



*Томский межвузовский центр
дистанционного образования*

В.М. Зюзьков

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Теория множеств и математическая логика

Учебное методическое пособие

Томск - 1999

Министерство образования Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

Кафедра компьютерных систем в управлении
и проектировании (КСУП)

В.М. Зюзьков

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 1

Теория множеств и математическая логика

Учебное методическое пособие

1999

Зюзьков В.М.

Дискретная математика. Часть 1. Теория множеств и математическая логика: Учебное методическое пособие. - Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 1999. - 33 с.

Учебное методическое пособие содержит требования к выполнению контрольных заданий и варианты заданий. В качестве источника для получения теоретических знаний студенту достаточно использовать учебное пособие по теории множеств и математической логики, автор В. М. Зюзьков.

Предназначено для студентов, обучающихся на всех формах обучения с использованием дистанционных образовательных технологий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Контроль обучения	4
2. Первое контрольное задание	5
2.1. Примеры задач с решениями	5
2.2. Варианты задания	15
3. Второе контрольное задание	22
3.1. Примеры задач с решениями	22
3.2. Варианты задания	27

1. КОНТРОЛЬ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина "Дискретная математика" изучается на протяжении двух семестров (4 и 5). В процессе дистанционного обучения дисциплине в 4 семестре студент должен выполнить два контрольных задания по теории множеств и математической логики, выполнить компьютерную экзаменационную работу. Каждое контрольное задание требует решения 10 задач.

Выполненное задание (10 задач *с условиями и решениями*) студент пересылает электронной или обыкновенной почтой диспетчеру центра дистанционного обучения, который в свою очередь пересылает их лектору. Лектор проверяет решения задач и при правильном решении студент получает подтверждение о том, что они зачтены. Если задание не выполнено (неправильно решена одна или несколько задач), студент получает от лектора сообщение о том какая задача не зачтена. При выполнении этих двух контрольных заданий студент получает зачет. В конце семестра студент выполняет компьютерную экзаменационную работу. Ему потребуется ответить на 10 случайно выбранных вопросов из 100 возможных. По результатам ответа студенту ставится экзаменационная оценка.

2. ПЕРВОЕ КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Первое контрольное задание посвящено решению задач из теории множеств. Задание состоит из 10 задач: 4 задачи на операции с множествами, 4 задачи с отношениями, 1 задача с отображениями и 1 задача с отношениями эквивалентности или порядка.

2.1. Примеры задач с решением

Рекомендуется разобраться в решениях всех задач, приведенных в примерах. Это поможет выполнить контрольное задание и компьютерную экзаменационную работу.

Задачи с множествами

Для краткости письма будем использовать иногда сокращения:

- 1) вместо слов "следует", "влечет" и т. п. будем писать символ \Rightarrow ;
- 2) вместо слов "тогда и только тогда, когда" будем писать символ \Leftrightarrow .

1. Равны ли два множества $\{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ и $\{1,2,3\}$?

Нет, первое множество содержит два элемента $\{1,2\}$ и $\{2,3\}$, а второе три 1, 2, 3.

2. Доказать, что если конечное множество A содержит n элементов, то множество-степень $P(A)$ содержит 2^n элементов.

Докажем с помощью математической индукции по числу элементов n .
Базис индукции. Если $n=0$, то множество A пустое и $P(A)=\{\emptyset\}$ и утверждение выполнено.

Индуктивный переход. Пусть утверждение доказано для всех множеств с k элементами, докажем что оно выполнено и для множеств с $k+1$ элементами.

Пусть $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$ и $B = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Множество всех подмножеств A , не содержащих элемент x_{k+1} , равно $P(B)$. Любое подмножество A , содержащее x_{k+1} , можно получить из соответствующего подмножества B , добавив элемент x_{k+1} . Поэтому и таких подмножеств A столько же сколько элементов $P(B)$. Общее количество элементов в $P(A)$ тогда равно $2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Индуктивный переход доказан и тем самым доказано искомое утверждение.

3. Доказать, что для любых множеств A и B имеем $A \cap (A \cup B) = A$.

Если множество A пустое, то равенство очевидно.

Пусть теперь произвольное $x \in A$. Имеем $x \in A \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B)$ (так как $A \subseteq A \cap (A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cap (A \cup B)$). Наоборот, $x \in A \cap (A \cup B) \Rightarrow x \in A$ или $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ или $(x \in A \text{ и } x \in B) \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \cap (A \cup B) \subseteq A$. Поэтому $A \cap (A \cup B) = A$.

4. Перечислить все элементы каждого из следующих множеств

а) $\{x \mid x \subseteq \{1\}\}$; б) $\{x \mid x \subseteq \{1,2\}\}$; в) $\{x \mid x \subseteq \{1,2,3\}\}$; г) $\{x \mid x \subseteq \emptyset\}$.

Ответ: а) элементы $\{1\}, \emptyset$; б) элементы $\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset$; в) элементы $\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset$; г) элемент \emptyset .

5. Перечислите все подмножества множества A : а) $A = \{\{1,2\}, \{3\}, 1\}$;

б) $A = \{\{1\}, \{2\}, 1\}$; в) $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Ответы: а) подмножества A , $\{\{1,2\}, \{3\}\}, \{\{1,2\}, 1\}, \{\{3\}, 1\}, \{\{1,2\}\}, \{\{3\}\}, \{1\}, \emptyset$; б) подмножества A , $\{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, 1\}, \{\{2\}, 1\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{1\}, \emptyset$; в) подмножества A , $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \emptyset$.

6. Вставьте между множествами символ \in или \subseteq так, чтобы получилось истинное высказывание: а) $\{1,2\} ? \{1,2, \{1\}, \{2\}\}$; б) $\{1\} ? \{1, \{1,2\}\}$;

в) $\{1,2\} ? \{1, 2, \{1,2\}\}$; г) $\emptyset ? \{1,2, \{1\}, \{\emptyset\}\}$; д) $\emptyset ? \{\{\emptyset\}\}$; е) $\emptyset ? \{\emptyset\}$.

Ответы: а) $\{1,2\} \subseteq \{1,2, \{1\}, \{2\}\}$; б) $\{1\} \subseteq \{1, \{1,2\}\}$;

в) $\{1,2\} \subseteq \{1, 2, \{1,2\}\}$ или $\{1,2\} \in \{1, 2, \{1,2\}\}$; г) $\emptyset \subseteq \{1,2, \{1\}, \{\emptyset\}\}$;

д) $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$; е) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ или $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

7. Докажите следующее утверждение: $A \subset B$ и $B \subseteq C \Rightarrow A \subset C$.

Пусть $x \in A \Rightarrow x \in B$ (так как $A \subset B$) $\Rightarrow x \in C$ (так как $B \subseteq C$) $\Rightarrow A \subseteq C$. Докажем теперь, что $A \neq C$. Так как $A \subset B$, то найдется $x \in B$, не принадлежащий $A \Rightarrow$ этот $x \in C$ (так как $B \subseteq C$). Поэтому $A \subset C$.

8. Найдите $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, \overline{A}, \overline{B}$ для

а) $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4,5\}, U = \{0,1,\dots,9\}$; б) $A = \{x \mid x \text{ делится на } 2\}$,

$B = \{x \mid x \text{ делится на } 3\}, U = \mathbb{N}$ - множество натуральных чисел.

Ответы: а) $A \cap B = \{2,3,4,5\}, A \cup B = \{1,2,3,4,5\}, A \setminus B = \{1\}, B \setminus A = \{4,5\}, \overline{A} = \{0,4,5,6,7,8,9\}, \overline{B} = \{0,1,6,7,8,9\}$; б) $A \cap B = \{x \mid x \text{ делится на } 2 \text{ или на } 3\}, A \cup B = \{x \mid x \text{ делится на } 6\}, A \setminus B = \{x \mid x \text{ делится на } 2 \text{ и не делится на } 3\}, B \setminus A = \{x \mid x \text{ делится на } 3 \text{ и не делится на } 2\}, \overline{A} = \{x \mid x \text{ не делится на } 2\}, \overline{B} = \{x \mid x \text{ не делится на } 3\}$.

9. Докажите, что $\overline{A \setminus B} = \overline{A} \cap B$.

Доказательство. Пусть $x \in \overline{A \setminus B} \Leftrightarrow x \notin A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ и } x \in B) \text{ или } x \notin A \Leftrightarrow x \in A \cap B \text{ или } x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \in \overline{A \cap B} = (\overline{A \cap B}) = \overline{A \cap B} = \overline{A} \cap B$.

$$x \in \overline{A} \cap B.$$

10. Найдите множество X , удовлетворяющее следующему условию:

$$A \setminus (A \setminus X) = \emptyset.$$

Из условия имеем $A \subseteq A \setminus X \Rightarrow A \cup X = \emptyset \Rightarrow$ наибольшее множество X , которое не имеет общих элементов с A , есть абсолютное дополнение к A , т. е. $X = \overline{A}$.

11. Найдите соответствующую форму $P(x)$ для каждого множества: а)

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$; б) $\{м, о, н, е, ж, т, с, в\}$;

в) $[-2, 3]$.

Ответы: а) $\{x \mid x - \text{простое число меньше } 20\}$; б) $\{x \mid x \text{ является буквой слова "множество"}\}$; в) $\{x \mid x \in [-2, 3]\}$.

12. Приведите пример множеств A , B и C таких, чтобы выполнялись условия

$$A \in B, B \notin C, A \subseteq C.$$

Одно из решений: $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$, $C = \{1, 2\}$.

13. Доказать тождество $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cap (A \cup C)$.

Доказательство. $A \setminus (B \setminus C) = A \cup (\overline{B \cap C}) = A \cup (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{C}) = (A \setminus B) \cap (A \cup C)$.

Задачи с отношениями

1. Пусть $A = \{0, 1\}$. Перечислите элементы множеств A^2 , A^3 .

