E_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ – непустые компактные множества, упорядоченные по убыванию: $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$. Пусть

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Тогда E непусто и компактно, и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = E$$

в метрике Хаусдорфа.

Данная теорема имеет непосредственное отношение к фракталам, которые образуются последовательным устранением открытых множеств. Например, это классическое множество Кантора, получаемое последовательным выбрасыванием открытых срединных третей интервалов. Используя эту теорему, получаем, что аппроксимирующие компакты (см. рис. 2.41) сходятся к множеству Кантора в метрике Хаусдорфа. В качестве другого примера можно привести построения салфетки (см. рис. 3.6) и ковра (см. рис. 3.7) Серпинского.

Теорема 3.3. Пусть K есть множество всех непустых компактных подмножеств \mathbf{R}^n , а h – расстояние Хаусдорфа. Тогда метрическое пространство (K, h) – полное.

Теорема 3.4. Преобразование Хатчинсона

$$F(E) = F_1(E) \cup F_2(E) \cup \dots \cup F_m(E), \quad E \in K,$$

является сжимающим отображением на K с хаусдорфовой метрикой. Его коэффициент сжатия равен $s = \max\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$.

Следующая теорема является основным результатом о сходимости систем итерированных функций.

Теорема 3.5. Пусть F_1, F_2, \dots, F_m – сжимающие отображения на \mathbf{R}^n . Для произвольного начального множества $E_0 \in K$ система итерированных функций

$$E_n = F(E_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где F – преобразование Хатчинсона, сходится в метрике Хаусдорфа к единственному множеству $E \in K$.

Таким образом, для детерминированного алгоритма установлено, что системы итерированных функций порождают предельное множество – единственный аттрактор. Точно также обстоит дело для рандомизированного алгоритма.

Укажем два главных отличия рандомизированного алгоритма от детерминированного. Во-первых, в рандомизированном алгоритме начальное множество содержит всего одну точку, во-вторых, на каждом шаге используется только одно аффинное преобразование из всей совокупности преобразований, задающих систему итерированных функций. Это преобразование выбирается случайным образом. Полученное множество также состоит ровно из одной точки, которая используется для вычисления следующей итерации. Это обстоятельство при реализации алгоритма с графическим построением аттрактора на экране компьютера позволяет эффективно строить отображение поточечно.

Аффинное сжимающее преобразование $T(x) = Ax + a$ уменьшает площади в $|\det(A)|$ раз. Для того чтобы в процессе случайного выбора преобразования с малым детерминантом не появлялись слишком часто, имеет смысл производить выбор с вероятностями, пропорциональными детерминантам. Для этого определим веса p_1, p_2, \dots, p_m :

$$p_j = \det(A_j) / \sum_{i=1}^m \det(A_i), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где A_i – матрица аффинного преобразования F_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Определенные веса являются вероятностями, $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$. Поэтому в рандомизированном алгоритме преобразование F_i надо выбирать с вероятностью p_i .

Очень часто аттракторами систем итерированных функций являются фракталы. Программа Fractint строит фракталы с помощью рандомизированного алгоритма.

Рассмотрим подробнее построение одного из фракталов – кривой Коха (см. рис. 3.2) – с помощью систем итерированных функций (рис. 3.47).

Исходный вид кривой – это просто единичный отрезок на оси x . Каждый новый элемент кривой содержит четыре звена, полученных из образующего элемента использованием масштабирования, поворота и переноса.

1. Для получения первого звена достаточно сжать исходный отрезок в три раза. Следует отметить, что то же масштабирование применяется для всех звеньев.

2. Следующее звено строится с использованием трех возможных преобразований, а именно: сжатия в три раза, поворота на 60° и параллельного переноса на $1/3$ по оси x .

3. Третье звено строится аналогично второму: сжатие в три раза, поворот на минус 60° , параллельный перенос на $2/3$ по оси x .

4. Последнее звено: сжатие в три раза, параллельный перенос на $2/3$ по оси x .

Теперь мы можем найти систему итерированных функций для описания кривой Коха. Осталось только произвести суперпозицию аффинных преобразований – масштабирования, поворота и параллельного переноса. Коэффициенты аффинного преобразования IFS для всех звеньев кривой Коха приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 Коэффициенты IFS для кривой Коха

Номер звена	a	b	c	d	e	f
1	0,3333	0,0000	0,0000	0,3333	0,0000	0,0000
2	0,1667	-0,2887	0,2887	0,1667	0,3333	0,0000
3	-0,1667	0,2887	0,2887	0,1667	0,6666	0,0000
4	0,3333	0,0000	0,0000	0,3333	0,6666	0,0000

Приведем матрицу вычисленных коэффициентов, задающих кривую Коха в формате IFS для программы Fractint.

```
Koch {
0.3333  0.0000  0.0000  0.3333  0.0000  0.0000  0.25
0.1667 -0.2887  0.2887  0.1667  0.3333  0.0000  0.25
-0.1667 0.2887  0.2887  0.1667  0.6666  0.0000  0.25
0.3333  0.0000  0.0000  0.3333  0.6666  0.0000  0.25
}
```

Значение последнего (седьмого) столбца задает вероятность применения соответствующего аффинного преобразования (в данном случае все четыре преобразования равновероятны).



Рис. 3.47 Кривая Коха, построенная с помощью системы итерированных функций



Рис. 3.48 Изображение листа папоротника, полученное с помощью системы итерированных функций

Сложная форма, подобная форме листа папоротника (рис. 3.48), может быть полностью описана следующей системой итерированных функций (таблица 3.2).

Таблица 3.2 IFS для листа папоротника

a	b	c	d	e	f	p
0,00	0,00	0,00	0,16	0,00	0,00	0,01
0,85	0,04	-0,04	0,85	0,00	1,60	0,85
0,20	-0,26	0,23	0,22	0,00	1,60	0,07
-0,15	0,28	0,26	0,24	0,00	0,44	0,07

Замена значений коэффициентов b и c для листа папоротника во втором уравнении соответственно на 0,06 и минус 0,06 увеличивает кривизну стебля папоротника. Замена их на 0,02 и минус 0,02 – уменьшает кривизну. Если исключить первое уравнение, то пропадает стебель.

В 1988 году известные американские специалисты в теории динамических систем и эргодической теории Барнсли и Слоан предложили использовать системы итерированных функций для сжатия и хранения графической информации. Они назвали свой метод методом фрактального сжатия информации.

Описанная выше система для листа папоротника содержит всего 28 вещественных чисел. Заметим, что представление того же листа в точечном виде, как в телевизионном изображении, требует несколько

сотен тысяч числовых величин. Это говорит о преимуществах фрактального метода сжатия изображения.

Этот привлекательный способ сжатия изображения заключается в том, что исходное изображение разбивают на компоненты и считают их аттракторами некоторых систем итерированных функций. Таким образом, вопрос сводится к тому, как найти конечное множество сжимающих аффинных отображений для данного аттрактора. Из вышесказанного становится понятно, как работает архиватор и почему ему требуется так много времени. Фактически, фрактальная компрессия — это поиск самоподобных областей в изображении и определение для них параметров аффинных преобразований.

В худшем случае, если не будет применяться оптимизирующий алгоритм, потребуются перебор и сравнение всех возможных фрагментов изображения разного размера. Даже для небольших изображений при учете дискретности мы получим астрономическое число перебираемых вариантов. Причем даже резкое сужение классов преобразований, например за счет масштабирования только в определенное количество раз, не дает заметного выигрыша во времени. Кроме того, при этом теряется качество изображения. Подавляющее большинство исследований в области фрактальной компрессии сейчас направлено на уменьшение времени архивации, необходимого для получения качественного изображения.

3.6 Комплексная динамика

Множества Жюлиа

Мы продолжим изучение динамики итераций, но для случая комплексной плоскости.

Ограничимся дальше рассмотрением комплексного отображения $f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f_c(z) = z^2 + c$. Как уже отмечалось в подразделе 2.4 и это остается в силе и для комплексной переменной — все квадратичные отображения являются топологически сопряженными, причем эта сопряженность достигается с помощью аффинного гомеоморфизма. Поэтому мы не уменьшаем общности в изучении динамического поведения квадратичного отображения, если выбираем отображение $f_c(z) = z^2 + c$. Более того, очень многое сохраняется и для рациональных отображений. В тех случаях, когда какие-то утверждения имеют место для произвольных полиномиальных комплексных отображений, мы будем опускать индекс c у отображения f .

Множество Жюлиа функции f , обозначаемое $J(f)$, определяется как граничное множество $J(f) = \partial\{z \mid f^n(z) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty\}$.

Таким образом, множество Жюлиа функции f есть граница множества точек, стремящихся к бесконечности при итерировании f . Множество названо в честь французского математика Г. Жюлиа (1893–1978), который одновременно с П. Фату (1878–1929) в 1917–19 гг. написал основополагающие статьи по итерированию функций комплексного переменного.

Простейшее множество Жюлиа соответствует случаю $f(z) = z^2$. При каждой итерации вычисляется точный квадрат числа:

$$z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \rightarrow z_0^8 \rightarrow \dots$$

Для этой последовательности в зависимости от x_0 имеются три возможности:

числа получаются все меньшими и меньшими по модулю, их последовательность приближается к нулю. Нуль является аттрактором для процесса $z \rightarrow z^2$. Все точки, находящиеся на расстоянии меньше 1 от этого аттрактора, движутся к нему;

числа становятся все большими и большими по модулю, стремясь к аттрактору — бесконечности. Все точки, лежащие на расстоянии больше 1 от нуля, движутся к бесконечности;

точки находятся и продолжают оставаться на расстоянии 1 от нуля. Их последовательности лежат на границе двух областей притяжения, в данном случае на окружности единичного радиуса с центром в нуле.

Ситуация ясна. Плоскость делится на две зоны влияния, а границей между ними является просто окружность. Хотя это множество Жюлиа $J(f_0)$ — не фрактал, но тем не менее функция $f(z) = z^2$ хаотична на своем множестве Жюлиа (см. теорему 2.3).

Сюрпризы начнутся, когда мы выберем ненулевое значение c , например $c = -0,12375 + 0,56508i$ (рис.3.49).



Рис. 3.49 Множество Жюлиа,
 $c = -0,12375 + 0,56508i$

Здесь для последовательности $z_0 \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots$ также имеются три из перечисленных выше возможностей, но внутренний аттрактор (на рисунке он закрашен черным цветом) уже не является нулем, а граница уже не является гладкой – она является фракталом.

Можно написать простую программу для построения *заполняющего* множества Жюлиа, изображенного на рис. 3.49. Заполняющее множество Жюлиа состоит из точек, орбиты которых пойманы (т. е. не уходят на бесконечность), в отличие от границы этого множества, которое и является настоящим множеством Жюлиа. Заполняющие множества Жюлиа более привлекательны визуально и именно по этой причине наиболее часто реализуются программно. В частности, программа Fractint строит заполняющиеся множества Жюлиа.

При реализации программы, как следует из приводимой ниже теоремы, в случае $|c| < 2$ можно прекратить вычисление орбиты при достижении значения 2 по модулю. Орбиты таких точек гарантированно стремятся к бесконечности.

Теорема 3.6. Предположим, что $|c| < 2$. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и пусть $z_n = f_c^n(z)$ для $n = 1, 2, 3, \dots$. Если существует такое n_0 , что $|z_{n_0}| \geq 2$, то имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty,$$

то есть орбита $\{f_c^n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к бесконечности и z не принадлежит множеству Жюлиа $J(f_c)$.

Если выбрать новое значение c , $c = -0,12 + 0,74i$, то получим рис. 3.50.

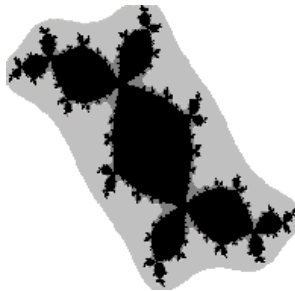


Рис. 3.50 Множество Жюлиа,
 $c = -0,12 + 0,74i$

Здесь множество Жюлиа уже представляет собой не единственную деформированную окружность, а состоит из бесконечного числа деформированных окружностей, образующих, однако, связное множество. Внутренние точки этого множества притягиваются не одной неподвижной точкой, а циклом из трех точек.

На рис. 3.51 изображено множество Жюлиа при $c = i$, называемое дендритом. Дендрит представляет собой границу одной-единственной области притяжения и содержит те точки, которые не уходят на бесконечность.

На рис. 3.52 изображен случай, когда множество Жюлиа является несвязным, оно называется *пыль Фату* и является канторовым множеством на плоскости.



Рис. 3.51 Дендрит

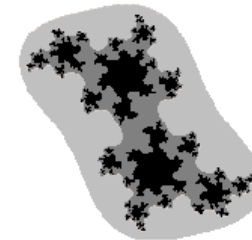


Рис. 3.52 Пыль Фату

Теорема 3.7. Квадратичная функция $f_c(z) = z^2 + c$ хаотична на своем множестве Жюлиа $J(f_c)$ при всех $c \in \mathbb{C}$.