Ответ: $A^2 = \{<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <1, 1>\}$; $A^3 = \{<0, 0, 0>, <0, 0, 1>, <0, 1, 0>, <0, 1, 1>, <1, 0, 0>, <1, 0, 1>, <1, 1, 0>, <1, 1, 1>\}$.

2. Определим упорядоченную пару $\langle a, b \rangle$ как множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Убедимся, что такое формальное теоретико-множественное определение вполне соответствует нашему неформальному определению

упорядоченной пары (см. лекции). Для этого достаточно доказать, что для любых элементов $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a = c, b = d$.

Доказательство. Пусть $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow$

множества должны быть поэлементно равны и равенство возможно только в ситуации $\{a\} = \{c\}$ и $\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow a = c$ и $\{a, b\} = \{c, d\} \Leftrightarrow a = c$ и $b = d$.

3. Пусть $A \subseteq C$, $B \subseteq C$. Докажите, что $A \times B = (A \times C) \cap (C \times B)$.

Пусть $\langle a, b \rangle \in A \times B \Rightarrow a \in A, b \in B \Rightarrow (a \in A, b \in C) \text{ и } (a \in C, b \in B) \text{ (так как, } A \subseteq C, B \subseteq C) \Rightarrow \langle a, b \rangle \in A \times C \text{ и } \langle a, b \rangle \in C \times B \Rightarrow \langle a, b \rangle \in (A \times C) \cap (C \times B)$. Наоборот, пусть $\langle a, b \rangle \in (A \times C) \cap (C \times B) \Rightarrow \langle a, b \rangle \in A \times C, \langle a, b \rangle \in C \times B \Rightarrow a \in A, b \in B \Rightarrow \langle a, b \rangle \in A \times B$.

4. Докажите, что подмножество C множества $A \times B$ является прямым произведением некоторого подмножества A_1 множества A и подмножества B_1 множества B тогда и только тогда, когда для любых $\langle a, b \rangle \in C$, $\langle c, d \rangle \in C$ следует, что $\langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle \in C$.

Доказательство. Пусть $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$, $C = A_1 \times B_1$. Возьмем $\langle a, b \rangle \in C$, $\langle c, d \rangle \in C \Rightarrow a, c \in A_1$, $b, d \in B_1 \Rightarrow \langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle \in A_1 \times B_1 = C$. Наоборот, пусть выполнено условие: для любых $\langle a, b \rangle \in C$, $\langle c, d \rangle \in C$ следует, что $\langle a, d \rangle, \langle c, b \rangle \in C$. Докажем теперь, что в качестве A_1 и B_1 можно взять соответственно область определения D и область значения R отношения, которое задается множеством пар C . Пусть $\langle a, d \rangle \in D \times R \Rightarrow$ существуют такие b и c , что $\langle a, b \rangle \in C$ и $\langle c, d \rangle \in C$ (это выполняется по определению D и R) $\Rightarrow \langle a, d \rangle \in C \Rightarrow D \times R \subseteq C$. Отношение $C \subseteq D \times R$ очевидно выполняется, поэтому $D \times R = C$.

5. Пусть A, B, C, D - непустые множества. Докажите, что а) $A \subseteq B$ и $C \subseteq D \Leftrightarrow A \times C \subseteq B \times D$, б) $A \times C = B \times D \Leftrightarrow A = B$ и $C = D$.

Решение. а) Пусть $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$. Тогда $\langle a, c \rangle \in A \times C \Rightarrow a \in A$, $c \in C \Rightarrow a \in B$, $c \in D$ (так как $A \subseteq B$ и $C \subseteq D$) $\Rightarrow \langle a, c \rangle \in B \times D$. В другую сторону, Пусть $A \times C \subseteq B \times D$. Тогда $a \in A$, $c \in C \Rightarrow \langle a, c \rangle \in A \times C \Rightarrow \langle a, c \rangle \in B \times D \Rightarrow a \in B$, $c \in D \Rightarrow A \subseteq B$ и $C \subseteq D$.
Случай б) является следствием а).

6. Докажите тождество $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Доказательство. $\langle x, y \rangle \in (A \setminus B) \times C \Leftrightarrow x \in A \setminus B$, $y \in C \Leftrightarrow x \in A$ и $x \notin B$ и $y \in C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in A \times C$ и $\langle x, y \rangle \notin B \times C \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in (A \times C) \setminus (B \times C)$.

7. Докажите, что $(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Доказательство. $\langle x, y \rangle \in (A \times B) \cap (C \times D) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in A \times B$ или $\langle x, y \rangle \in C \times D \Rightarrow (x \in A$ или $x \in C)$ и $(y \in B$ или $y \in D) \Rightarrow \langle x, y \rangle \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

8. Для бинарного отношения $\rho = \{\langle x, y \rangle \mid x^2 + y^2 < 1\}$ найдите D_ρ и R_ρ .

Решение. $D_\rho = \{x \mid \text{существует } y \text{ такой, что } x^2 + y^2 < 1\} = \{x \mid -1 < x < 1\}$. Точно также $R_\rho = \{y \mid -1 < y < 1\}$.

9. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$. Для бинарного отношения $\rho = \{\langle a, X \rangle \in A \times B \mid a \in X\}$ найдите D_ρ и R_ρ .

Решение. $D_\rho = \{a \in A \mid \text{существует } X \in B \text{ такой, что } a \in X\} = \{1, 2, 3, 5\}$.

$R_\rho = \{X \in B \mid \text{существует элемент } a \in A \text{ такой, что } a \in X\} = B$.

10. Какими свойствами обладает отношение $x \rho y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$, определенное на множестве действительных чисел?

Решение. Имеем а) для любого x выполнено $x^2 + x = x^2 + x \Rightarrow \rho$ рефлексивно;

б) если $x^2 + x = y^2 + y \Rightarrow y^2 + y = x^2 + x \Rightarrow \rho$ симметрично; в) $x^2 + x = y^2 + y$ и $y^2 + y = z^2 + z \Rightarrow x^2 + x = z^2 + z \Rightarrow \rho$ транзитивно; г) проверим антисимметричность: имеем $2^2 + 2 = (-3)^2 + (-3)$ и 2 не равно $-3 \Rightarrow \rho$ не антисимметрично.

11. Какими свойствами обладает отношение ρ , определенное на множестве всех прямых плоскости: $x \rho y \Leftrightarrow x$ пересекается с y ?

Ответ: отношение рефлексивно, симметрично, не транзитивно, не антисимметрично.

12. Какими свойствами обладает отношение ρ , определенное на множестве всех прямых плоскости: $x \rho y \Leftrightarrow x$ не пересекается с y ?

Ответ: отношение не рефлексивно, симметрично, не транзитивно, не антисимметрично.

13. Пусть ρ - отношение на множестве X . Докажите: а) ρ симметрично $\Leftrightarrow \rho^{-1} = \rho$; б) ρ транзитивно $\Leftrightarrow \rho \circ \rho \subseteq \rho$; в) ρ рефлексивно $\Rightarrow \rho \subseteq \rho \circ \rho$; г) ρ рефлексивно и транзитивно $\Rightarrow \rho = \rho \circ \rho$.

Доказательство. а) Пусть ρ симметрично. Возьмем $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ (по определению ρ^{-1}) $\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \rho$ (так как ρ симметрично). Пусть теперь $\rho^{-1} = \rho$. Тогда, $\langle x, y \rangle \in \rho \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \rho^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \rho \Leftrightarrow \rho$ симметрично.

б) Пусть ρ транзитивно. Тогда $\langle x, y \rangle \in \rho \circ \rho \Rightarrow$ существует такое z , что $\langle x, z \rangle \in \rho$ и $\langle z, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho$ (так как ρ транзитивно). Пусть, теперь, $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Тогда, $\langle x, y \rangle \in \rho, \langle y, z \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho \circ \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho$ (по условию, $\rho \circ \rho \subseteq \rho$) $\Rightarrow \rho$ транзитивно.

в) Пусть ρ рефлексивно. Тогда, $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho$ (так как ρ рефлексивно) и $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho \circ \rho$ (по определению композиции отображений).

г) это утверждение следует из б) и в).

14. Какова характеристическая особенность декартовой диаграммы рефлексивного (симметричного, антисимметричного) отношения, определенного на множестве вещественных чисел \mathbf{R} .

Ответ. Декартова диаграмма отношения ρ - это множество таких точек (x, y) плоскости, что $\langle x, y \rangle \in \rho$. Поэтому для рефлексивного отношения декартова диаграмма содержит прямую $y=x$, для симметричного отношения декартова диаграмма симметрична относительно прямой $y=x$, для антисимметричного отношения декартова диаграмма не содержит ни одной пары точек (x, y) и (y, x) , $x \neq y$, симметричных относительно биссектрисы первой четверти.

15. Пусть $\rho_1 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \times y > 0 \}$, $\rho_2 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x+y \text{ - целое число} \}$.

Найти $\rho_1 \perp \rho_2$.

Решение. $\rho_1 \perp \rho_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } \langle x, z \rangle \in \rho_2 \text{ и } \langle z, y \rangle \in \rho_1 \} = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } x+z \text{ целое число и } z \times y > 0 \}$. Если $y \neq 0$, то такое z всегда найдется. Поэтому $\rho_1 \perp \rho_2 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

16. Пусть $\rho_1 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \times y > 0 \}$, $\rho_2 = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x=y^2 \}$. Найти $\rho_1 \perp \rho_2$.