Множество Мандельброта

... До 1980 года об этих загадочных, но отличающихся красотой и геометрической правильностью кругах, которые вдруг, чаще по ночам, появляются на полях пшеницы, знали лишь несколько фермеров. На сегодня они стали самым известным ... сверхъестественным феноменом. ... О возникновении простых кругов выдвинуто несколько научных гипотез. Но как объяснить, к примеру, что в августе 1991 года в Ройстоне, Кембриджшир, кольцо представляло собой сложнейшую, смоделированную с помощью компьютера фигуру из математики хаоса под названием множества Мандельброта?

Карл Шукер. Непознаваемое. Иллюстрированный атлас природных и паранормальных загадочных явлений мира

Мы уже убедились в том, что множества Жюлиа функции $z^2 + c$ обладают большим разнообразием. Действительно, для каждого значения c мы получаем впечатляющие изображения. Тем не менее, на самом деле существует всего два типа множеств Жюлиа. Каждое множество Жюлиа функции $f_c(z) = z^2 + c$ либо связно, либо вполне несвязно. Конечно, они могут выглядеть совершенно различным образом, даже принадлежа к одному и тому же типу. Некоторые связные множества Жюлиа выглядят как простые замкнутые кривые, которые являются фракталами, как это имеет место в случае $0 < |c| < 1/4$. Существуют также связные множества Жюлиа, которые не являются простыми замкнутыми кривыми, как, например, в случае $c = -0,12 + 0,74i$ (см. рис. 3.50).

С другой стороны, все вполне несвязные множества Жюлиа обладают тем свойством, что они представляют «пыль Фату» – канторовы множества. Определяющим фактором того, является ли множество связным или несвязным, есть величина параметра c . Было бы желательно увидеть поведение множеств Жюлиа сразу при всех значениях параметра c . Соответствующая конструкция должна быть комплексным аналогом бифуркационной диаграммы. На первый взгляд, это трудная задача – начертить каждое возможное множество Жюлиа и затем проверить его на связность. К счастью для нас, достаточно изучить поведение только одной точки на комплексной плоскости. Если множество Жюлиа связное, то оно связно для любой начальной точки, в частности и для 0. Если орбита 0 никогда не уходит в бесконечность, то она или лежит на границе, или блуждает внутри множества. Если орбита лежит на границе, то множество Жюлиа является дендритом.

Если же орбита блуждает внутри множества, то множество топологически эквивалентно кругу, и следовательно, является связным. Этот факт был открыт американско-польским математиком Бенуа Б. Мандельбротом в 1980 году, и в его честь множество всех значений параметра c , при которых множества Жюлиа связны, называется *множеством Мандельброта*.

В следующем определении множества Мандельброта ничего о связности множеств Жюлиа не говорится, но далее в теореме 3.10 говорится именно об этом.

Множество Мандельброта M для полинома $f_c(z) = z^2 + c$ определяется как множество всех $c \in \mathbb{C}$, для которых орбита точки 0 ограничена, т. е.

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid \{f_c^n(0)\}_{n=0}^\infty \text{ ограничена}\}.$$

Равносильное определение записывается:

$$M = \{c \in \mathbb{C} \mid f_c^n(0) \text{ не стремится к } \infty \text{ при } n \rightarrow \infty\}.$$

Это определение является рабочим, то есть оно может быть прямо использовано для написания программы, определяющей принадлежность точки множеству Мандельброта. Задача проверки орбит на ограниченность упрощается при использовании следующей теоремы.

Теорема 3.9. Если $|c| > 2$ и $|z| \geq |c|$, то орбита z устремляется к ∞ . В частности, из этого следует, что точка c не принадлежит множеству M .

Объединяя эту теорему с теоремой 3.6, приходим к выводу, что проверять нужно только точки $|c| \leq 2$. Причем в случае $|c| < 2$, если орбита достигает состояния, когда ее величина превосходит 2, то это означает, что она стремится к бесконечности, и следовательно, проверяемая точка не принадлежит M . Точка $c = -2$ – единственная точка окружности $|c| = 2$, которая принадлежит множеству Мандельброта.

Опишем алгоритм построения окрашенного в черный цвет множества Мандельброта с окружением, раскрашенным в разные цвета. Множество Мандельброта размещается в прямоугольнике $[-2, 0,75] \times [-1,5, 1,5]$. Для произвольного комплексного числа $c = x + iy$ положим $z_0 = 0$ и проведем итерацию по формуле $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Фиксируется максимальное число итераций Max (чем больше, тем лучше). Для последовательности z_n имеются две возможности:

числа становятся все большими и большими, стремясь к бесконечности;

точки находятся и продолжают оставаться на расстоянии меньшем 2 от 0.

Так вот, множество Мандельброта – это множество тех чисел c , для которых выполняется вторая возможность (рис. 3.53). В программе каждая точка (пиксель) экрана представляет соответствующее комплексное число c . Если число Max увеличить, то граница множества определится точнее, так как для некоторых точек c последовательности z_n уйдут все-таки на бесконечность. Все точки множества Мандельброта отметим черным цветом. Для всех других точек c соответствующая последовательность z_n уходит на бесконечность, причем скорость ухода оценивается соответствующим цветом точки c , пропорциональным количеству итераций, достаточным для того, чтобы z_n^2 стало большим 4. Если количество используемых цветов в палитре меньше Max , то цвета периодически повторяются. Окраска внешности множества Мандельброта позволяет более точно увидеть границу множества. Динамическое изменение цветовой палитры в цикле позволит получить более красочные изображения множества Мандельброта. Прекрасные возможности для исследования множества Мандельброта имеет программа Fractint.

Если взглянуть на множество Мандельброта (рис. 3.53), то первое, что бросается в глаза, – это область, ограниченная большой *кардиоидой* с острием в точке 0,25 и закругленной вершиной в точке $-0,75$. Затем виден касательный к кардиоиде круг («большая почка») радиусом 0,25 с центром в точке -1 и, наконец, бесчисленное множество меньших областей («почек»), которые также касательны к кардиоиде, а по форме напоминают круг. Большинство из них крайне малы.

К каждой такой «почке» в свою очередь прикреплено бесконечное число меньших «почек», а к каждой из меньших опять же присоединен бесконечный набор еще меньших «почек» и т. д. Но и это еще не все! Если мы, выйдя из большой кардиоиды и двигаясь налево, попадем в круг («почку»), затем (вновь налево) – в следующую «почку» и продолжим движение налево дальше, то при этом будем всё время приближаться к так называемой *точке Мирберга-Фейгенбаума*, которая имеет координату $-1,401...$ Отрезок от этой точки до точки -2 также принадлежит множеству Мандельброта. И на нем есть маленькая, напоминающая кардиоиду, область с заостренной вершиной в точке $-1,75$ (её центр находится в точке $-1,754877666...$). К этой маленькой кардиоиде прикрепляется точно такое же семейство «почек», как и к большой (рис. 3.54).

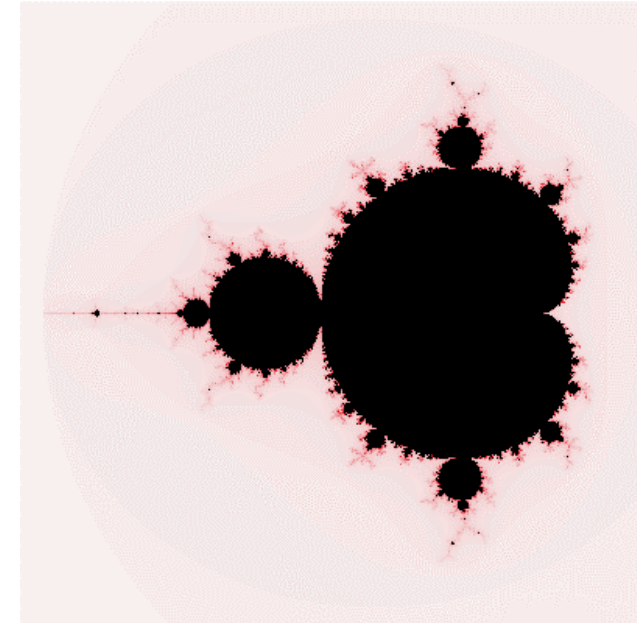


Рис. 3.53 Множество Мандельброта

Оказывается, что число таких «кардиоидных» компонент бесконечно. Кроме того, они встречаются не только на действительной оси. Но все они столь крошечные, что их трудно различить. Однако, если сделать увеличенную картину, то в каждом случае обнаруживаются как сама кардиоида, так и сопровождающая её компания из «почек».

Но и это еще не все... Все похожие на кардиоиду компоненты связаны с главной кардиоидой с помощью «нитей», насыщенных малыми областями типа кардиоид, каждая из которых сопровождается обычным набором «почек». Эти нити разветвляются, образуя очень сложные узоры. Благодаря этим нитям множество Мандельброта оказывается связным. На рис. 3.54–3.57 показаны различные участки множества Мандельброта.

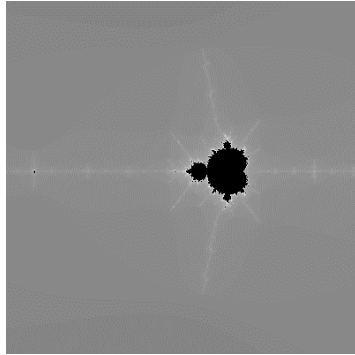


Рис. 3.54 $-1,876 \leq x \leq -1,687$,
 $-0,091 \leq y \leq 0,098$

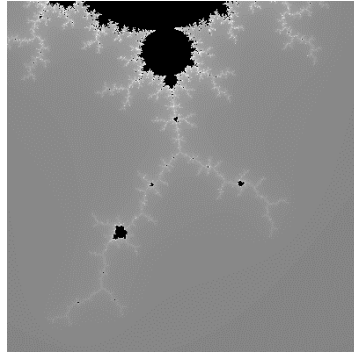


Рис. 3.55 $-0,266 \leq x \leq 0,067$,
 $-1,148 \leq y \leq -0,812$



Рис. 3.56 $-0,854 \leq x \leq -0,714$,
 $-0,301 \leq y \leq 0,161$

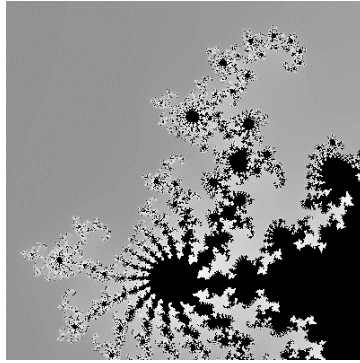


Рис. 3.57
 $-0,74865 \leq x \leq -0,7238$,
 $-0,2275 \leq y \leq -0,20265$

Теорема 3.10. Пусть M – множество Мандельброта.

1. Для каждой точки $c \in M$ соответствующее ей множество Жю-
лиа $J(f_c)$ связно.

2. Для каждой точки $c \notin M$ соответствующее ей множество Жю-
лиа $J(f_c)$ вполне несвязно и является канторовым множеством.

На рис. 3.58 множество Мандельброта изображено вместе с неко-
торыми ассоциированными множествами Жюлиа с указанием прибли-
зительной локализации в пространстве параметров.

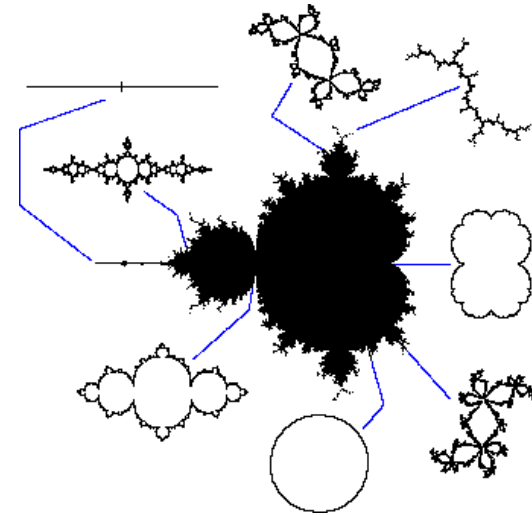


Рис. 3.58 Связь множества Мандельброта
и множеств Жюлиа

Граница множества Мандельброта вызывает исключительный ин-
терес. Представим себе некоторый путь в c -плоскости, начинающийся
внутри множества и заканчивающийся вне его. Если менять c , двигаясь
вдоль этого пути, то самые драматические качественные изменения
происходят с соответствующими множествами Жюлиа тогда, когда c
пересекает границу множества Мандельброта: они, как будто взорвав-
шись, превращаются в облако из бесконечного числа точек. В этом
смысле граница множества Мандельброта определяет момент *мате-
матического фазового перехода* для множеств Жюлиа.

Кроме того, различным частям множества Мандельброта отвеча-
ют некоторые качественные утверждения о множестве Жюлиа, имею-
щие место для значения c из этих частей. Например, кардиоида, очер-
чивающая главное тело, содержит все значения c , при которых множе-
ство Жюлиа будет более или менее деформированной окружностью,
охватывающей область притяжения некоторой неподвижной точки.
Как видно на рисунках, множество Мандельброта окружено иглопо-
добными, более или менее разветвленными и изогнутыми антеннами.
Если мы поместим c на самый конец одной из таких антенн, то полу-
чим и множество Жюлиа подобной формы – дендрит.

Бассейны притяжения для метода Ньютона

Метод Ньютона и его усовершенствованные варианты относятся к наиболее известным численным методам решения нелинейных уравнений. Теория этих методов обычно разбивается на две части. В одной из них уделяется основное внимание доказательству сходимости метода, а другая направлена на получение асимптотической скорости сходимости. Однако картина, которую мы получаем знакомясь с литературой, оказывается в какой-то мере неполной. Помимо упомянутых задач, с методом Ньютона связаны и другие интересные и глубокие проблемы, одна из которых будет темой нашего обсуждения.

Рассматриваемая нами проблема восходит к 1879 году и была поставлена А. Кэли в его небольшой, всего на одну страницу, заметке, озаглавленной «Комплексная проблема Ньютона–Фурье». Кэли предложил то, что он называет методом Ньютона–Фурье:

$$z_{k+1} = z_k - p(z_k) / p'(z_k), \quad k = 0, 1, \dots$$

применить к комплексным полиномам p : «... В связи с этим, не ограничивая себя рассмотрением только действительных чисел, мы получаем то, что я называю комплексной проблемой Ньютона–Фурье...» Более того, он предложил изучать эту проблему глобально: «... Задача состоит в разделении плоскости на области так, чтобы, выбрав по желанию произвольную точку P (начальную точку z_0) где бы то ни было внутри одной области, мы, в конечном счете, пришли бы к точке A (равной корню, т.е. $p(A)=0$); где бы то ни было внутри другой области пришли бы к точке B и так далее для каждой из нескольких точек, представляющих корни нашего уравнения. В случае квадратного уравнения решение оказывается простым и изящным, но уже следующий сменяющий его случай кубического уравнения, по-видимому, представляет значительную трудность».

С точки зрения теории численных методов метод Ньютона всегда понимается как локальный, т. е. предполагается, что z_0 (начальное значение) достаточно близко к корню w уравнения $p(z) = 0$. Проблема Кэли, напротив, заключается в определении глобального бассейна притяжения для корня w :

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid N^k(z) \rightarrow w, \text{ когда } k \rightarrow \infty\},$$

где $N(z) = z - p(z) / p'(z)$.

Если мы в качестве полинома возьмем $p(z) = z^2 - 1$, то этот полином имеет два корня $+1$ и -1 , и следовательно, две области притяжения для метода Ньютона

$$z_{k+1} = z_k - (z_k^2 - 1) / 2z_k = (z_k + 1/z_k) / 2.$$

Граница между этими областями, как и следовало ожидать, есть прямая $x=0$.

Рассмотрим теперь полином $p(z) = z^3 - 1$. Три корня этого полинома суть:

$$1, (-1 + i\sqrt{3})/2 \approx -0,5 - 0,866025i, (-1 - i\sqrt{3})/2 \approx -0,5 + 0,866025i.$$

Удивительно, но мы делаем *принципиальную ошибку*, полагая, что границы бассейнов (областей притяжения) этих корней выглядят как на рис. 3.59.

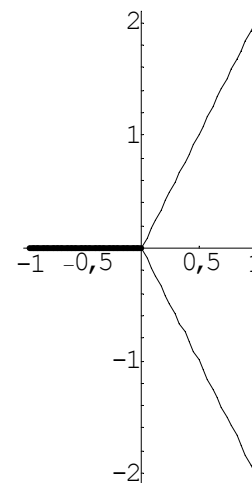


Рис. 3.59 Предполагаемая граница бассейнов

Оказывается, каждая точка границы должна быть трехсторонней точкой, т. е. одновременно граничной сразу для трех бассейнов притяжения. Каждый бассейн является замечательной самоподобной крабовидной структурой, а граница бассейнов – фрактал (рис. 3.60).

Аналогично дело обстоит и для любого полинома $p(z) = z^n - 1$ порядка $n > 3$: любая граничная точка является одновременной граничной точкой сразу для n бассейнов.

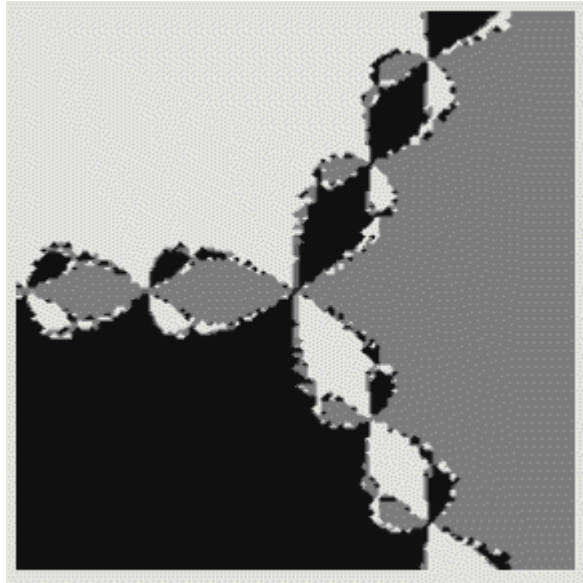


Рис. 3.60 Фрактальная граница бассейнов

4 Клеточные автоматы

4.1. Что такое клеточный автомат?

Считается, что основные законы физики, связанные с повседневными явлениями, теперь известны. Однако имеется много естественных часто встречающихся систем, сложная структура и поведение которых пока недоступны даже качественному анализу. Например, законы, управляющие замерзанием воды и проводимостью теплоты давно известны, но анализ их следствий для запутанных моделей роста снежинки еще не возможен. В то время как многие сложные системы могут быть разбиты на идентичные компоненты, для которых выполняются простые законы, огромное число компонент, составляющих вместе всю систему, приводит к очень сложному поведению.

В некоторых случаях это сложное поведение может моделироваться численно с разбиением на несколько компонент. Но чаще всего моделирование требует слишком многих компонент, и такой прямой подход терпит неудачу. Нужно взамен пытаться выделить математическую сущность процесса, которым это сложное поведение вызвано. Распознать фундаментальные математические механизмы, которые являются общими во многих различных естественных системах. Такая унифицируемость соответствовала бы универсальным особенностям в поведении очень сложных естественных систем. Чтобы обнаружить и проанализировать математический базис для порожденной сложности, нужно опознать простые математические системы, которые фиксируют сущность процесса.

Клеточные автоматы – подходящий класс таких систем. Клеточные автоматы создают условия построения математических моделей для широкого многообразия сложных явлений, от турбулентности в жидкостях до моделей биологического роста.

Клеточный автомат есть частный случай дискретной динамической системы. Пространство, время и состояние этой системы дискретны. Каждая точка в регулярной пространственной решетке, называемая клеткой, может иметь какое-нибудь состояние (выбранное из конечного множества). Состояния клеток в решетке изменяются в соответствии с некоторым локальным правилом: состояние клетки в данный момент времени зависит только от её собственного состояния и состояний ее соседей (в некотором смысле) в предыдущий момент времени. Состояние всех клеток в решетке меняется синхронно, поэтому состояние всей решетки меняется в дискретные моменты времени.

Для определения клеточного автомата (CA, cellular automata) надо задать следующее.

Во-первых, положительное целое число n , которое является размерностью клеточного автомата. Потом нужно определить конечное множество состояний S , имеющее по крайней мере два члена. Состояние для самого CA задается присваиванием какого-нибудь элемента S каждой точке n -мерной решетки \mathbf{Z}_n (где \mathbf{Z} есть множество целых чисел). Точки \mathbf{Z}_n обычно называются клетками. С клеточным автоматом связано также понятие окрестности. Окрестность N для 0 есть некоторое конечное (непустое) подмножество \mathbf{Z}_n . Окрестность для любой другой клетки $x \in \mathbf{Z}_n$ получается очевидным сдвигом (линейным переносом) $x+N$. Наконец, должна быть задана функция $f: S^N \rightarrow S$ (т. е. каждому возможному состоянию окрестности клетки с помощью правила перехода ставится в соответствие некоторое состояние этой клетки). Состояние CA эволюционирует в дискретном времени, состояние каждой клетки во время $t+1$ определяется состоянием ее окрестности во время t в соответствии с правилом перехода.

Подчеркнем, что изменения состояний клетки происходят: 1) параллельно, 2) локально и 3) однородно.

Клеточные автоматы были введены в конце 40-х годов Станиславом Уламом (1909–1984) и Джоном фон Нейманом (1903–1957). Говорят, что слово «клеточные» пришло от Улама, а слово «автоматы» – от фон Неймана. Фон Нейман пытался решить следующую задачу: может ли машина или «автомат» создать самую (или самого) себя. Улам предложил использовать для решения абстрактное понятие «множество клеток». В середине пятидесятых годов Джон фон Нейман доказал существование клеточного автомата, который моделирует работу универсальной машины Тьюринга и способен построить любую конфигурацию в пустых клетках пространства, в том числе и точную копию самого себя. Двумерный автомат фон Неймана состоит приблизительно из 200000 клеток; каждая клетка может находиться в 29 состояниях и имеет 4 соседних клетки (примыкающих к данной по горизонтали и вертикали).

Фон Нейман показал, что автомат – универсальный конструктор других автоматов – должен включать три функциональных части:

A – рабочий механизм, который обеспечивает физическое построение машины (инженер назвал бы его линией с программным управлением, и это обычная вещь на современных заводах);

I – инструкции (команды), записанные на носители информации, которые указывают рабочим органам, что им следует делать (говорят,

что носитель содержит описание A , если он несет информацию для построения A);

B – устройство для копирования инструкций.

В целом весь автомат (S) можно условно представить как $S=A+B+I$.

Если инструкции I содержат описание S , то автомат будет размножать самого себя. Такая самореплицирующаяся (самовоспроизводящаяся) машина прекрасно моделирует саморепликацию живого организма. A – это «тело», I – гены, а B – механизм копирования генов; он передает их следующему поколению.

Подчеркнем следующее утверждение фон Неймана. Репродуктивный процесс использует команды построения (трансляции) I двумя различными способами: как интерпретируемые символы (в течение фактической трансляции) и как неинтерпретируемые данные (при добавлении команд трансляции к результату). В последующем, когда были изучены базисные генетические механизмы, стало ясно, что природа действует в согласии с положением фон Неймана. При создании рабочей машины (т. е. белок) команды трансляции (т. е. ДНК) дважды по-разному используют информацию: как интерпретируемый код и как неинтерпретируемые данные. Первое называется в биологии переносом, второе – транскрипцией.

В 1968 г. Е. F. Codd улучшил модель фон Неймана: доказал существование универсального конструктора в виде двухмерного клеточного автомата с окрестностью из 5 членов и только с 8 состояниями.

В 1974 г. F. Nourai и R. S. Kashef сконструировали конкретный универсальный компьютер в виде двухмерного клеточного автомата с окрестностью из 5 членов и 4 состояниями.

Клеточные автоматы – простая математическая идеализация естественных систем. Клеточные автоматы могут также рассматриваться как дискретная идеализация дифференциальных уравнений в частных производных, часто используемых для описания естественных систем. Дискретный характер клеточных автоматов также позволяет выявить важную аналогию с цифровыми компьютерами: клеточные автоматы могут рассматриваться как параллельно работающие компьютеры простой конструкции.

4.2. Одномерные клеточные автоматы

Одномерный клеточный автомат – это конечная линейная последовательность (строка) клеток, каждая из которых имеет некоторое состояние (значение). Эволюция одномерного автомата обычно начи-

нается со строки, состоящей либо из одной клетки с ненулевым значением, расположенной в центре строки, либо из последовательности клеток, состояния которых заданы случайно. Клеточный автомат «эволюционирует» дискретно во времени, на каждом шаге переходя к новой строке клеток. Состояние каждой клетки в новой строке определяется применением конкретного правила к значению клетки в предыдущей строке, лежащей непосредственно выше новой клетки. Правило изотропно – это означает, что одно и то же правило определяет значение каждой новой клетки; и правило локально, т.е. в правиле используются значения только соседних клеток. Правило применяется ко всем клеткам в строке одновременно. Для первой клетки в строке соседней клеткой слева будем считать последнюю клетку в строке, для последней клетки соседняя справа клетка – первая в строке. Таким образом, строка превращается в окружность.