Решение. $\rho_1 \perp \rho_2 = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } \langle x, z \rangle \in \rho_2 \text{ и } \langle z, y \rangle \in \rho_1 \} = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } x=z^2 \text{ и } z \times y > 0 \} = \{ \langle x, y \rangle \mid \text{существует такое } z, \text{ что } z = x^{1/2} \text{ и } z \times y > 0 \} = \{ \langle x, y \rangle \mid x^{1/2} \times y > 0 \} = \{ \langle x, y \rangle \mid x > 0 \text{ \& } y > 0 \}$

17. Пусть ρ и φ - бинарные отношения, определенные на некотором множестве. Тогда $(\varphi \setminus \rho)^{-1} = \varphi^{-1} \setminus \rho^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\langle x, y \rangle \in (\varphi \setminus \rho)^{-1} \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in (\varphi \setminus \rho) \Leftrightarrow \langle y, x \rangle \in \varphi \text{ и } \langle y, x \rangle \notin \rho \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \varphi^{-1} \text{ и } \langle x, y \rangle \notin \rho^{-1} \Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in \varphi^{-1} \setminus \rho^{-1}$.

18. Пусть $x \rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$. Определите ρ^{-1} , $\rho \perp \rho$, $\rho^{-1} \perp \rho^{-1}$.

Отношение ρ - рефлексивное, симметричное и транзитивное. Поэтому (см. задачу 13) $\rho^{-1} = \rho$, $\rho \perp \rho = \rho$, $\rho^{-1} \perp \rho^{-1} = (\rho \perp \rho)^{-1} = \rho$.

19. Пусть ρ - бинарное отношение на A и $e_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$. Доказать, что $\rho = e_R \Leftrightarrow \rho \perp \varphi = \varphi \perp \rho = \varphi$ для любого отношения φ на A .

Доказательство. Пусть $\rho \perp \varphi = \varphi \perp \rho = \varphi$ для любого отношения φ на $A \Rightarrow$ для $\varphi = e_R$ имеем $\rho = \rho \perp e_R = e_R$ (по определению e_R и по условию). Обратно, по определению e_R , имеем $e_R \perp \varphi = \varphi \perp e_R = e_R$ для любого отношения φ на A .

Задачи с отображениями

1. Укажите все сюръективные отображения множества $A = \{1, 2, 3\}$ на множество $B = \{a, b\}$.

Решение удобно изобразить диаграммой (рис. 1).

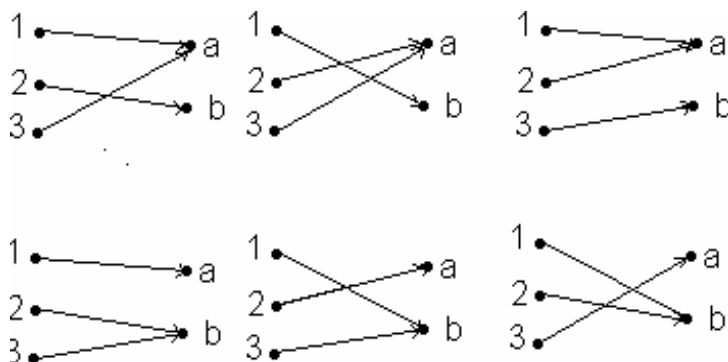


Рис. 1. Все сюръективные отображения $f: A \rightarrow B$

2. Найдите все отображения множества $A = \{1, 2\}$ в себя, укажите, какие из них инъективные, сюръективные.

Решение удобно изобразить диаграммой (рис. 2).

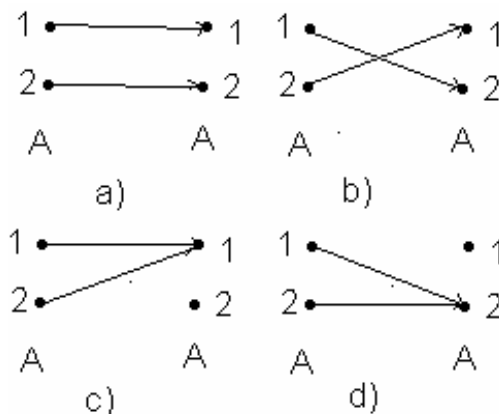


Рис. 2. Все отображения A в себя
a), b) инъективные и сюръективные отображения

3. Пусть X - конечное множество и отображение $f: X \rightarrow X$ инъективно.

Доказать, что тогда f биективно.

Для доказательства достаточно показать, что отображение сюръективно, т. е. область значений совпадает с X . Из конечности и инъективности отображения f следует, что количество элементов во множестве значений должно быть такое же как и в X , но это множество значений является подмножеством X , поэтому любой элемент из X должен быть значением некоторого элемента при отображении f .

4. Характеристическая функция множества A определяется следующим образом

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \notin A \end{cases}$$

Доказать:

- a) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x)$;
- b) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$;
- c) $\chi_{\bar{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$;
- d) $\chi_{A \setminus B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \wedge \chi_B(x)$.

Доказательство. а) Пусть $x \in A \cup B \Rightarrow \chi_{A \cup B}(x) = 1$. С другой стороны, $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A, x \in B \Rightarrow \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = 1 \vee 1 = 1$. Пусть $x \notin A \cup B \Rightarrow \chi_{A \cup B}(x) = 0$. С другой стороны, $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Rightarrow \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = 0 \vee 0 = 0$. б) Очевидно, так как $x \in A \cap B \Rightarrow \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = 1 \wedge 1 = 1$. Пусть $x \notin A \cap B \Rightarrow \chi_{A \cap B}(x) = 0$. С другой стороны, $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ или $x \notin B \Rightarrow \chi_A(x) \wedge \chi_B(x) = 0 \wedge 0 = 0$.

$\Leftrightarrow x \notin A$. b) Из а) и с) и $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_C(x)$, где $C = (\bar{A} \cup \bar{B})$, следует, что $\chi_{A \cap B}(x) = 1 - \chi_{\bar{A} \cup \bar{B}}(x) = 1 - (1 - \chi_A(x))(1 - \chi_B(x)) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \chi_B(x)$. d) Доказывается аналогично.

5. Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $A \subseteq X$. Образом множества A при отображении f называется множество $f(A) = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$.

Пусть $B \subseteq Y$. Прообразом множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$.

Доказать, что $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Доказательство. $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A$ или $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ или $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

6. Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ - конечное множество. Определим отображение $f: P(A) \rightarrow \{0, 1\}^n$ следующим образом

$f(B) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$, где $\alpha_i = 0$, если $a_i \notin B$, и $\alpha_i = 1$, если $a_i \in B$.

Докажите, что f - биекция.

Доказательство. Докажем сначала, что f - сюръективное отображение. Пусть $\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle \in \{0, 1\}^n$. Нетрудно видеть, что если возьмем в качестве B множество тех элементов $a_i \in A$, для которых $\alpha_i = 1$, то $f(B) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$.

Теперь докажем инъективность. Пусть B_1 и B_2 - два различных непустых подмножества $A \Rightarrow$ существует элемент $a_i \in A$, $a_i \in (B_1 \cap B_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \Rightarrow \alpha_i = 1$ принадлежит $f(B_1)$ или $f(B_2)$, но не одновременно $\Rightarrow f(B_1) \neq f(B_2)$. Если же, скажем B_1 - пустое множество, а B_2 - нет, то $f(B_1)$ состоит из одних нулей, $f(B_2)$ - нет. Биjectивность f доказана.

7. Найдите прообраз множества $\{0\}$ при следующих отображениях $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$:

a) $x \rightarrow \sin(x)$;

b) $x \rightarrow \lg(x^2 + 1)$;

c) $x \rightarrow x^2 + 2x + 1$.

Решение. $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbf{R} \mid f(x) = 0\}$. Поэтому: а) $\{\pi n \mid n - \text{целое}\}$; б) \emptyset ; в) $\{-1\}$.

8. Какие отображения инъективны, сюръективны?

a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^2 + 3x + 5$;

b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow x^{15}(x^2 - 1)$;

c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, x \rightarrow 2^{3x+1}$;

d) $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, \langle a, b \rangle \rightarrow a + b$, \mathbf{Z} - множество целых чисел;

e) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}, a \rightarrow \langle a, a \rangle$;

f) $f: P(A) \rightarrow \mathbf{N}, f(X) =$ количество элементов в X , \mathbf{N} - множество неотрицательных целых чисел, A - конечное множество.

Решение.

a) f - не сюръективно (не принимает значения меньше минимума функции), не инъективно (любое значение принимает в двух точках);

- b) f - сюръективно (так как $\lim f$ в $+\infty$ и $-\infty$ равен соответственно $+\infty$ и $-\infty$, т.е. функция пробегает все значения), не инъективна, так как $f(-1)=f(1)=0$;
- c) f - не сюръективна (так как всегда больше 0), инъективна (существует обратная функция на положительной оси);
- d) f - сюръективна, но не инъективна, так как любое целое число можно несколькими способами представить в виде суммы двух слагаемых;
- e) f - не сюръективна, инъективна;
- f) f - не сюръективна (значение $f(X)$ не может быть больше количества элементов в A), не инъективна, если A содержит более одного элемента (значения f совпадают на подмножествах a с одинаковым количеством элементов).

Задачи на отношения эквивалентности и порядка

1. Пусть отношение ρ определено на множестве N^2 (N - множество натуральных чисел $\{1,2,3,\dots\}$): $\langle x,y \rangle \rho \langle u,v \rangle \Leftrightarrow x+v = y+u$. Доказать, что ρ - отношение эквивалентности.

Доказательство. Для любого $\langle x,y \rangle \in N^2$ имеем $x+y = y+x \Rightarrow \rho$ рефлексивно.

Пусть $\langle x,y \rangle \rho \langle u,v \rangle \Rightarrow x+v = y+u \Rightarrow u+y = v+x \Rightarrow \langle u,v \rangle \rho \langle x,y \rangle \Rightarrow \rho$ симметрично. Пусть $\langle x,y \rangle \rho \langle u,v \rangle$ и $\langle u,v \rangle \rho \langle w,z \rangle \Rightarrow x+v = y+u$ и $u+z = v+w \Rightarrow$ (сложим два равенства почленно) $x+z = y+w \Rightarrow \langle x,y \rangle \rho \langle w,z \rangle \Rightarrow \rho$ транзитивно. Доказательство закончено.