Исследуя клеточные автоматы, С. Вольфрам выяснил, что эволюция одномерных клеточных автоматов может быть отнесена к одному из следующих четырех общих классов (в скобках приводится аналогия с физическими и вычислительными системами):

- однородные (стабильные) состояния (предельные точки);
- периодические структуры (предельные циклы);
- хаотическая структура (странные аттракторы);
- сложные локализованные структуры (возможная аналогия с универсальными вычислениями).

Аналогия поведения клеточных автоматов первых трех классов с поведением физических систем очень интересна. Но еще более интригующе – это поведение клеточного автомата из четвертого класса, когда нет простого алгоритма для предсказания поведения и необходимо проследить эволюцию автомата до конца, чтобы выяснить, как она закончится. В этом случае автомат ведет себя по-разному для различных начальных строк.

То, что одномерные клеточные автоматы показывают такой рост «сложности» в своем поведении, имеет глубокие следствия (некоторые ученые утверждают, что сама Вселенная является просто клеточным автоматом).

Отметим, что в 1971 г. А. R. Smith доказал существование одномерного клеточного автомата с окрестностью из 3 членов и 18 состояниями, который является универсальным компьютером.

Одномерный клеточный автомат определяется числом k различных состояний (значения задаются числами $0, 1, \dots, k-1$) и количеством $2r+1$ клеток-соседей, взаимодействующих с данной клеткой (r ближайших клеток справа и слева и сама клетка). В правиле, которое зада-

ет новое состояние клетки, используются предыдущее состояние клетки и состояние ее $2r$ соседей.

Общее число различных множеств правил, возможных для данных k и r , равно $k^{(k^{2r+1})}$. Применим эту формулу для некоторых конкретных примеров.

Пример 1. Когда каждая клетка имеет только два различных состояния, 0 или 1, и клетки эволюционируют независимо от своих соседей, то всего имеется 4 различных множества правил, которые можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{\{1\} \rightarrow 0, \{0\} \rightarrow 0\}; \\ \{\{1\} \rightarrow 0, \{0\} \rightarrow 1\}; \\ \{\{1\} \rightarrow 1, \{0\} \rightarrow 0\}; \\ \{\{1\} \rightarrow 1, \{0\} \rightarrow 1\}. \end{aligned}$$

Каждое множество правил занимает отдельную строчку и определяет поведение конкретного автомата; список в левой части правила состоит из $2r+1$ элемента, средний элемент есть текущее состояние клетки; целое число в правой стороне правила представляет значение нового состояния клетки. Таким образом, правило $\{0,1,1\} \rightarrow 0$ говорит, что новое состояние клетки равно 0, если клетка имела состояние 1, а соседние клетки слева и справа имели значение 0 и 1, соответственно.

Пример 2. Когда число r соседей, определяющих эволюцию клетки, возрастает, то число правил растет очень быстро.

Если $2r+1=3$ (т.е. в определении нового состояния участвуют только по одной клетке слева и справа) и $k=2$, то возможны следующие сочетания состояний соседей (вместе с самой клеткой): $\{\{1,1,1\}, \{1,1,0\}, \{1,0,1\}, \{1,0,0\}, \{0,1,1\}, \{0,1,0\}, \{0,0,1\}, \{0,0,0\}\}$.

Каждая из этих восьми троек может давать в качестве результата новое состояние клетки: 1 или 0. Например, одно из множеств правил может быть следующее:

$$\begin{aligned} \{\{1,1,1\} \rightarrow 1, \{1,1,0\} \rightarrow 1, \{1,0,1\} \rightarrow 1, \{1,0,0\} \rightarrow 0, \\ \{0,1,1\} \rightarrow 1, \{0,1,0\} \rightarrow 0, \{0,0,1\} \rightarrow 0, \{0,0,0\} \rightarrow 1\}. \end{aligned}$$

Так как каждый триплет может давать в результате 1 или 0, то получается всего $2^8 = 256$ различных множеств правил.

Если число различных состояний равно 2, а клетки взаимодействуют с двумя соседями с каждой стороны, то имеется $2^5 = 32$ различных пятерок и $2^{32} = 4\,294\,967\,296$ различных множеств правил.

Увеличение количества состояний, в которых может находиться клетка, приводит к возрастанию числа различных множеств правил еще более драматически. Если имеется три разных состояния у клетки

и клетка взаимодействует только с непосредственными соседями, то получается, что число различных правил множеств равно $3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$.

Будем использовать представление множества правил в виде одного числа – кода. Как это делается, проиллюстрируем на примере 2. Мы записываем все тройки значений состояний в лексикографическом порядке по убыванию (именно так и сделано в примере 2). После этого берем правые части всех правил преобразования и формируем двоичное число 11101001. Десятичная запись этого двоичного числа равна 233. Таким образом можно сказать, что 233 есть код множества правил:

$$\begin{aligned} \{1,1,1\} &\rightarrow 1, \{1,1,0\} \rightarrow 1, \{1,0,1\} \rightarrow 1, \{1,0,0\} \rightarrow 0, \\ \{0,1,1\} &\rightarrow 1, \{0,1,0\} \rightarrow 0, \{0,0,1\} \rightarrow 0, \{0,0,0\} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

Каждое из $k^{(k^{2r+1})}$ множеств правил для одномерного клеточного автомата может быть закодировано подобным способом; для этого надо сформировать число по основанию счисления k , представляющее правые части трансформационных правил, и представить это число в десятичной записи.

Рассмотрим теперь различные виды поведения одномерных клеточных автоматов (рис.4.1–4.10).

Одномерные клеточные автоматы с описанными правилами можно исследовать с помощью программы (свободной для некоммерческого использования) Mcell (см. список литературы).

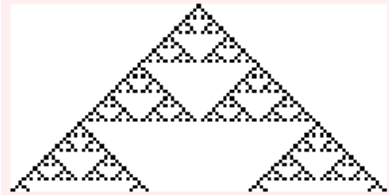


Рис. 4.1 $k=2$, $r=1$, правило 90, эволюция за 50 шагов, фрактал

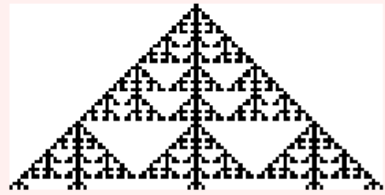


Рис. 4.2 $k=2$, $r=1$, правило 150, эволюция за 50 шагов, фрактал



Рис. 4.3 $k=2$, $r=1$, правило 30, эволюция за 50 шагов, фрактал сложной структуры

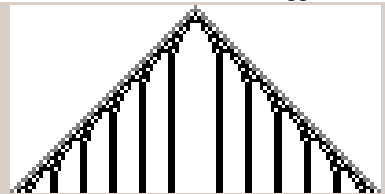


Рис. 4.4 $k=3$, $r=1$, правило 219, эволюция за 50 шагов, однородная структура

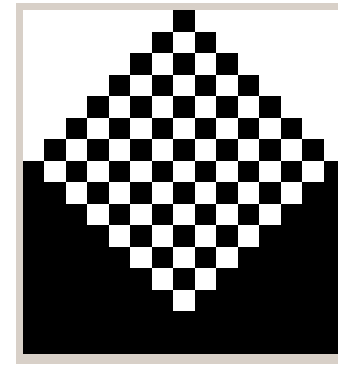


Рис. 4.5 $k=2$, $r=1$, правило 250, эволюция за 15 шагов

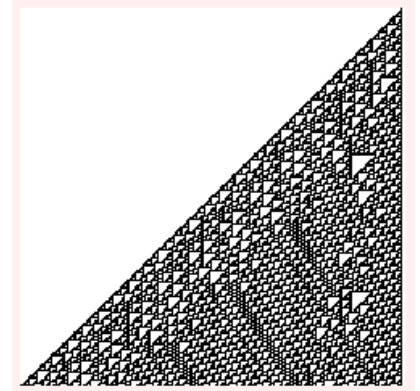


Рис. 4.6 $k=3$, $r=1$, правило 110, эволюция за 200 шагов, смесь порядка и беспорядка

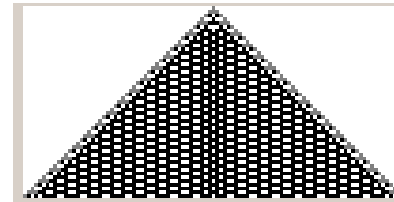


Рис. 4.7 $k=3$, $r=1$, правило 183, эволюция за 50 шагов, поведение этого клеточного автомата зависит от начальных данных, начальная строка: 1 в центре

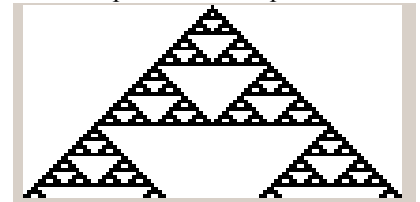


Рис. 4.8 $k=3$, $r=1$, правило 183, эволюция за 50 шагов, начальная строка: 2 в центре нулевой последовательности

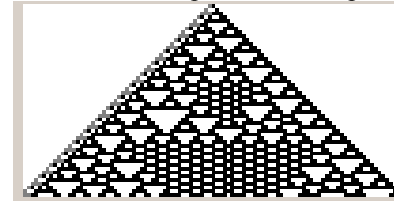


Рис. 4.9 $k=3$, $r=1$, правило 183, эволюция за 50 шагов, начальная строка: 120 в центре нулевой последовательности

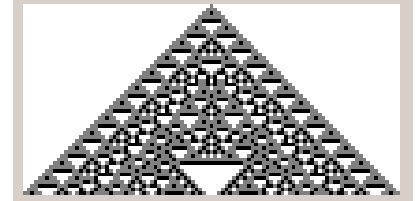


Рис. 4.10 $k=3$, $r=1$, правило 147, эволюция за 50 шагов, фрактал

С помощью программы Fractint можно также изучать поведение одноклеточного автомата, но в отличие от описанного выше

определения правил, трансформационные правила в Fractint определяются по-другому. Для данных k и r рассматриваются все n -ки состояний из $2r+1$ значений, и отдельное правило задает правую часть как функцию от суммы n -ки в левой части (таким образом, все комбинации n -ок в левой части правила с одинаковой суммой элементов отождествляются).

4.3. Игра «Жизнь»

Игра «Жизнь» была изобретена в 1970 г. Джоном Хортоном Конуэем, молодым математиком из Кембриджа, и эта игра широко распространилась по миру не без помощи двух заметок Мартина Гарднера в *Scientific American* (октябрь 1970 и февраль 1971).

Конуэй предположил, что клеточный автомат с универсальными вычислительными возможностями мог бы быть более простым, чем универсальный клеточный конструктор фон Неймана. Клетка должна иметь только два состояния: быть "заполненной" или "пустой", "живой" или "мертвой". Конуэй тщательно подбирал "генетические законы", управляющие рождением, гибелью и выживанием клеток. Он долго проверял их "на практике", добиваясь, чтобы они, по возможности, удовлетворяли трем условиям:

не должно быть ни одной исходной конфигурации, для которой существовало бы простое доказательство возможности неограниченного роста популяции;

в то же время должны существовать такие начальные конфигурации, которые заведомо обладают способностью беспрестанно развиваться;

должны существовать простые начальные конфигурации, которые в течение значительного промежутка времени растут, претерпевают разнообразные изменения и заканчивают свою эволюцию одним из трех способов: полностью исчезают (либо из-за перенаселенности, т.е. слишком большой плотности живых клеток, либо, наоборот, из разреженности живых клеток, образующих конфигурацию); переходят в устойчивую конфигурацию и перестают изменяться вообще или же, наконец, выходят на колебательный режим, при котором они совершают некий бесконечный цикл превращений с определенным периодом.

Генетические законы Конуэя удивительно просты.

1. Каждая живая клетка, у которой два или три соседа, живет и сохраняется до следующего поколения.

2. Клетка погибает, если у нее более чем три соседа (от недостатка места), совсем нет соседей или только один сосед (от одиночества).

3. Когда рядом с какой-нибудь мертвой (пустой) клеткой есть три живые соседние клетки, то эта клетка становится живой.

4. Клетки погибают и рождаются одновременно. Они образуют одно поколение. За один ход в игре осуществляется переход от одного поколения к другому.

Начав игру, вы сразу заметите, что популяция непрестанно претерпевает необычные, нередко очень красивые и всегда неожиданные изменения. Иногда первоначальная колония организмов («живых клеток») постепенно вымирает, однако произойти это может не сразу, а лишь после того, как сменится очень много поколений. В большинстве своем исходные конфигурации либо переходят в устойчивое состояние и перестают изменяться, либо навсегда переходят в колебательный режим. При этом конфигурации, не обладающие в начале игры симметрией, обнаруживают тенденцию к переходу в симметричные формы. Обретенные свойства симметрии в процессе дальнейшей эволюции не утрачиваются, а симметрия конфигурации лишь может обогащаться.