2. Если ρ и φ - отношения эквивалентности на X , то $\rho \cup \varphi$ также отношение эквивалентности на X .

Доказательство. Для любого $x \in X$ имеем $\langle x,x \rangle \in \rho$ и $\langle x,x \rangle \in \varphi$ (из-за рефлексивности ρ и φ) $\Rightarrow \langle x,x \rangle \in \rho \cup \varphi \Rightarrow \rho \cup \varphi$ рефлексивно. Пусть $\langle x,y \rangle \in \rho \cup \varphi \Rightarrow \langle x,y \rangle \in \rho$ и $\langle x,y \rangle \in \varphi \Rightarrow \langle y,x \rangle \in \rho$ и $\langle y,x \rangle \in \varphi$ (из-за симметричности ρ и φ) $\Rightarrow \langle y,x \rangle \in \rho \cup \varphi \Rightarrow \rho \cup \varphi$ симметрично. Пусть $\langle x,y \rangle \in \rho \cup \varphi$ и $\langle y,z \rangle \in \rho \cup \varphi \Rightarrow \langle x,y \rangle \in \rho, \langle x,y \rangle \in \varphi, \langle y,z \rangle \in \rho, \langle y,z \rangle \in \varphi \Rightarrow \langle x,z \rangle \in \rho$ $\langle x,z \rangle \in \varphi$ (из-за транзитивности ρ и φ) $\Rightarrow \langle x,z \rangle \in \rho \cup \varphi \Rightarrow \rho \cup \varphi$ транзитивно $\Rightarrow \rho \cup \varphi$ - отношение эквивалентности.

3. Если ρ и φ - отношения эквивалентности на X , то $\rho \cap \varphi$ - отношение эквивалентности на $X \Leftrightarrow \rho \cap \varphi = \rho \downarrow \varphi$.

Доказательство. а) Пусть $\rho \cap \varphi$ - отношение эквивалентности на X , докажем, что $\rho \cap \varphi = \rho \downarrow \varphi$. Пусть $\langle x,y \rangle \in \rho \cap \varphi \Rightarrow \langle x,y \rangle \in \rho$ или $\langle x,y \rangle \in \varphi \Rightarrow$ для определенности будем считать, что $\langle x,y \rangle \in \rho$ (точно также доказывается в случае $\langle x,y \rangle \in \varphi$) $\Rightarrow \langle x,x \rangle \in \varphi$ (так как φ рефлексивно) и $\langle x,y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x,y \rangle \in \rho \downarrow \varphi$ (по определению композиции). В обратную сторону, $\langle x,y \rangle \in \rho \downarrow \varphi \Rightarrow$ существует такой $z \in X$, что $\langle x,z \rangle \in \varphi$ и $\langle z,y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x,z \rangle \in \varphi \cap \rho$ и $\langle z,y \rangle \in \rho \cap \varphi$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle \in \rho \cap \varphi$ (поскольку $\rho \cap \varphi$ - отношение эквивалентности, и, следовательно, транзитивно).

б) Пусть $\rho \cap \varphi = \rho \downarrow \varphi$ (поскольку ρ и φ входят в $\rho \cap \varphi$ симметричным образом, то также имеем $\rho \cap \varphi = \varphi \downarrow \rho$), докажем, что $\rho \cap \varphi$ - отношение эквивалентности на X . Имеем $(\rho \cap \varphi)^{-1} = (\rho \downarrow \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \downarrow \rho^{-1} = \varphi \downarrow \rho = \varphi \cap \rho = \rho \cap \varphi$
 $\Rightarrow \rho \cap \varphi$ симметрично (см. задачу 13 из примеров задач с отношениями).

Используя задачу 13, докажем транзитивность $\rho \cap \varphi$, для этого убедимся, что $(\rho \cap \varphi) \downarrow (\rho \cap \varphi) \subseteq \rho \cap \varphi$. Имеем, $(\rho \cap \varphi) \downarrow (\rho \cap \varphi) = (\rho \downarrow \varphi) \downarrow (\varphi \downarrow \rho) =$ (из-за ассоциативности композиции) $\rho \downarrow (\varphi \downarrow \rho) \downarrow \varphi = \rho \downarrow (\rho \downarrow \varphi) \downarrow \varphi = (\rho \downarrow \rho) \downarrow (\varphi \downarrow \varphi) = \rho \downarrow \varphi$. Осталось теперь доказать, что $\rho \cap \varphi$ рефлексивно. Пусть $x \in X \Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho$ и $\langle x, x \rangle \in \varphi$ (так как ρ и φ рефлексивны) $\Rightarrow \langle x, x \rangle \in \rho \cap \varphi$.

Доказательство закончено.

4. Если ρ - частичный порядок на X , то ρ^{-1} также частичный порядок на X .

Доказательство. а) Рефлексивность: $\langle x, x \rangle \in \rho \Leftrightarrow \langle x, x \rangle \in \rho^{-1}$.

б) Антисимметричность: пусть $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1}$ и $\langle y, x \rangle \in \rho^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ и $\langle x, y \rangle \in \rho \Rightarrow x = y$. в) Транзитивность: пусть $\langle x, y \rangle \in \rho^{-1}$ и $\langle y, z \rangle \in \rho^{-1} \Rightarrow \langle y, x \rangle \in \rho$ и $\langle z, y \rangle \in \rho \Rightarrow \langle z, x \rangle \in \rho \Rightarrow \langle x, z \rangle \in \rho^{-1}$.

5. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. На множестве $P(A)$ задано бинарное отношение $X \rho Y \Leftrightarrow$ "множества X и Y имеют равное количество элементов". Доказать, что это отношение эквивалентности и найдите классы эквивалентности.

Решение. Рефлексивность: $X \rho X$ для любого подмножества A . Симметричность: $X \rho Y \Leftrightarrow$ "множества X и Y имеют равное количество элементов" $\Leftrightarrow Y \rho X$. Транзитивность: $X \rho Y$ и $Y \rho Z \Leftrightarrow$ "множества X и Y имеют равное количество элементов" и "множества Z и Y имеют равное количество элементов" \Rightarrow "множества X и Z имеют равное количество элементов" $\Rightarrow X \rho Z$. Классы эквивалентности: $\{A\}$, $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, \emptyset .

6. Докажите, что $M = \{\{1\}, \{2, 5\}, \{3\}, \{4, 6, 7\}\}$ - разбиение множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Перечислите все элементы отношения эквивалентности ρ , соответствующего разбиению M .

Решение. Каждый элемент из A принадлежит какому-то элементу из M , причем только одному, следовательно, M - разбиение A . $\rho = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 4, 6 \rangle, \langle 6, 4 \rangle, \langle 6, 7 \rangle, \langle 7, 6 \rangle\}$.

7. Докажите, что отношение делимости на множестве натуральных чисел N является отношением частичного порядка. Является ли это отношение

линейным порядком? Является ли отношением частичного порядка отношение делимости на множестве целых чисел Z ?

Решение. Для краткости "а делит b (а делитель b)" будем писать $a|b$.

Рефлексивность: $a|a$. Антисимметричность: $a|b$ и $b|a \Rightarrow a = b$ (так как для натуральных чисел $a|b \Rightarrow a \leq b$). Транзитивность: $a|b$ и $b|c \Rightarrow a|c$.

Линейным порядком не является, так как, например, ложно $2|3$ и ложно $3|2$.

Отношение делимости на множестве целых чисел Z не является отношением частичного порядка - не выполнена антисимметричность: $1|-1$ и $-1|1$.

8. Построить линейный порядок: а) на множестве N^2 ; б) на множестве $N \cap N^2 \cap \dots \cap N^n \cap \dots = \{ \text{все конечные последовательности из натуральных чисел} \}$.

Решение. а) Определим отношение линейного порядка ρ на N^2 следующим образом: $\langle x, y \rangle \rho \langle z, w \rangle \Leftrightarrow (x < z) \vee (x = z) \wedge (y \leq w)$. б) Отношением частичного порядка на множестве всех конечных последовательностей натуральных чисел будет лексикографический порядок.

2.2. Варианты задания

Во всех задачах с множествами A , B , C и т. д. обозначают произвольные множества (если не оговорено противное).

Вариант 1

- Доказать тождество $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера-Венна):
 $A \in B$ и $B \in C \Rightarrow A \in C$.
- Доказать тождество $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.
- Доказать тождество $A \cap B = (A + B) \cap (A \cup B)$.
- Для бинарного отношения $X \rho Y \Leftrightarrow X \cup Y = \emptyset$, определенного на множестве подмножеств множества целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
- Для бинарного отношения ρ между элементами множеств $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{3\}\}$ ар $X \Leftrightarrow a \notin X$ найдите область определения D_ρ и область значений R_ρ .
- Докажите тождество $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
- Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \perp \rho$, $\rho^{-1} \perp \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow y = |x|$, определенного на множестве \mathbf{R} вещественных чисел.
- Докажите, что композиция инъективных отображений - инъективное отображение.

10. На множестве \mathbb{R} вещественных чисел задано отношение $a \rho b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.
Докажите, что это отношение эквивалентности и найдите классы эквивалентности.

Вариант 2

1. Пусть A, B, C - такие множества, что $B \subseteq A$, $A \cup C = \emptyset$. Найдите множество X , удовлетворяющее условиям $A \setminus X = B$ и $X \setminus A = C$.
2. Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера-Венна):
 $A \cup B \subseteq C$ и $A \cap B \subseteq C \Rightarrow A \cup C = \emptyset$.
3. Доказать тождество $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cap C) = (A \cup B) \setminus C$.
4. Доказать тождество $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
5. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow "y \text{ делится нацело на } x"$, определенного на множестве положительных целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \sqsubset \rho$, $\rho^{-1} \sqsubset \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow x \leq y+1$, определенного на множестве \mathbb{Z} целых чисел.
7. Пусть ρ и ϕ - бинарные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cup \phi)^{-1} = \rho^{-1} \cup \phi^{-1}$.
8. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \sqsubset \rho$, $\rho^{-1} \sqsubset \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, определенного на множестве \mathbb{Z} целых чисел.
9. Доказать, что отображение f удовлетворяет условию " $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ для любых A и B " $\Leftrightarrow f$ - инъективное отображение.
10. Для какого множества A (по числу элементов) множество-степень $P(A)$ относительно отношения \subseteq является линейно упорядоченным.

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$$

где A, B, C - данные множества: $B \subseteq A \subseteq C$.

2. Доказать, что $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B) \subseteq (C \setminus A)$.
3. Доказать, что $A + B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
4. Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера-Венна)
 $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.
5. Пусть ρ и ϕ - антисимметричные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cup \phi)^{-1}$ - антисимметричное отношение.

6. Пусть X - произвольное множество и $e_X = \{ \langle a, a \rangle \mid a \in X \}$. Докажите, что для любого бинарного отношения ρ между элементами множеств A и B выполняются равенства $e_B \mid \rho = \rho$ и $\rho \mid e_A = \rho$.
7. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow "x \text{ перпендикулярна } y"$, определенного на множестве всех прямых плоскости, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
8. Найдите композиции $\rho \mid \varphi$ и $\varphi \mid \rho$, где $\rho = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x + y = 0 \}$, $\varphi = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \times y > 0 \}$, \mathbb{R} - множество вещественных чисел.
9. Найдите $f(A)$, где $A = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 3 \}$ для следующих отображений: а) $f: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle$; б) $f: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle -y, -x \rangle$. Изобразите на плоскости множества A и $f(A)$.
10. На множестве S всех отображений R в R (R - множество вещественных чисел) определено отношение $f \rho g \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ и } g(x) = 0 \text{ для одних и тех же значений } x$. Доказать, что ρ - отношение эквивалентности и найдите классы эквивалентности.

Вариант 4

1. Доказать тождество $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \setminus C$.
2. Доказать тождество $(A \cap B) \cup A = A \cup B$.
3. Найдите множество X , удовлетворяющее условию $A \setminus X = A$ и $A \cap X = U$.
4. Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера-Венна): $(A \cup B) \cap (B \cup A) \subseteq B$.
5. Для бинарного отношения $X \rho Y \Leftrightarrow X \subset Y$, определенного на множестве всех подмножеств множества целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6. Найдите композиции $\rho \mid \varphi$ и $\varphi \mid \rho$, где $\rho = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x - y = 0 \}$, $\varphi = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \times y < 0 \}$, \mathbb{R} - множество вещественных чисел.
7. Покажите, что равенство $\rho \mid \varphi = \varphi \mid \rho$ верно не для любых бинарных отношений.
8. Пусть ρ и φ - бинарные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cap \varphi)^{-1} = \rho^{-1} \cap \varphi^{-1}$.
9. Пусть $f: A \rightarrow B$. Определим $f^*: P(B) \rightarrow P(A)$ так, что $f^*(Y) = \{ x \in A \mid f(x) \in Y \}$. Докажите, что $f^*(X \cup Y) = f^*(X) \cup f^*(Y)$.
10. На множестве всех отображений R в R (R - множество вещественных чисел) рассмотрим отношение $f \rho g \Leftrightarrow f^{-1}(\{0\}) \subseteq g^{-1}(\{0\})$. Является ли ρ отношением частичного порядка?

Вариант 5

1. Доказать, что $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B \cap C}$.
2. Доказать тождество $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
3. Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера-Венна)
 $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.
4. Найдите множество X , удовлетворяющее условию $A \cup X = \emptyset$ и $A \cap X = U$.
5. Пусть ρ, γ и ϕ - бинарные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cap \phi) \perp \gamma = (\rho \perp \gamma) \cap (\phi \perp \gamma)$.
6. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow x y > 1$, определенного на множестве R вещественных чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
7. Найдите отношения $\rho^{-1}, \rho \perp \rho, \rho^{-1} \perp \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ "у делится нацело на х и $x < y$ ", определенного на множестве N целых положительных чисел.
8. Найдите отношения $\rho^{-1}, \rho \perp \rho, \rho^{-1} \perp \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ "х параллельно у", определенного на множестве всех прямых на плоскости.
9. Доказать тождество для любой функции f
 $f^1(A \setminus B) = f^1(A) \setminus f^1(B)$.
10. На множестве N натуральных чисел задано бинарное отношение
 $a \rho b \Leftrightarrow$ "последняя цифра в десятичной записи числа а совпадает с последней цифрой числа b".
 Доказать, что ρ есть отношение эквивалентности. Сколько элементов в фактор- множестве N/ρ ?

Вариант 6

1. Доказать тождество $A \cap B = (A + B) + (A \cup B)$.
2. Доказать, что $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$.
3. Доказать тождество $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$.
4. Определить операции \cap и \setminus (каждую по отдельности) через операции $+$ и \cup .
5. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow x^2 = y$, определенного на множестве R вещественных чисел, определите область определения, область значений и изобразите на плоскости множество всех таких точек $\langle x, y \rangle$, что $x \rho y$.
6. Пусть ρ - бинарное отношение на некотором множестве. а) Докажите, что $(\rho^{-1}) = (\overline{\rho})^{-1}$. б) Для каких бинарных отношений справедливо $\rho^{-1} = \overline{\rho}$?
7. Найдите композиции $\rho \perp \phi$ и $\phi \perp \rho$, где $\rho = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x = y^2 \}$,
 $\phi = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid x \times y > 0 \}$, R - множество вещественных чисел.

8. Для бинарного отношения $x \text{ р } y \Leftrightarrow "x + y \text{ делится нацело на } 3"$, определенного на множестве Z целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
9. Найдите $f(A)$, где $A = \{ \langle x, y \rangle \in R \times R \mid y = 2x + 3 \}$ для следующих отображений: а) $f: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle x, -y \rangle$; б) $f: \langle x, y \rangle \rightarrow \langle y - 2, x + 2 \rangle$. Изобразите на плоскости множества A и $f(A)$.
10. Пусть A - непустое конечное множество. Рассмотрим отношение $X \text{ р } Y$ на подмножествах $A \Leftrightarrow "число элементов в X \text{ меньше или равно числу элементов в } Y"$. Является ли р отношением частичного порядка?

Вариант 7

1. Определить операции \cap и \cup (каждую по отдельности) через операции \setminus и $+$.
2. Доказать тождество $A + (A + B) = B$.
3. Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера-Венна): если $A \neq B$ и $B \neq C$, то $A \neq C$.
4. Доказать, что $A \cup B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = A + B$.
5. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \perp \rho$, $\rho^{-1} \perp \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \text{ р } y \Leftrightarrow "y - x \text{ есть целое число}"$, определенного на множестве R вещественных чисел.
6. Для бинарного отношения $\rho : a \text{ р } b \Leftrightarrow "b \text{ делится нацело на } a"$ между элементами множеств $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{12, 16\}$ найдите область определения D_ρ и область значений R_ρ .
7. Пусть ρ , γ и ϕ - бинарные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \cup \phi) \perp \gamma = (\rho \perp \gamma) \cup (\phi \perp \gamma)$.
8. Для бинарного отношения $x \text{ р } y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, определенного на множестве R вещественных чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
9. Даны отображения $R \rightarrow R$: $f: x \rightarrow \sin x$ и $g: x \rightarrow x^2$. Найдите $f \perp g$ и $g \perp f$.
10. На множестве всех отображений $R \rightarrow R$ (R - множество вещественных чисел) рассмотрим отношение $f \text{ р } g \Leftrightarrow "f(x) \leq g(x) \text{ для всех } x \in R"$. Является ли р отношением частичного порядка?

Вариант 8

1. Доказать тождество $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
2. Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера-Венна): если $A \subseteq B \cap C$ и $B \subseteq A \cap C$, то $B = \emptyset$.
3. Доказать тождество $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

4. Доказать тождество $A \setminus B = A + (A \cup B)$.
5. Для бинарного отношения $X \rho Y \Leftrightarrow X \cup Y \neq \emptyset$, определенного на множестве всех подмножеств множества целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
6. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \sqsubset \rho$, $\rho^{-1} \sqsubset \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ "x перпендикулярна y", определенного на множестве всех прямых на плоскости.
7. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow y = |x|$, определенного на множестве вещественных чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
8. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \sqsubset \rho$, $\rho^{-1} \sqsubset \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ "x - y делится нацело на 3", определенного на множестве \mathbb{Z} целых чисел.
9. Доказать тождество для любой функции f и произвольных множеств A и B $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
10. Перечислите всевозможные линейные порядки на множестве $\{1, 2\}$; на множестве $\{1, 2, 3\}$. (Линейный порядок - это множество упорядоченных пар определенного вида. Значит всевозможные линейные порядки на каком-то множестве - это множество множеств упорядоченных пар.)
Выскажите предположение о числе линейных порядков на множестве из n элементов.

Вариант 9

1. Доказать, что $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C) \subseteq (B \setminus C)$.
2. Доказать, что $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$.
3. Доказать, что $A + B = C \Leftrightarrow B + C = A \Leftrightarrow C + A = B$.
4. Доказать тождество $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
5. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \sqsubset \rho$, $\rho^{-1} \sqsubset \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ "x и y имеют общий делитель > 1 ", определенного на множестве положительных целых чисел.
6. Пусть ρ , γ и ϕ - бинарные отношения на некотором множестве. Докажите, что $(\rho \sqsubset \gamma) \setminus (\phi \sqsubset \gamma) \subseteq (\rho \setminus \phi) \sqsubset \gamma$.
7. Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \sqsubset \rho$, $\rho^{-1} \sqsubset \rho^{-1}$ для бинарного отношения $X \rho Y \Leftrightarrow X \cup Y = \emptyset$, определенного на множестве всех подмножеств множества целых чисел.
8. Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow$ "y делится нацело на x и $x < y$ ", определенного на множестве положительных целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
9. Пусть $f: x \rightarrow x^2$ и $g: x \rightarrow x+1$ - отображения \mathbb{R} в \mathbb{R} . Найдите $f \sqsubset g$ и $g \sqsubset f$.