Игра «Жизнь» является детерминированной (прямодетерминированной), т.е. любая конфигурация порождает только одну конфигурацию – наследника, но обратное, вообще говоря, неверно, поскольку у данной конфигурации может оказаться две или более конфигураций – предшественников.

Простые правила Конуэя имеют такое богатство следствий, что стоит их исследовать подробно. Имеется бесконечное число осцилляторов (периодических конфигураций). Три подряд расположенные клетки возвращаются в исходное состояние через каждые два хода. При этом конфигурация попеременно превращается то в вертикальный, то в горизонтальный ряд из трех клеток. Конуэй называет этот триплет «мигалкой».

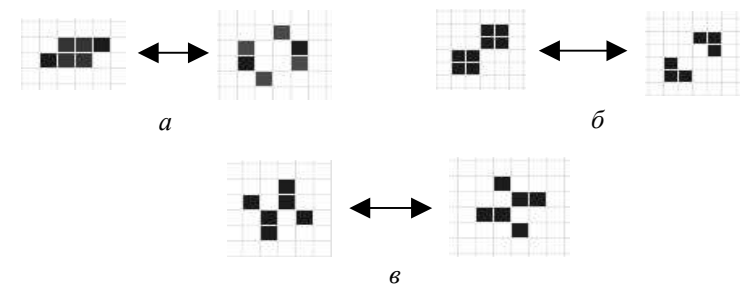


Рис. 4.11 Осцилляторы: (а) жаба; (б) бакен; (в) часы

Ни один из этих осцилляторов (рис. 4.11) не напоминает «тезку», однако названия конфигураций «Жизни» выбираются скорее из-за поведения объекта, чем из-за внешнего вида. По словам самого Конуэя, «жаба» тяжело дышит, «часы» тикают, «бакен» зажигается, причем в каждом случае период равен двум.

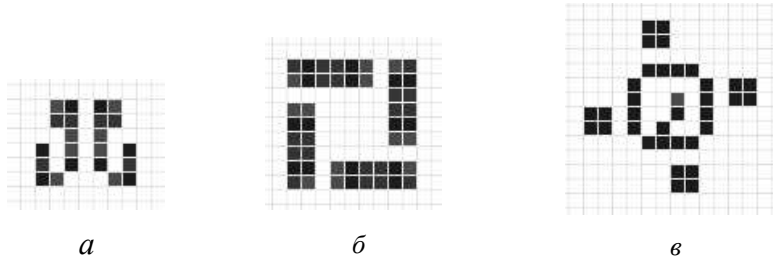


Рис. 4.12 Осцилляторы больших периодов: (а) опрокидыватель; (б) галактика; (в) вертушка

У следующих трех осцилляторов периоды побольше (рис. 4.12). «Опрокидыватель» назван так потому, что через каждые семь ходов у конфигурации меняется местами верх и низ. «Галактика» – пульсар периода 8. Внутренняя часть «вертушки» с каждым последующим ходом поворачивается на 90° (в направлении движения часовой стрелки), а все внешние клетки остаются на своих местах. Подобные периодические конфигурации, в которых для движения их внутренней части необходимо наличие жестких внешних обводов, Конуэй называет бильярдными столами, чтобы отличить их от «истинно периодических» конфигураций, таких как, например, «жаба», «часы» и «бакен».

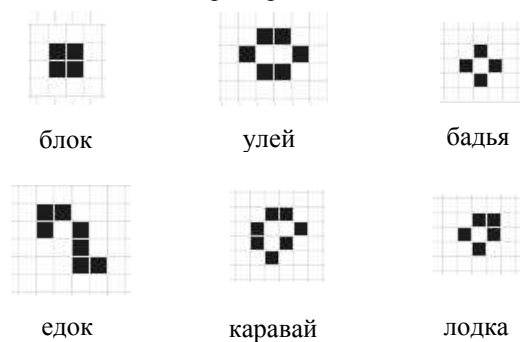


Рис. 4.13 Устойчивые конфигурации

«Блок» и «бадя» – единственные устойчивые конфигурации из четырех клеток (рис. 4.13). «Лодка» – единственная из 5. «Едок» представляет наименьшую возможную устойчивую конфигурацию, у которой отсутствует какая-либо степень симметрии. У этой конфигурации удивительная способность поглощать самые разнообразные формы «Жизни» и при этом быстро восстанавливать свой первоначальный вид.

Одним из самых замечательных открытий Конуэя следует считать конфигурацию из пяти клеток под названием «глайдер» (рис. 4.14). После второго хода глайдер немного сдвигается и отражается относительно диагонали. В геометрии такой тип симметрии называется «скользящим отражением», отсюда же и происходит название фигуры (на английском языке to glide – скользить). В результате двух последующих ходов глайдер «выходит из пике», ложится на прежний курс и сдвигается на одну клетку вправо и на одну клетку вниз относительно начальной позиции. Надо сказать, что поиски перемещающихся по доске фигур («космических кораблей») – дело чрезвычайно сложное. Тем не менее их найдено к настоящему времени достаточно много. Следует отметить, что из них только четыре фигуры (в том числе и глайдер) являются «естественными объектами» – никакой другой космический корабль не был обнаружен во время эволюции какой-либо случайно взятой стартовой конфигурации. Глайдер считается космическим кораблем легчайшего веса, потому что все остальные корабли состоят из большего числа клеток.

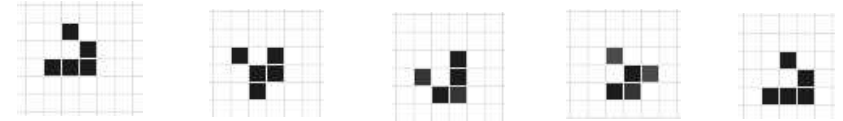


Рис. 4.14 Глайдер

Скорость шахматного короля (передвижение за один ход на одну клетку по вертикали, по горизонтали или по диагонали) в игре «Жизнь» принято называть скоростью света. Выбор Конуэя пал именно на этот термин из-за того, что в «Жизни» большие скорости просто не достигаются. Ни одна конфигурация не воспроизводит себя достаточно быстро, чтобы двигаться с такой скоростью. Доказано, что максимальная скорость по диагонали составляет одну четверть скорости света (используется обозначение $c/4$), именно такой скоростью обладает глайдер.

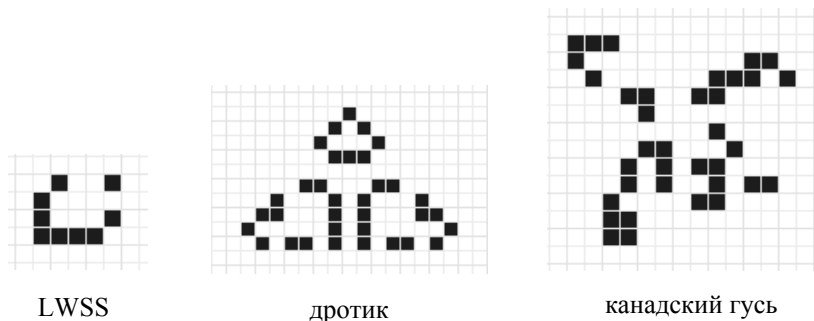


Рис. 4.15 Космические корабли

Некоторые из космических кораблей изображены на рис. 4.15. LWSS движется ортогонально со скоростью $c/2$ и с периодом 4. Этот наименьший из ортогональных космических кораблей найден Конуэем в 1970 г. Он встречается в эволюции различных конфигураций – второй по частоте после глайдера. «Дротик» (dart), найденный David Bell в 1992 г., движется также ортогонально, но со скоростью $c/3$ и периодом 4. «Канадский гусь» – наименьший из известных космических кораблей, отличный от глайдера, но передвигающихся по диагонали, – обнаружен Jason Summers только в 1999 г. Его скорость – $c/4$ и период равен 4. Доказано, что существуют как угодно медленные космические корабли. На настоящее время самый медленный из известных кораблей имеет скорость $c/12$.

Наиболее интригующая модель из 5 клеток – « r -пентамино». Конфигурация превращается в периодически пульсирующую с периодом равным 2 лишь после 1103 ходов. При этом шесть возникших на доске глайдеров удаляются от центра на все большее и большее расстояние, и, в конце концов, вокруг бывшего пентамино остаются четыре мигалки, одна лодка, один каравай, четыре улья и восемь блоков.



Рис. 4.16 Мафусаилы

Эволюция r -пентамино невероятна. Так или иначе, все блоки, глайдеры, улья, мигалки и другие объекты скрыты в оригинале r -пентамино, – но как? Небольшие конфигурации, которые стабилизируются только после длительной эволюции Конуэй предложил называть «мафусаилы». Кроме r -пентамино, к мафусаилам относятся «желудь» и «зайчики» (рис. 4.16). Желудь стабилизируется после 5206 шагов, а зайчики – только после 17332 шагов.

Понятие «естественных» конфигураций «Жизни» неопределенно и преднамеренно открыто. В основном естественная конфигурация это та, к которой можно прийти различными способами. Объекты, которые обладают небольшими предшественниками, – естественны. Например, изобилие блоков и мигалок в «Жизни» следствие того, что для их создания нужно всего три живых клетки. Большие конфигурации с предшественниками, много меньшими, чем они сами, – более естественные объекты среди других больших конфигураций. Другой способ создания естественных конфигураций состоит в том, чтобы выбрать исходную конфигурацию случайным образом. Такие однородные произвольные смеси («бульоны»), в которых «живые» и «мертвые» клетки распределены случайным образом, ведут к большой активности клеток. В конечном счете появляется много знакомых объектов. Чем чаще какой-нибудь объект появляется в «бульоне», тем он естественнее. Третий метод состоит в том, чтобы экспериментировать со столкновениями между глайдерами или глайдеров с другими конфигурациями.

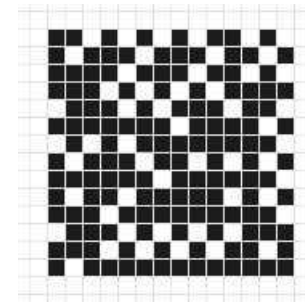


Рис. 4.17 "Сад Эдема"

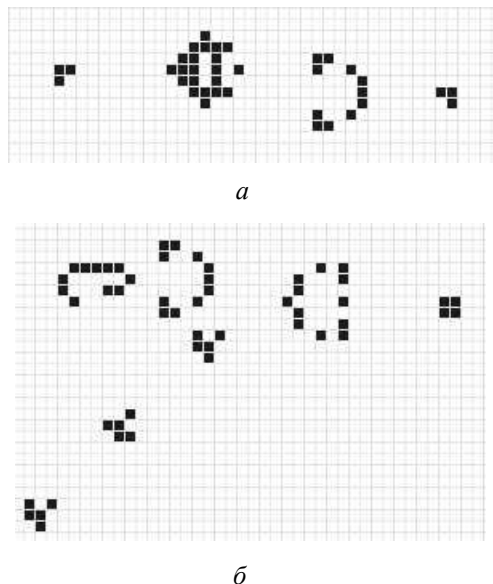


Рис. 4.18 Глайдерное ружье: (а) исходная конфигурация; (б) ружье выстрелило тремя глайнерами.

«Садами Эдема» называются конфигурации, которые не могут возникнуть в процессе эволюции, поскольку никакая предшествующая конфигурация не может их породить. «Сады Эдема» должны быть заданы с самого начала – в нулевом поколении. Теорема Эдварда Мура гарантирует их существование для широкого класса клеточных автоматов, в том числе и для игры «Жизнь». Первый «Сад Эдема» был сконструирован Р. Бенксом в 1971 г. Следующий пример, содержащий меньшее количество клеток, обнаружил Achim Flammenkamp в 1991 г. (рис. 4.17)

Конуэй пробовал разрабатывать правила «Жизни» так, чтобы были возможны конфигурации с бесконечным ростом (т.е. количество живых клеток возрастало неограниченно). Существование такой конфигурации проблематично. Конуэй высказал гипотезу, согласно которой не существует ни одной начальной конфигурации, способной беспрестанно расти. В ноябре 1970 г. группа математиков из Массачусетского технологического института, занимающаяся проблемами искусственного интеллекта, открыла конфигурацию, названную «ружьем» (рис. 4.18). Это ружье стреляет глайнерами! На сороковом ходе из ру-

жья вылетает первый глайдер, через каждые 30 ходов – следующий глайдер и так до бесконечности. С появлением каждого глайнера число живых клеток увеличивается на 5, в результате чего происходит неограниченный рост популяции.