10. Докажите, что если ρ - отношение эквивалентности на некотором множестве X , то ρ^{-1} - также отношение эквивалентности на X .

Вариант 10

- Доказать, что $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$. ($P(A)$ - множество всех подмножеств множества A).
- Следующее утверждение докажите или опровергните (опровергнуть можно на частном примере с помощью диаграммы Эйлера-Венна):
 $B = (A \cup B) \cap (B \cup A) \Rightarrow A = \emptyset$.
- Найдите множество X , удовлетворяющее следующим условиям
 $A \setminus (A \setminus X) = \emptyset$ и $A \cup X = \emptyset$.
- Определить операции \cup и \setminus (каждую по отдельности) через операции $+$ и \cap .
- Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow x \leq y + 1$, определенного на множестве Z целых чисел, выясните какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
- Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \mid \rho$, $\rho^{-1} \mid \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow 2x = 3y$, определенного на множестве Z целых чисел.
- Найдите отношения ρ^{-1} , $\rho \mid \rho$, $\rho^{-1} \mid \rho^{-1}$ для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$, определенного на множестве R вещественных чисел.
- Для бинарного отношения $x \rho y \Leftrightarrow "x \text{ и } y \text{ имеют наибольший общий делитель } 1"$, определенного на множестве N положительных целых чисел, выясните, какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность) и какими не обладает.
- Доказать, что если $A \subseteq D_f$ и $B \subseteq R_f$, то $f(A) \cup B = f(A \cup f^{-1}(B))$ для произвольного отображения f .
- Докажите, что отношение $\langle a, b \rangle \rho \langle c, d \rangle \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ есть отношение эквивалентности $R \times R$ (R - множество вещественных чисел). Найдите классы эквивалентности и изобразите их на координатной плоскости.

3. ВТОРОЕ КОНТРОЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Второе контрольное задание в основном посвящено решению задач из математической логики. Задание состоит из 10 задач: 4 задачи из логики высказываний, 4 задачи из логики предикатов, 1 задача о полных системах булевых функций и 1 задача на перевод из одной системы счисления в другую.

3.1. Примеры задач с решением

Рекомендуется разобраться в решениях всех задач, приведенных в примерах. Это поможет выполнить контрольное задание и компьютерную экзаменационную работу.

Задачи из логики высказываний

1. Записать составные высказывания в виде формул, употребляя высказывательные переменные для обозначения простых высказываний:
 - а) "Для того, чтобы x было нечетным, достаточно, чтобы x было простым";
 - б) "Если идет дождь, то дует ветер".

Решение. а) Имеем формулу $B \supset A$, где $A \equiv "x \text{ нечетно}"$, $B \equiv "x \text{ простое}"$.

б) Имеем формулу $B \supset A$, где $A \equiv "дует ветер"$, $B \equiv "идет дождь"$.

2. Обосновать метод доказательства "разбором случаев": для того, чтобы доказать формулу $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \supset B$ необходимо и достаточно доказать формулу $(A_1 \supset B) \& (A_2 \supset B) \& \dots \& (A_n \supset B)$.

Решение. Пусть формула $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \supset B$ ложна (то, что мы начинаем доказательство, предполагая, что формула ложна, а не истинна, продиктовано тем обстоятельством, что при этом выборе доказательство короче), тогда имеем B ложна, а $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ истинна. Следовательно, существует такое i ($1 \leq i \leq n$), что A_i истинна и, поэтому, $A_i \supset B$ ложна. Отсюда следует, формула $(A_1 \supset B) \& (A_2 \supset B) \& \dots \& (A_n \supset B)$ ложна.

В обратную сторону. Пусть формула $(A_1 \supset B) \& (A_2 \supset B) \& \dots \& (A_n \supset B)$ ложна.

Следовательно, существует такое i ($1 \leq i \leq n$), что $A_i \supset B$ ложна. Отсюда получаем, что A_i истинна и B ложна и, следовательно, $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ истинна и, наконец, $(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n) \supset B$ ложна.

3. Что можно сказать об истинностном значении высказывания $(\neg p \& \neg q) \sim (p \vee q)$, если $p \supset q$ ложно?

Решение. $p \supset q$ ложно $\Rightarrow p$ истинно, q ложно \Rightarrow формула $\neg p \& \neg q$ ложна, формула $p \vee q$ истинна \Rightarrow высказывание $(\neg p \& \neg q) \sim (p \vee q)$ ложно.

4. Проверьте, что формула $((p \supset q) \& p) \supset q$ является тавтологией.

Решение. Простой метод доказательства, это использовать таблицу истинности. В данном случае эта таблица небольшая, но когда высказывательных переменных много - такой подход трудоемок. В любом случае желательно использовать метод доказательства от противного. Вы предполагаете, что формула ложна и, делая отсюда выводы, приходите к противоречию или определяете значения переменных, при которых формула ложна.

Пусть $(p \supset q) \& p \supset q$ ложно $\Rightarrow (p \supset q) \& p$ истинно и q ложно $\Rightarrow p \supset q$, p - истинные формулы, q ложно. Но если p - истинно, а q ложно, то $p \supset q$ должно быть ложно. Пришли к противоречию ($p \supset q$ одновременно истинно и ложно), следовательно, исходная формула всегда истинна, т. е. тавтология.

5. Является ли тавтологией формула $((p \supset q) \& (\neg r \supset \neg q) \& (t \supset \neg r)) \supset (p \supset \neg t)$?

Решение. Предположим, что формула $((p \supset q) \& (\neg r \supset \neg q) \& (t \supset \neg r)) \supset (p \supset \neg t)$ ложна $\Rightarrow (p \supset q) \& (\neg r \supset \neg q) \& (t \supset \neg r)$ истинно, $p \supset \neg t$ ложно $\Rightarrow p \supset q$, $\neg r \supset \neg q$, $t \supset \neg r$ - истинные формулы, p истинно и $\neg t$ ложно $\Rightarrow p \supset q$, $\neg r \supset \neg q$, $t \supset \neg r$ - истинные формулы, p и t истинны $\Rightarrow q$, $\neg r$, p , t , $\neg r \supset \neg q$ - истинные формулы $\Rightarrow \neg r \supset \neg q$ ложно. Пришли к противоречию, следовательно исходная формула - тавтология.

6. Доказать выполнимость формулы $\neg(p \supset \neg p)$.

Решение. $\neg(p \supset \neg p) \equiv \text{И} \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg p) \equiv \text{И} \Leftrightarrow \neg(\neg p) \equiv \text{И} \Leftrightarrow p \equiv \text{И}$. Следовательно, формула выполнима при значении $p \equiv \text{И}$.

7. При каких значениях переменных x, y, z формула

$((x \supset (y \& z)) \supset (\neg y \supset \neg x)) \supset \neg y$ ложна?

Решение. $((x \supset (y \& z)) \supset (\neg y \supset \neg x)) \supset \neg y \equiv \text{Л} \Leftrightarrow (x \supset (y \& z)) \supset (\neg y \supset \neg x) \equiv \text{И}$, $\neg y \equiv \text{Л}$
 \Leftrightarrow а) $x \supset (y \& z) \equiv \text{Л}$, $\neg y \equiv \text{Л}$; б) $\neg y \supset \neg x \equiv \text{И}$, $\neg y \equiv \text{Л} \Leftrightarrow$ а) $x \equiv \text{И}$, $y \& z \equiv \text{Л}$, $y \equiv \text{И}$;

б) $y \equiv \text{И} \Leftrightarrow$ а) $x \equiv \text{И}$, $z \equiv \text{Л}$, $y \equiv \text{И}$; б) $y \equiv \text{И} \Leftrightarrow y \equiv \text{И}$. Следовательно, при $y \equiv \text{И}$ и для любых значений x и z формула ложна, других вариантов нет.

8. Доказать, что $A \sim B \equiv \neg A \sim \neg B$.

Решение. Имеем $A \sim B \equiv (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B)$. С другой стороны, используя ту же равносильность, $\neg A \sim \neg B \equiv (\neg A \& \neg B) \vee (\neg \neg A \& \neg \neg B) \equiv (\neg A \& \neg B) \vee (A \& B)$. Следовательно, $A \sim B \equiv \neg A \sim \neg B$.

9. Построить формулу от трех переменных, которая истинна в том и только том случае, когда ровно две переменные ложны.

Решение: $(\neg x \& \neg y \& z) \vee (\neg x \& y \& \neg z) \& (x \& \neg y \& \neg z)$.

10. Выразить $A \vee B$ через A, B и символ \supset .

Решение: $A \vee B \equiv (A \supset B) \supset B$.

11. Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или кино, а если будет хорошая погода - пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика не выполнено? Запишите формулу истинную тогда и только тогда, когда решение мальчика не выполнено (отрицания должны содержаться лишь в простых высказываниях).

Решение. Введем простые высказывания:

$A \equiv$ "закончил чтение книги"; $B \equiv$ "сходил в музей"; $C \equiv$ "сходил в кино";

$D \equiv$ "стоит хорошая погода"; $E \equiv$ "искупался на реке".

Утверждение о том, что мальчик выполнил решение представляется формулой $A \& (B \vee C) \& (D \supset E)$. Отрицание этой формулы означает, что мальчик решение не выполнил. Имеем $\neg(A \& (B \vee C) \& (D \supset E)) \equiv \neg A \vee \neg(B \vee C) \vee \neg(D \supset E) \equiv \neg A \vee (\neg B \& \neg C) \vee (D \& \neg E)$. Последняя формула является искомой.

12. Преобразовать к ДНФ формулу $\neg(x \vee y) \& (x \supset y)$.

Решение. $\neg(x \vee y) \& (x \supset y) \equiv$ (освобождаемся от \supset) $\neg(x \vee y) \& (\neg x \vee y) \equiv$ (делаем "тесные" отрицания) $\neg x \& \neg y \& (\neg x \vee y) \equiv$ (используем дистрибутивность) $(\neg x \& \neg y \& \neg x) \vee (\neg x \& \neg y \& y) \equiv$ (упрощаем) $\neg x \& \neg y$. Получилась одночленная дизъюнкция. Эта же формула является и КНФ.

13. Подозреваются в совершении преступления Жане и Пьер. На суде выступили четыре свидетеля со следующими заявлениями:

- 1) Пьер не виноват;
- 2) Жане не виноват;
- 3) из первых двух показаний по меньшей мере одно истинно;
- 4) показания третьего свидетеля ложны.

Следствие установило, что четвертый свидетель прав. Кто преступники?

Решение. Простые высказывания "Пьер виноват" и "Жане виноват" обозначим высказывательными переменными P и G . Тогда показания свидетелей представляются формулами: 1) $\neg P$; 2) $\neg G$; 3) $\neg P \vee \neg G$; 4) $\neg(\neg P \vee \neg G)$. Имеем $\neg(\neg P \vee \neg G) \equiv I \Rightarrow \neg\neg P \& \neg\neg G \equiv I \Rightarrow P \& G \equiv I \Rightarrow$ Пьер и Жане оба виноваты в преступлении.

Задачи из логики предикатов

1. Пусть даны предикаты на множестве целых чисел

$E(x) \equiv$ "x - четное число" и $D(x, y) \equiv$ "y делится на x"

Переведите на обычный язык формулу

$$\exists x(E(x) \vee D(6, x)).$$

Перевод: существует такой x , что x - четное число или делится на 6.

2. Пусть даны предикаты на множестве натуральных чисел:

$D(x, y) \equiv$ "у делится на x ";

$I(x, y) \equiv$ "х равно у";

$P(x) \equiv$ "х - простое число".

Переведите на обычный язык формулу

$$\forall x (\neg I(1, x) \supset \exists y (P(y) \& D(y, x))).$$

Перевод: если $x \neq 1$, то существует y - простой делитель x .

3. Пусть даны предикаты на множестве натуральных чисел:

$D(x, y) \equiv$ "у делится на x ";

$P(x) \equiv$ "х - простое число".

Переведите на обычный язык формулы:

а) $\forall x (P(x) \supset \neg D(2, x))$;

б) $\forall x \forall y (\neg P(x) \supset D(x, y))$

и ответьте истинны они или нет.

Решение. а) Любое простое число не делится на 2. Утверждение ложно.

б) Любое не простое число делится на любое число. Утверждение ложно.

4. Пусть даны предикаты на множестве натуральных чисел:

$D(x, y) \equiv$ "у делится на x ";

$G(x, y, z) \equiv$ "z - наибольший общий делитель x и y ".

Запишите утверждения на языке логики предикатов:

а) "если x делится на y и y делится на z , то x делится на z ";

б) "если d - наибольший общий делитель a и b , то a и b делятся на d и d делится на любой общий делитель a и b ".

Решение. а) $\forall x \forall y \forall z (D(y, x) \& D(z, y) \supset D(z, x))$.

б) $\forall a \forall b \forall d (G(a, b, d) \supset (D(d, a) \& D(d, b) \& (\forall c ((D(c, a) \& D(c, b)) \supset D(c, d))))$.

5. Пользуясь знаками арифметических операций (+, \times) и отношений ($<$, $=$)

запишите на языке логики предикатов следующие высказывания о действительных числах:

а) "если произведение двух чисел равно 0, то хотя бы один из сомножителей равен 0";

б) "система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

не имеет решения";

в) "существует ровно одно положительное значение квадратного корня из положительного число".

Решение. а) $\forall x \forall y ((x \times y = 0) \supset ((x = 0) \vee (y = 0)))$.

б) $\neg \exists x \exists y ((x + y = 1) \& (2 \times x + 2 \times y = 0))$.

в) $\forall x \exists y (((0 > x) \& (0 < y) \& (y \times y = x) \& \forall z (((0 < z) \& (z \times z = x)) \supset (z = y))))$.

6. Пользуясь знаками арифметических операций (+, ×) и отношений (<, =), каждое из следующих высказываний запишите при помощи логических символов, определите, истинное оно или ложное:

а) "существует такое целое x , что $x^2 - 4 = 0$ ";

б) "для любых действительных чисел x и y , если $x < y$ и $y \neq 0$, то $x/y < 1$ ".

Решение. а) $\exists x (x \times x = 4)$. Утверждение истинное. б) $\forall x \forall y \forall z (((x < y) \& (y \neq 0) \& (z \times y = x)) \supset (z < 1))$. Утверждение истинное.

7. Используя только предикаты " $x = y$ " и $D(x, y) \equiv$ "у делится на x ", запишите при помощи логических символов следующие формулы от переменных, принимающих натуральные значения:

а) " x - простое число";

б) " a и b - взаимно простые числа".

Решение. а) $\neg (x = 1) \& (\forall y (D(y, x) \supset ((y = 1) \vee (x = y))))$.

б) $\neg \forall d ((D(d, a) \& D(d, b) \& \neg (d = 1)))$.

8. На множестве натуральных чисел заданы предикаты $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$ и $P(x, y, z) \equiv "x \times y = z"$.

а) Записать формулу с двумя свободными переменными - истинную тогда и только тогда, когда x и y являются простыми числами-близнецами.

б) Записать предложение, выражающее не существование 1.

в) Записать высказывание, выражающее бесконечность множества простых чисел-близнецов.

Решение.

Формула $F_1(x) = \forall y P(x, y, y)$ выражает предикат " $x = 1$ ".

Формула $F_2(x, y) = \exists z P(x, z, y)$ выражает предикат " $x < y$ ".

Формула $F_3(x) = \neg F_1(x) \& (\forall y \forall z (P(y, z, x) \supset (F_1(y) \vee F_1(z))))$ выражает предикат " x - простое число".

Формула $F_4(x) = \forall y F_1(y) \& S(y, y, x)$ выражает предикат " $x = 2$ ".

а) $F(x, y) = F_3(x) \& F_3(y) \& (\forall z F_4(z) \supset (S(z, x, y) \vee S(z, y, x)))$.

б) $\neg \exists x F_1(x)$.

в) $\forall x \exists y \exists z F_2(x, y) \& F_2(x, z) \& F(y, z)$.

9. Пусть на некотором универсальном множестве U задан предикат $Q(x,y) \equiv "x \subseteq y"$. Запишите, что "множество x есть пересечение множеств y и z ".

Решение: $\forall w ((Q(y,w) \& Q(z,w)) \supset Q(x,w))$.

Задача о полной системе булевых функций

Дано множество - система булевых функций, нужно показать, что все остальные функции можно выразить через функции из данной системы. Для этого достаточно показать, что основные функции \neg , \wedge , \vee выражаются в этой системе. См. в лекциях (раздел 3.1) вывод того, что одноэлементное множество из функции Пирса является полной системой.

В качестве еще одного примера: $\{\neg, f\}$, где $f(x,y) = x \wedge \neg y$, - полная система. Действительно:

$$x \wedge y = f(x, \neg y);$$

$$x \vee y = \neg f(\neg x, y).$$

В задаче о переводе числа из одной системы счисления в другую достаточно сообщить только ответ.

3.2. Варианты задания

Вариант 1

- Докажите тавтологию $(p \supset q) \supset ((p \& r) \supset (q \& r))$.
- Докажите тавтологию $((p \& q) \supset) \sim (p \supset (q \supset r))$.
- Докажите тавтологию $(A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$.
- Докажите равносильность (без таблицы истинности):
 $\neg(A \supset B) \equiv A \& \neg B$.
- На множестве натуральных чисел заданы предикаты $S(x,y,z) \equiv "x + y = z"$ и $P(x,y,z) \equiv "x \times y = z"$. Запишите высказывание, выражающее конечность множества простых чисел.
- Пользуясь знаками чисел, арифметических операций $(+, \times)$ и отношения $"="$ запишите на языке логики предикатов следующее утверждение:
 "Уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет в точности два различных корня".
- На множестве целых положительных чисел заданы предикаты:
 $P(x) \equiv "x - \text{простое число}"; D(x,y) \equiv "y \text{ делится на } x"$.
 Переведите на обычный язык $\forall x \exists y (P(y) \& \neg D(y,x))$. Это высказывание истинно или ложно?

8. Пользуясь знаками арифметических операций $(+, \times)$ и отношения " $<$ " запишите на языке логики предикатов следующее утверждение:
"Существуют такие числа, что их сумма больше их произведения".
9. Докажите, что $\{\}, "|"$ - штрих Шеффера, $x | y = \neg(x \wedge y)$, - полная система булевых функций.
10. Перевести число 1ca_{16} из системы счисления по основанию 16 в систему счисления по основанию 13.