Глайдерное ружье позволило его создателям совершить много других замечательных открытий. Был обнаружен пентадекатлон (рис. 4.19, б) – пульсирующая конфигурация с периодом равным 15, способная «поглотить» любой сталкивающийся с ней глайдер. Пентадекатлон может также отражать глайдер, изменяя курс последнего на 180° . Расположив друг против друга два пентадекатлона, можно провести между ними «теннисный матч»: они будут перекидывать глайдер как теннисный мячик (рис. 4.20). Совершенно неожиданные результаты возникают при рассмотрении пересекающихся потоков глайдеров: появляющиеся вновь конфигурации могут быть самыми причудливыми и в свою очередь испускать глайдеры. Столкновение двух глайдеров под определенным углом может привести к их уничтожению или к уничтожению исходных глайдеров и появлению нового. Появилась возможность конструировать какие-либо объекты при различных коллизиях глайдеров (так называемый «глайдерный синтез»). Были синтезированы все стабильные конфигурации и осцилляторы, содержащие не более 14 клеток. Пентадекатлон синтезируется с помощью трех глайдеров (рис. 4.19).

Возможно наиболее интересен глайдерный синтез для космических кораблей, поскольку они сами могут использоваться для создания ружей, стреляющих этими космическими кораблями. Многие из кораблей уже синтезированы. На рис. 4.21 восемь глайдеров создают глайдерное ружье.

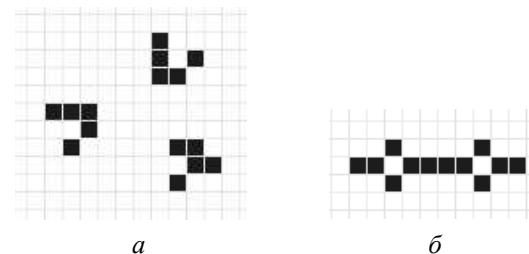


Рис. 4.19 Три глайнера (а), сталкиваясь, дают пентадекатлон (б)

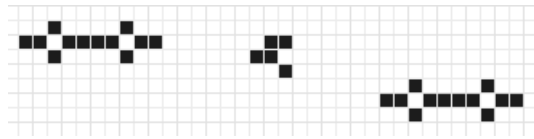


Рис. 4.20 Два пентадекатлона «перекидываются» глайдером

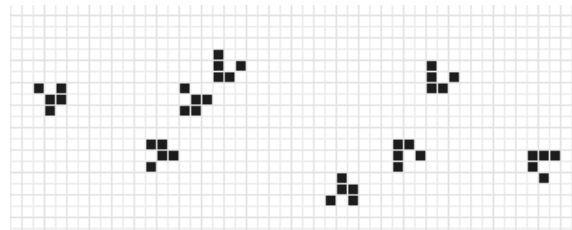


Рис. 4.21 Глайдерный синтез ружья

Создавая игру «Жизнь», Д. Конуэй ставил перед собой цель показать существование клеточного автомата – универсального компьютера – с более простыми правилами, чем универсальный автомат фон Неймана. Независимо друг от друга Д. Конуэй и У. Госпер доказали, что игра «Жизнь» может моделировать машину Тьюринга, используя для этого глайдеры в качестве носителей информации. Наличие глайдера в потоке естественно интерпретировать как единицу, отсутствие – как ноль. Моделирование логического элемента NOT можно осуществить с помощью столкновения глайдеров, приводящих к их аннигиляции, если направить два потока под прямым углом (если глайдер в определенном месте есть в первом потоке, то после столкновения глайдер на этом месте в другом потоке исчезнет). Более сложным образом можно сконструировать и логические элементы AND и OR, что является вполне достаточным для реализации вычислимости. Универсальность игры «Жизнь» означает, что в принципе, мы можем использовать движущиеся глайдеры для выполнения любых вычислений, на которые способны компьютеры. Например, можно составить такую комбинацию из глайдерных ружей, едоков и других форм «Жизни», что образующийся в результате поток глайдеров будет «вычислять» число π и e , квадратный корень из 2 или любое другое действительное число.

Конечно, производить эти вычисления подобным способом крайне неэффективно, тем не менее, их вполне можно осуществить, если вы располагаете достаточно большим игровым полем и у вас хватает мастерства, выдумки для построения необходимой вам «машины».

Прекрасной программой для изучения игры «Жизнь», является Mcell. Там же содержится много других версий игры «Жизнь» и приведен лексикон «Жизни» с толкованием терминологии и коллекцией замечательных конфигураций.

Популярное изложение игры «Жизнь» на русском языке можно найти в переводах книг Мартина Гарднера.

Существуют и трехмерные варианты игры "Жизнь".

4.4. Двухмерные клеточные автоматы

В данном подразделе рассмотрим несколько различных вариантов определения двухмерных клеточных автоматов. Наиболее часто используются окрестности двух видов: фон Неймана (5 клеток, включая саму клетку и ближайших соседей по горизонтали и вертикали) и Мура (9 клеток, включая саму клетку и всех непосредственных соседей как в игре «Жизнь»). Иногда рассматриваются расширенные окрестности Мура или фон Неймана. Для этого дополнительно нужно задать диапазон ρ – целое положительное число. Тогда расширенная окрестность Мура диапазона ρ – квадрат со стороной $2\rho+1$. Расширенная окрестность фон Неймана содержит все клетки на расстоянии ρ по горизонтали и вертикали. Кроме того, саму центральную клетку иногда не включают в окрестность.

Циклические клеточные автоматы

Для определения циклического клеточного автомата задается n различных состояний клеток, которые линейно упорядочиваются так, чтобы после последнего состояния шло первое (тем самым получается период длиной n). С каждым состоянием клетки связан определенный цвет. Кроме того, задается некоторое пороговое число m . Состояние клетки меняется на следующее, если по крайней мере имеется m клеток следующего цвета (состояния) в пределах расширенных окрестностей Мура или фон Неймана. Этот класс клеточных автоматов был открыт и изучен Дэвидом Гриффитом.

Такие клеточные автоматы показывают появление сложной самоорганизации из «случайного состояния». В качестве примера возьмем правило под названием ССА, найденное Д. Гриффитом в 1989 г. Здесь имеется всего 14 состояний, порог равен 1 и используется простая окрестность фон Неймана. Если начальное распределение состояний клеток задано случайным образом, то происходит самоорганизация и очень скоро клеточный автомат изображается в виде спиралей (рис. 4.22).

Существует также разновидность циклических клеточных автоматов – модель Greenberg–Hastings – возможно, самый простой класс клеточных автоматов с возбудимым центром. Выделяются два подряд идущих состояния: 0 – спокойное состояние и 1 – возбужденное состояние. Состояние клетки 0 меняется на 1, если в ее множестве соседей есть, по крайней мере, m клеток с состоянием 1. Все другие состояния меняются автоматически. Начинают с однородной произвольной смеси, в которой возможные цвета распределены случайным обра-

зом; возбуждение затухает, если порог слишком велик по сравнению с установленным размером окрестности клеток, тогда как беспорядочная смесь фактически неразличима от результатов шума, если порог слишком низок. Однако при промежуточных порогах волны возбуждения самоорганизуются в крупномасштабные спиральные пары, которые стабилизируются в локальном периодическом состоянии.

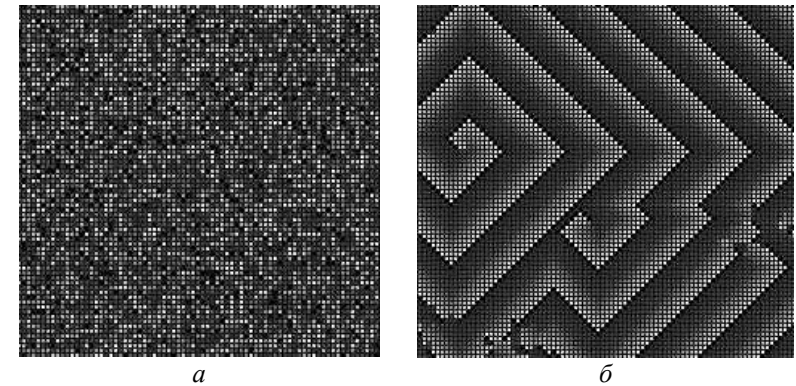


Рис. 4.22 Циклический автомат ССА: (а) исходная конфигурация; (б) состояние автомата приблизительно после 300 шагов

В качестве примера возьмем правило под названием Percolation («просачивание»), найденное Д. Гриффитом. Здесь имеется всего 8 состояний, порог равен 10 и используется расширенная окрестность Мура диапазона 5 (рис. 4.23).

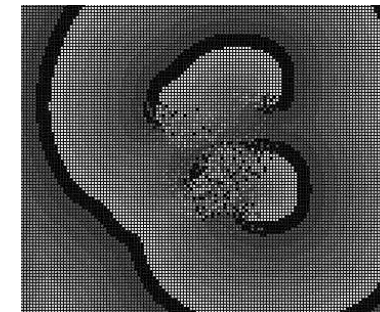


Рис. 4.23 Циклический автомат с возбудимым центром; эволюция из случайного состояния через 40 тактов

«Поколения»

«Поколения» («Generations») – класс клеточных автоматов, которые создают, быть может, самые красочные конфигурации клеток. Правила игры «Поколения» очень похожи на правила игры «Жизнь», с одним дополнением: добавляется история клеток. Клетки, которые в игре «Жизнь» умирают, в «Поколениях» становятся старше. Они не могут создать новые клетки, но влияют на правила, занимая место на решетке.

Рассмотрим два примера, найденные Mirek Wojtowicz в 1999 г. В обоих примерах используется 4 цвета. Первое правило называется «Конвейер» (рис. 4.24–4.25).

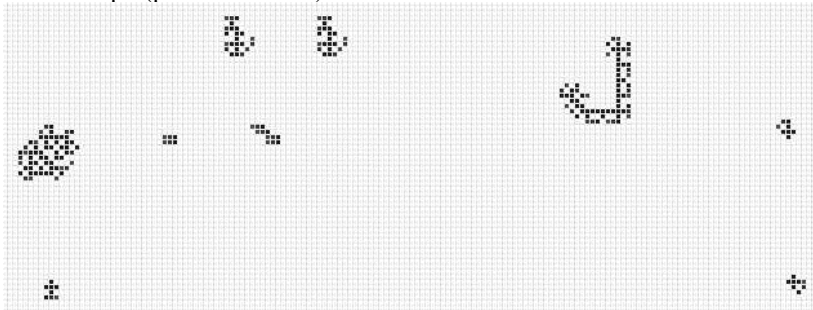


Рис. 4.24 «Конвейер»: начальная конфигурация

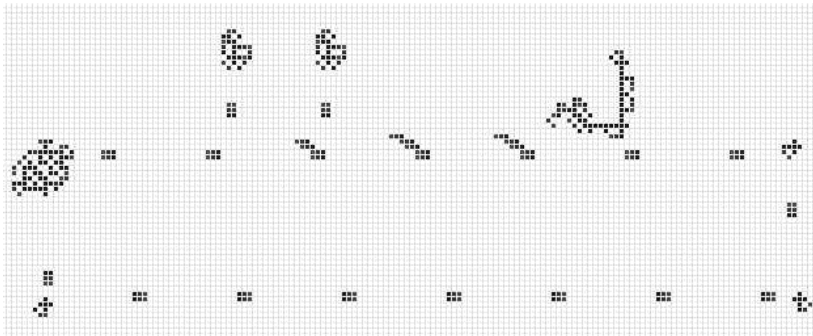


Рис. 4.25 «Конвейер» движется

На рис. 4.25 из левого верхнего узла начинают по конвейеру двигаться блоки из шести клеток. Обойдя весь конвейер по часовой стрелке, они исчезают в левом верхнем узле, чтобы возникнуть снова и продолжить движение. Очень красочное зрелище! Напоминает работу заброшенного завода, описанного Станиславом Лемом в романе «Эдем».

Второе правило называется «Стипл-чейз» (гонки с препятствиями) (рис. 4.26–4.27).

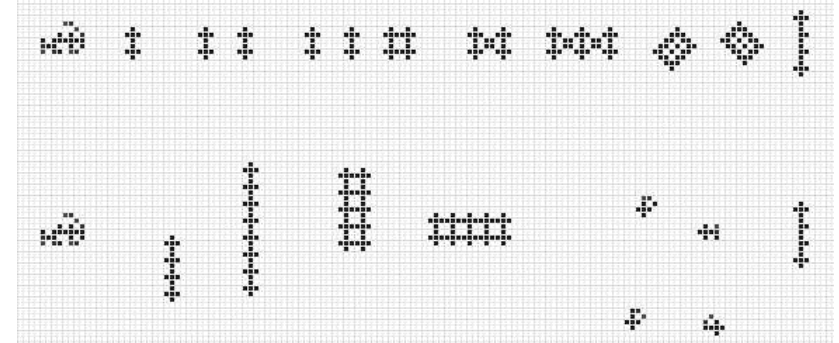


Рис. 4.26 Две дорожки с препятствиями перед гонками

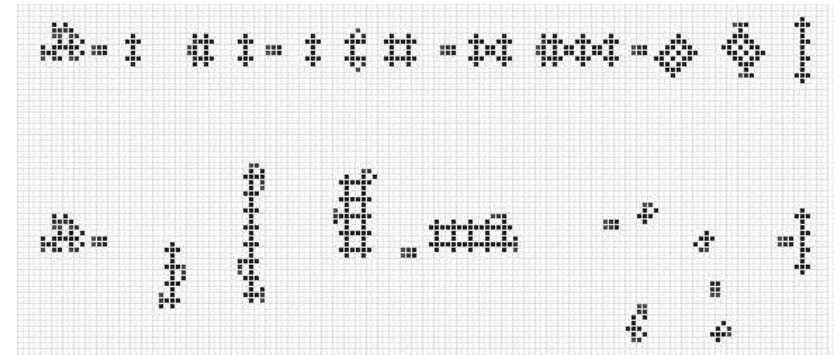


Рис. 4.27 Гонки начались

Трудно передать динамику этого автомата на статической картинке. На рис. 4.26 изображены две беговые дорожки (верхняя и нижняя) с различными препятствиями – это начальная конфигурация. В результате эволюции автомата из первых препятствий на каждой дорожке появляются «лошади» в виде блоков по 6 клеток. Они двигаются по дорожке и, встретив очередное препятствие, разделяются на две части и обходят препятствие по боковым сторонам. Потом снова соединяются и продолжают движение, чтобы исчезнуть в «стене», которой заканчивается дорожка. А в это время на дорожку вступают новые «лошади» и т. д. Эта картинка напоминает движение машин по шоссе, появляющихся из одной «дыры» на одном конце шоссе и исчезающих на другом.

зающих в другой «дыре» на другом конце шоссе, как описано в повести братьев Стругацких «Попытка к бегству».

Кроме двух описанных классов двумерных клеточных автоматов в литературе определены и изучаются множество других. Динамику поведения различных двумерных клеточных автоматов во всем многообразии можно увидеть с помощью прекрасной программы Mcell. Там же содержатся ссылки на литературу по клеточным автоматам.

Рассмотрим несколько приложений двумерных клеточных автоматов в компьютерном моделировании физических процессов.

Эрозия почвы

Рассмотрим проблему эрозии почвы. Пусть почва целины содержит некоторые участки с эрозией – ямки. В зависимости от конфигурации таких участков и их численности эрозия почвы может стабилизироваться со временем или увеличиваться («плохие» участки разрастаются в размерах). Какова динамика этого процесса?

В изучении эрозии почвы естественно использовать двумерные клеточные автоматы. Будем представлять целину с помощью клеточного автомата с двумя состояниями 1 («хороший» кусочек почвы) и 0 («пустыня» – «плохой» кусочек почвы). В качестве окрестности клетки выберем окрестность Мура. Сущность процесса эрозии почвы опишем следующим транзитивным правилом:

если у клетки с какой-нибудь стороны все три соседа суть клетки «пустыни», то почва этой клетки «не закреплена» и она становится (или остается) «пустыней»;

во всех других случаях состояние клетки не меняется.

Кусочек почвы, представленной единицей, останется на месте, если с каждой стороны (северной, южной, восточной и западной) от него есть хоть чуть-чуть почвы. В первых трех случаях, изображенных ниже, почва в центре окрестности «устойчива», в то время как в четвертом она «не закреплена» (так как никакая из трех ее восточных позиций не занята):

101	010	010	010
010	110	111	110
010	001	010	110

Если вы запустите этот автомат, начиная со сплошной почвы, то ничего не произойдет. Если вы удалите в некоторых местах изолированный кусочек почвы, то в дальнейшем эрозия не возникнет. Если вы продолжите удаление кусочков случайно, то, в конечном счете, получите места, где удалены два или три примыкающих кусочка; в зависимости от формы такой «ямки» стенки могут «рушиться», увеличивая саму ямку. Пока количество удаленной почвы остается

саму ямку. Пока количество удаленной почвы остается ниже определенного критического уровня (около 17%), такие обрушения обычно самозалечиваются и почва в целом остается устойчивой (рис. 4.28).

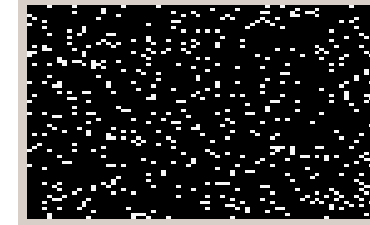


Рис. 4.28 Эрозия стабилизировалась; в начальном состоянии «плохие» участки составляли 10%

Однако, когда доля удаленной почвы превышает этот уровень, некоторые из ямок проявляют неограниченный рост – они становятся центрами образования зародышей, и в конечном счете вся почва выветривается (рис. 4.29).

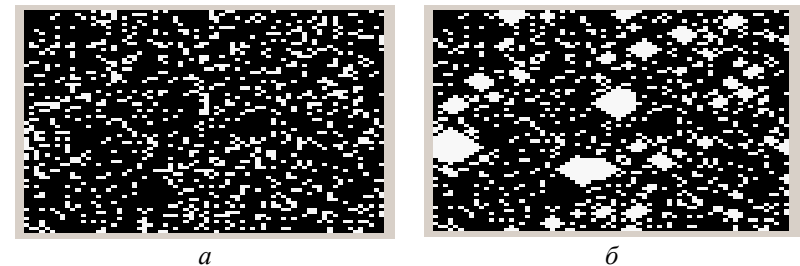


Рис. 4.29 Эрозия растет: (а) начальное состояние почвы («плохие» участки – 20%); (б) состояние почвы после 10 единиц времени

Диффузия

Опишем простую модель двумерной диффузии. Плотный кластер частиц одного вида находится в среде частиц другого вида. Частицы кластера случайно перемещаются в среде. Поскольку при случайном перемещении они должны меняться местами с частицами среды, то использование обычного клеточного автомата для данного моделирования выглядит затруднительно.

Определим новый вид клеточного автомата – *клеточный автомат на разбиение*:

решетка клеток разбита на множество конечных отдельных однородных частей – блоков;

дается правило для блока, рассматривающее и обновляющее содержимое всего блока (а не отдельной клетки как в обычном клеточном автомате). Одно и то же правило применяется ко всем блокам. Заметим, что блоки не перекрываются и нет обмена информацией между соседними блоками;

разбиение меняют от шага к шагу так, чтобы было некоторое перекрытие блоков, используемых на соседних шагах.

Последний пункт существен; если бы мы использовали одно и то же разбиение на каждом шаге, то клеточный автомат оказался бы разбит на совокупность независимых подсистем.

Можно доказать, что клеточный автомат на разбиение является частным случаем обычного клеточного автомата при подходящем выборе большего числа состояний и соседей.

Мы будем использовать только простейшую схему разбиения, а именно:

решетка клеток разбита на блоки размером 2×2 ;
шаги, в которых блоки соответствуют четной решетке, чередуются с шагами, использующими нечетную решетку, как показано на рис. 4.30.

Такую схему разбиения называют окрестностью Марголуса.

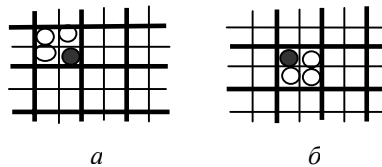


Рис. 4.30 Блоки 2×2 окрестности Марголуса: на последовательных шагах чередуется четная и нечетная решетка. В зависимости от этого помеченная клетка будет иметь окрестностью либо четный блок (а), либо нечетный блок (б)

Если черным цветом на решетке (рис. 4.30) обозначена клетка диффундированного вещества, то на одном шаге она должна обмениваться местами с какой-то белой клеткой в соответствующем блоке. В качестве возможных изменений содержимого блока выберем два способа: поворот содержимого блока по часовой стрелке и поворот против часовой стрелке. В данной модели диффузии решение, в каком направ-

лении вращать блок, будет определяться случайно. Результат диффузии показан на рис. 4.31.



Рис. 4.31 Постепенная диффузия плотного кластера частиц: (а) исходное состояние; (б) диффузия после 30 шагов

Ограниченное диффузией агрегирование

Опишем моделирование ограниченного диффузией агрегирования. Ограниченное диффузией агрегирование возникает, когда частицы налипают на начальный зародыш, представленный фиксированным объектом, и постепенно наращивают его. Как мы сейчас увидим, зародыш обычно дает нерегулярный дендритообразный рост, напоминающий морозные узоры на окне. Ограниченное диффузией агрегирование является приемлемой моделью физических процессов роста (например, кристаллов льда), в которых рост дендритов возникает потому, что материал, необходимый для роста, должен диффундировать извне или же должен удаляться некоторый побочный продукт роста (например, тепло).

В данной модели клетка имеет три состояния: 0 (частица вещества среды), 1 (частица диффундирующего вещества), 2 (дендрит). В правиле используется окрестность Марголуса. Исходная конфигурация представляет собой случайно полученную смесь частиц: 80% – частицы среды; 20% – диффундирующие частицы. В центре решетки находится одиночный зародыш. Как и в предыдущем примере происходит процесс диффузии с помощью генератора случайных чисел, но только для тех блоков, которые не содержат частицы дендрита. Если же часть дендрита появляется где-либо в блоке, то любые диффундирующие частицы, содержащиеся в этом блоке, будут прилипать к дендриту (менять состояние 1 на состояние 2), где они остаются неподвижными. Результат напоминает действие липкой бумаги для мух (рис. 4.32).

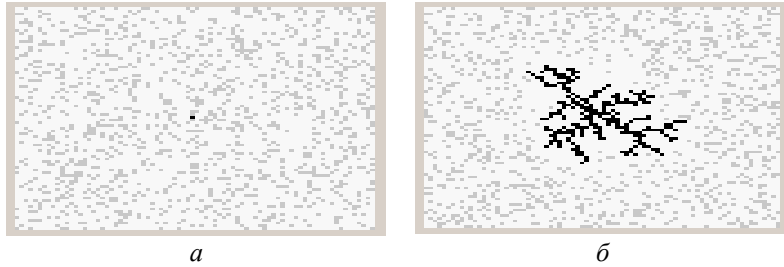


Рис. 4.32 Дендритный рост за счет ограниченного диффузией агрегирования: (а) исходное состояние; (б) дендрит после 20 шагов

Вернемся к саморепликации клеточных автоматов. Для того чтобы клеточный автомат был самовоспроизводящимся, совсем не требуется, чтобы он являлся универсальным конструктором. Первый пример такого двухмерного клеточного автомата, способного только саморепродуцироваться, изобрел Крис Лангтон (Christopher G. Langton). Его автомат состоял из 86 клеток, каждая клетка имела 4 соседа и могла быть в 8 состояниях (рис. 4.33).

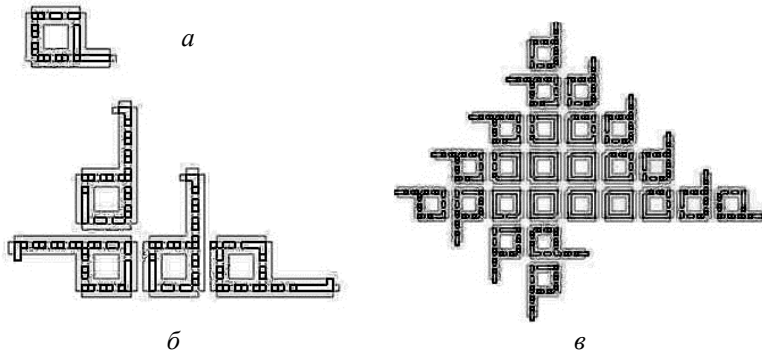


Рис. 4.33 Самовоспроизводящийся клеточный автомат: а – исходный организм; б – организм со своими потомками, все они продолжают размножаться; в – те организмы, которые блокированы другими организмами, уже не размножаются

Ячейки в состоянии 2 есть «кожа» или «оболочка» организма. Внутренние ячейки в состояниях 0, 1, 4 и 7 есть «ДНК» организма, они задают конструкцию размножающегося организма. «ДНК» размещена вокруг цикла, она копируется и посылается на конец «руки», где управляет созданием нового организма. Вы можете наглядно увидеть

это развитие в программе Mcell. Позже появились еще более простые примеры самовоспроизводящихся автоматов.

Теоретическая физика традиционно пытается найти «кратчайшие пути» в природе. То есть пытается найти методы, которые смогут воспроизвести конечное состояние системы, зная начальное состояние, но не проследивая каждый шаг от начального состояния к конечному. Примером является любой физический закон такого рода, например, утверждение, что траекторией брошенного в гравитационном поле объекта является парабола. Или еще один пример: чтобы умножить число с помощью компьютера на 2^n , нет необходимости 2^n раз складывать его с самим собой, достаточно просто сдвинуть его представление в памяти компьютера на n двоичных разрядов. Системы, для которых такие более простые алгоритмы существуют, называют *вычислительно приводимыми*.

Несомненно, вычислительная приводимость физической системы должна быть в принципе возможна, если мы в состоянии получить конечное состояние системы, выполняя более сложные вычисления, чем вычисления, которые может делать сама физическая система. Рассмотрим компьютер. Поскольку компьютер сам является физической системой, он способен определить результат своего развития только явным следованием. Никакое сокращение невозможно. Такая вычислительная неприводимость происходит каждый раз, когда физическая система может действовать как компьютер. В таких случаях общая прогнозируемость невозможна. Вычислительная неприводимость подразумевает, что существует самый высокий уровень, на котором могут быть сделаны абстрактные модели физических систем. Выше этого уровня необходимо только непосредственное моделирование.

Так как игру «Жизнь» можно рассматривать как универсальный компьютер, то система «Жизнь» является *вычислительно неприводимой*.

Существует гипотеза Стивена Вольфрама, состоящая в том, что многие физические системы и их модели, для которых в настоящее время неизвестно простое описание, являются вычислительно неприводимыми. Для них в принципе не могут быть построены эффективные теории. Единственный способ анализа таких систем – физический или компьютерный эксперимент (в т. ч. использование моделей клеточных автоматов).

Контроль обучения

В процессе дистанционного обучения дисциплине «Спецкурс 2 (синергетика для программистов)» студент должен выполнить два контрольных задания и обучение заканчивается выполнением компьютерной экзаменационной работы. Контрольные задания представлены ниже. Номер варианта выбирается по следующей формуле:

$$V = (N * k) \text{ div } 100,$$

где: V – искомый номер варианта (при $V=0$ выбирается максимальный вариант), N – общее количество вариантов по контрольной работе, k – значение двух последних цифр пароля (число в диапазоне 0..99), div – целочисленное деление.

Выполненные контрольные задания пересылаются по электронной почте диспетчеру центра дистанционного обучения, который в свою очередь пересылает их лектору. Лектор проверяет работы и при правильном выполнении студент получает подтверждение о том, что они зачтены. Если работа выполнена неправильно, то студент получает от лектора текстовый файл, в котором содержится описание ошибок.

Контрольная работа №1

Вариант 1. Возьмем последовательность чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8,... (очередной член этой последовательности определяется как сумма двух предыдущих). Рассмотрим далее последовательность цифр, стоящих в разряде единиц у чисел Фибоначчи. Будет ли эта последовательность периодической?

В следующих вариантах задач множество $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, N-1\}$ и $f: X \rightarrow X$ удовлетворяет закону $f(x) = g(x) \pmod{N}$, т. е. значения отображения вычисляются с точностью до остатка при делении на N . Рассматривая (X, f) как одномерную дискретную динамическую систему, определить аттракторы и их бассейны для следующих частных случаев.

Вариант 2. $N = 17$, $g(x) = x^2 + 1$.

Вариант 3. $N = 37$, $g(x) = x^2 + 1$.

Вариант 4. $N = 221$, $g(x) = x^2 + 1$.

Вариант 5. $N = 28$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$.

В следующих вариантах задач множество $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, N-1\}$ и $f: X \rightarrow X$ удовлетворяет закону $f(x) = g(x) \pmod{N}$, где g – функция Улама, которая определяется так:

$g(x) = x/2$, если x четно,

$g(x) = 3x + 1$, если x нечетно.

Рассматривая (X, f) как одномерную дискретную динамическую систему, определить аттракторы и их бассейны для следующих частных случаев.

Вариант 6. $N = 20$.

Вариант 7. $N = 40$.

Вариант 8. $N = 47$.

Вариант 9. Чему равно слово на выходе следующей L -системы после двух итераций:

аксиома $= F$;

продукция $F \rightarrow FF-[F]+[F]$;

$\theta = \pi/4$, $\alpha = \pi/2$.

Изобразите найденное слово графически.

Вариант 10. Определить фрактальную размерность (размерность подобия) модифицированного множества Кантора, в котором на каждом шаге выбрасывается центральная пятая часть каждого интервала.

Вариант 11. Определить фрактальную размерность (размерность подобия) фрактала, состоящего из таких точек отрезка $[0, 1]$, в десятичном представлении которых $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ отсутствуют цифры 3 и 7.

Вариант 12. Определить фрактальную размерность (размерность подобия) фрактала на плоскости, состоящего из точек (x, y) , где $x, y \in [0, 1]$, причем в десятичном представлении чисел $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ и $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$ отсутствуют цифры 3 и 7.

Вариант 13. Найти расстояние Хаусдорфа $h(A, B)$ между $A = \{(x, x) \mid -1 \leq x \leq 1\}$ и $B = \{(x, 0) \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

В следующих вариантах пусть C_1, C_2, C_3, \dots – аппроксимирующие множества классического множества Кантора C (см. рис. 2.41).

Вариант 14. Найти расстояние Хаусдорфа $h(C_1, C)$.

Вариант 15. Найти расстояние Хаусдорфа $h(C_2, C)$.

Вариант 16. Найти расстояние Хаусдорфа $h(C_n, C)$, $n = 2, 3, \dots$.

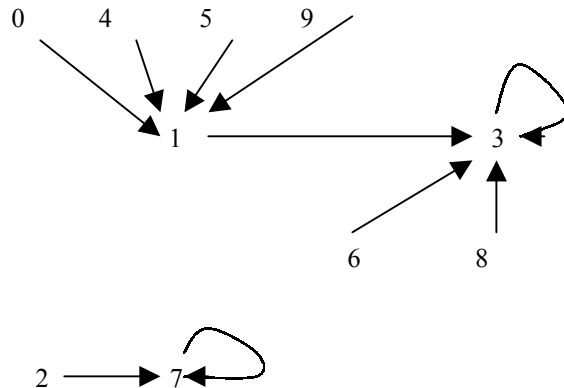
Приведем пример решения задачи, подобной задачам из вариантов 2–8.

Пусть $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.

Имеем следующие траектории:

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$
 $2 \rightarrow 7 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$
 $4 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$
 $5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$
 $6 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$
 $8 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$
 $9 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$

Таким образом, получаем следующий фазовый портрет динамической системы (X, f) :



Имеются два аттрактора: неподвижные точки 3 и 7. Их бассейны, соответственно, множества $\{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ и $\{2, 7\}$.

В данном случае аттракторы – только неподвижные точки. В других случаях могут быть и циклы.

Контрольная работа №2

В этой контрольной вы должны написать программу. Язык программирования может быть любой, но программа должна работать в графическом (а не в текстовом) режиме. Программы высылаются в виде exe-файлов. С каждой программой должно быть прислано описание, как ей пользоваться.

Вариант 1. Рассмотрим двухмерный клеточный автомат, в котором каждая клетка имеет 8 соседей. Клетка представляет одну особь в популяции и может быть "здоровой", "больной" или "здоровой с иммунитетом". Предполагаются следующие правила распространения эпидемий:

здоровый организм может с некоторой вероятностью заболеть при больном соседе;

больной организм по истечении некоторого времени выздоравливает и приобретает иммунитет;

организм с иммунитетом заболеть не может;

иммунитет с течением времени с некоторой вероятностью ослабляется вплоть до полного исчезновения.

В исходную полностью здоровую популяцию помещается один больной организм. Будем изучать распространение болезни при таких начальных условиях.

Состояние клетки задается целым числом s . Предлагается следующая интерпретация значения s :

$s = 0$ – здоровый организм, не имеет иммунитета;

$s < 0$ – организм здоровый и имеет иммунитет (степень иммунитета прямо пропорциональна абсолютному значению s);

$s > 0$ – больной организм (величина s указывает продолжительность болезни).

Пусть болезнь определяется следующими параметрами: p – вероятность заболеть при больном соседе; q – вероятность ослабления иммунитета за единицу времени; t_i – длительность болезни (у всех организмов болезнь продолжается одинаковое время); t_v – длительность иммунитета в единицах времени.

Законы изменения состояния:

1) $s = 0 \rightarrow s := 0$ – если нет больных соседей (здоровый организм остается здоровым при здоровых соседях);

2) $s = 0 \rightarrow s := 1$ с вероятностью p – если есть больной сосед (здоровый организм без иммунитета может заболеть при больном соседе);

3) $0 < s < ti \rightarrow s := s+1$ – больной продолжает болеть определенное время;

4) $s = ti \rightarrow s := -tv$ – если больной достаточно долго проболел, то он выздоравливает и приобретает иммунитет;

5) $s < 0 \rightarrow s := s+1$ с вероятностью q – иммунитет со временем может ослабнуть.

Будем предполагать, что популяция является замкнутой, но неограниченной системой. Устраним границы поля: соединим любые два противоположных края поля, затем концы полученного цилиндра. Тем самым мы рассматриваем исходное поле как тор. Определим начальную конфигурацию – все клетки «здоровы», за исключением центральной «больной» клетки.

Напишите программу, моделирующую поведение данного клеточного автомата. Программа должна позволять пользователю менять параметры: p – вероятность заболеть при больном соседе; q – вероятность ослабления иммунитета за единицу времени; ti – длительность болезни; tv – длительность иммунитета в единицах времени.

Вариант 2. Напишите программу, строящую диаграмму Ламерея для произвольного квадратичного отображения $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Вариант 3. Напишите программу построения бифуркационных диаграмм для отображения $y = \lambda x(1-x)$ при фиксированном $0 < \lambda \leq 4$.

Вариант 4. Напишите программу для построения множества Жюлиа для данного параметра c .

Вариант 5. Напишите программу для построения множества Мандельброта.

Вариант 6. Создайте с помощью клеточного автомата модель изменения растительности в лесу при пожарах.

Двумерная решетка представляет клетки с различными видами растительности. Состояние одной клетки описывается в виде пары (s, t) . Величина t – время, прошедшее с тех пор, как на этой клетке был огонь, или, если огня никогда не было, то время с момента запуска клеточного автомата. Значение s есть один из следующих символов: e – «огонь», b – «выгоревшая земля», g – «трава», w – «редкий лес», f – «густой лес». Начальное состояние: $t = 0$ для всех клеток; все клетки, за исключением центральной, на которой огонь, получают случайно одно из значений g, w, f .

Правила перехода:

$(s, t) \rightarrow (e, 0)$, если горит соседняя клетка, и s – не выжженная земля (переход совершается с некоторой вероятностью, заданной как параметр);

иначе

$(e, 0) \rightarrow (b, 1)$,

$(b, 4) \rightarrow (g, 5)$,

$(g, 9) \rightarrow (w, 10)$,

$(w, 49) \rightarrow (f, 50)$;

иначе

$(s, t) \rightarrow (s, t + 1)$.

Вариант 7. Напишите программу для реализации игры "Жизнь".

Вариант 8. Напишите программу для построения одномерных клеточных автоматов.

Вариант 9. Напишите программу для двумерного клеточного автомата, моделирующего процесс диффузии (раздел 4.4).

Вариант 10. Напишите программу для двумерного клеточного автомата, моделирующего процесс ограниченного диффузией агрегирования (раздел 4.4).

Литература

Различные аспекты нелинейной динамики

1. Анищенко В. С. Детерминированный хаос // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 6. – С. 70-76.
2. Анищенко В. С. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и стохастические проблемы. – Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1999. – 368 с.
3. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 144 с.
4. Белых В. Н. Элементарное введение в качественную теорию и теорию бифуркаций динамических систем // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 1. – С. 115–121.
5. Глейк Д. Хаос. Рождение новой науки. СПб.: Амфора, 2001. – 398с.
6. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. – М.: Постмаркет, 2001. – 189с.
7. Динамика одномерных отображений / А.Н. Шарковский, С. В. Коляда, А. Г. Сивак, В. В. Федоренко; Под ред. А. Н. Шарковского. – Киев: Наукова Думка, 1989. – 216 с.
8. Ильюшенко Ю., Котова А. Подкова Смейла // Квант. – 1994. – №1. – С. 15–19.
9. Кратчерфилд Джеймс П., Фармер Дж. Дойн, Паккард Норман Х. и др. Хаос // В мире науки. – 1987. – №2. – С. 16–28.
10. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
11. Рюэль Д. Случайность и хаос. Ижевск: РХД, 2001. – 192 с.
12. Хакен Г. Синергетика. – М.: Мир, 1980.
13. Шарковский А. Н. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Украинский математический журнал. – 1964. – т. 16, №1. – С. 61– 71.
14. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 521с.

Фракталы

1. Божокин Д.А., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: РХД, 2001. – 128 стр.
2. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
3. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 стр.
4. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов. Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 162 стр.
5. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993. – 176 с.
6. Федер Е. Фракталы. Москва: Мир, 1991. – 260 стр.
7. Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.
8. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 521с.

Клеточные автоматы

1. Гарднер М. Крестики-нолики. – М.: Мир, 1988.
2. Гарднер М. Математические досуги. – М.: Мир, 1972.
3. Тоффоли Т., Марголюс Н. Машины клеточных автоматов. – М.: Мир, 1991. – 280с.
4. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 521с.

Программы

1. Fractint: <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/getting.html>
2. Mcell: <http://www.mirwoj.opus.chelm.pl/>