Вариант 2

1. Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset \neg s$, если $p \supset q \equiv \text{И}$, $\neg s \supset \neg q \equiv \text{Л}$.
2. При каких значениях переменных формула $(x \& y) \vee (x \& z) \vee (y \& z) \vee (u \& w) \vee (v \& w) \vee (\neg x \& \neg u)$ ложна?
3. Доказать тавтологию $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.
4. Доказать тавтологию $((p \supset q) \& p) \supset q$.
5. Пусть на множестве натуральных чисел определены предикаты:
 $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$;
 $G(x, y) \equiv "числа x \text{ и } y - \text{взаимно просты, т. е. наибольший общий делитель } x \text{ и } y \text{ равен } 1"$;
 $P(x, y, z) \equiv "x \times y = z"$.
 Запишите на языке логики предикатов: "Если число делится на два взаимно простых числа, то оно делится на их произведение".
6. Пусть на множестве натуральных чисел определены следующие предикаты $P(x) \equiv "x - \text{простое число}"$ и $"x \leq y"$. Запишите на языке логики предикатов следующее утверждение: "2 - наименьшее простое число".
7. На множестве целых положительных чисел задан предикат $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$. Переведите на обычный язык $\forall x \forall y \forall z ((D(x, z) \& D(y, z)) \supset D(x \times y, z))$.
 Это высказывание истинное или ложное?
8. На множестве натуральных чисел заданы предикаты $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$ и $P(x, y, z) \equiv "x \times y = z"$.
 Записать формулу с тремя свободными переменными x, y, z - истинную тогда и только тогда, когда z есть наименьшее общее кратное x и y .
9. Докажите, что $\{\circ\}, "\circ"$ - функция Вебба, $x \circ y = \neg x \vee \neg y$, - полная система булевых функций.
10. Перевести число 3db_{14} из системы счисления по основанию 14 в систему счисления по основанию 20.

Вариант 3

1. Доказать тавтологию $((p \supset q) \& (r \supset s)) \supset ((p \vee r) \supset (q \vee s))$.
2. Доказать выполнимость $(Q \supset (P \& R)) \& \neg((P \vee R) \supset Q)$.

3. Доказать равносильность (без таблиц истинности)
 $A \& (A \vee C) \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$.
4. Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset (\neg r \supset \neg q)$, если $p \supset (q \supset r)$ имеет значение истина?
5. На множестве натуральных чисел заданы предикаты $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$ и $P(x, y, z) \equiv "x \times y = z"$.
 Записать формулу, выражающую существование наибольшего общего делителя для чисел, отличных от нуля.
6. Пусть на некотором универсальном множестве U задан предикат $Q(x, y) \equiv "x \subseteq y"$. Запишите, что множество z есть объединение множеств y и x .
7. На множестве целых положительных чисел задан предикат $D(x, y) \equiv "y$ делится на $x"$. Переведите на обычный язык
 $\forall x (D(2, x) \supset \forall y (D(x, y) \supset D(2, y)))$.
 Это высказывание истинное или ложное?
8. Используя только предикаты $"x=y"$ и $D(x, y) \equiv "y$ делится на $x"$, запишите при помощи логических символов следующую формулу от переменных, принимающих натуральные значения: " x имеет ровно два различных простых делителя".
9. Представить многочленом Жегалкина: а) $x \supset y$, б) $x \sim y$.
10. Перевести число $1d2_{19}$ из системы счисления по основанию 19 в систему счисления по основанию 11.

Вариант 4

1. Доказать тавтологию $\neg(p \sim q) \sim (\neg(p \supset q) \vee \neg(q \supset p))$.
2. Доказать тавтологию $((A \supset B) \supset A) \supset A$.
3. Формула $(p \supset q) \& (q \supset r) \& \neg(p \supset r)$ - тавтология, противоречие или не то и не другое?
4. Доказать тавтологию $((p \supset q) \& (r \supset q)) \sim ((p \vee r) \supset q)$.
5. Пользуясь знаками арифметической операций " \times " и отношения " $=$ " запишите на языке логики предикатов следующее утверждение: "Обе части равенства можно разделить на число отличное от нуля".
6. Следующее высказывание запишите при помощи логических символов, определите, истинно оно или ложно: "Для любого действительного числа x существует такое действительное число y , что $y^2 = x$ ".
7. Пусть на множестве целых чисел заданы предикаты: $D(x, y) \equiv "y$ делится на $x"$, $P(x) \equiv "x$ - простое число" и $"x=y"$. Переведите на обычный язык
 $\forall x \forall y ((P(y) \& D(x, y)) \supset ((x=y) \& (x=1)))$.
8. Пользуясь знаками арифметической операций " \times " и отношений ($=, <$) запишите на языке логики предикатов следующее утверждение: "Из любого положительного числа можно извлечь квадратный корень, причем существует два различных значения корня".
9. Докажите, что $\{\supset, \neg\}$ - полная система булевых функций.

10. Перевести число $9b_{15}$ из системы счисления по основанию 15 в систему счисления по основанию 16.

Вариант 5

- Доказать равносильности (не используя основные равносильности):
 - $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$;
 - $A \& B \equiv \neg(A \supset \neg B) \equiv (\neg(\neg A \vee \neg B))$.
- При каких значениях переменных формула $((x \vee y) \& ((y \vee z) \& (z \vee x))) \supset ((x \& y) \& z)$ ложна?
- Формула $((p \supset q) \& (p \vee r) \& \neg r) \supset \neg p$ является ли тавтологией?
- Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset v$, если формулы $(p \vee q) \supset (r \vee s)$ и $(s \vee r) \supset v$ истинны?
- На множестве натуральных чисел заданы предикаты $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$ и $P(x, y, z) \equiv "x \times y = z"$.
Записать высказывание, выражающее то, что всякое четное число, большее 2, есть сумма двух простых чисел.
- Пусть на некотором универсальном множестве U задан предикат $Q(x, y) \equiv "x \subseteq y"$. Запишите, что множество x равно универсальному множеству U .
- Пусть на множестве натуральных чисел заданы предикаты:
 $E(x) \equiv "x - \text{четное число}"$;
 $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$;
 $P(x) \equiv "x - \text{простое число}"$.
 Переведите на обычный язык $\forall x (P(x) \supset \exists y (E(y) \& D(x, y)))$.
- Пусть на множестве натуральных чисел заданы предикаты:
 $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$;
 $S(x, y) \equiv "x \text{ равно } y"$.
 Запишите на языке логики предикатов следующее утверждение: "Два числа, делящиеся друг на друга совпадают".
- Докажите, что $\{+, \vee, 1\}$ - полная система булевых функций.
- Перевести число $2g0_{17}$ из системы счисления по основанию 17 в систему счисления по основанию 11.

Вариант 6

- Доказать тавтологию $A \supset (B \supset A)$.
- Является ли формула $((p \supset (q \supset r)) \& (\neg t \vee p) \& \neg q) \supset (t \supset r)$ тавтологией?
- Является ли формула $((p \supset q) \& (q \supset p) \& (p \vee r) \& \neg r) \supset p$ тавтологией?
- Формула $((p \supset q) \supset p) \supset p$ - тавтология, противоречие или не то и не другое?
- Пользуясь знаками чисел, арифметических операций $(+, \times)$ и отношения $"="$ запишите на языке логики предикатов следующее утверждение:
 "Сумма любого числа, отличного от нуля, с обратным к нему числом больше 2".
- Пусть на множестве натуральных чисел заданы предикаты:

$P(x) \equiv "x - \text{простое число}";$

$D(x,y) \equiv "y \text{ делится на } x";$

$S(x,y) \equiv "x \text{ равно } y".$

Запишите на языке логики предикатов следующее утверждение: "Простое число, отличное от 2, нечетно".

7. Пусть на множестве натуральных чисел заданы предикат $D(x,y) \equiv "y \text{ делится на } x"$. Переведите на обычный язык формулу $\forall x \forall y \forall z (D(x \times y, z) \supset (D(x, z) \& D(y, z)))$. Это высказывание истинно или ложно?
8. Пользуясь знаками чисел, арифметической операции " \times " и отношений ($=$, $<$) запишите на языке логики предикатов следующее утверждение: "Квадрат любого числа, отличного от 0, положителен".
9. Докажите, что $\{\supset, 0\}$ - полная система булевых функций.
10. Перевести число bh_{18} из системы счисления по основанию 18 в систему счисления по основанию 15.

Вариант 7

1. Доказать тавтологию $(\neg(p \supset q)) \sim (p \& \neg q)$.
2. Доказать тавтологию $((p \supset q) \vee (r \supset s)) \supset ((p \& r) \supset (q \vee s))$.
3. При каких значениях переменных формула $((x \vee y) \vee z) \supset ((x \vee y) \& (x \vee z))$ ложна?
4. Доказать эквивалентность $\neg(A \supset B) \sim (A \& \neg B)$.
5. На множестве натуральных чисел заданы предикат $S(x,y,z) \equiv "x + y = z"$. Записать высказывание, выражающее ассоциативность сложения (эта формула не должна содержать свободных переменных).
6. На множестве натуральных чисел задан предикат $D(x,y) \equiv "y \text{ делится на } x"$. Переведите на обычный язык формулу $\forall x \forall y \forall z (D(x, y+z) \sim \supset (D(x, y) \& D(x, z)))$.
7. Пусть на некотором универсальном множестве U задан предикат $Q(x,y) \equiv "x \subseteq y"$. Запишите на языке логики предикатов, что множество x пусто.
8. Пользуясь знаками чисел, арифметических операций ($+$, \times) и отношения "=", запишите на языке логики предикатов следующее высказывание: "Для любого целого x существует такое целое y , что $x=2y$ или $x=2y+1$ ". Это высказывание истинное или ложное?
9. Докажите, что $\{\supset, \not\supset\}$, где $x \not\supset y = \neg(y \supset x)$, - полная система булевых функций.
10. Перевести число $2db_{15}$ из системы счисления по основанию 15 в систему счисления по основанию 17.

Вариант 8

1. Доказать тавтологию $((A \vee B) \& (A \vee C) \& (B \vee D) \& (C \vee D)) \sim ((A \& D) \vee (B \& C))$.

2. Является ли формула $((p \sim q) \& (p \vee r) \& \neg r) \supset (\neg q \supset r)$ тавтологией?
3. Что можно сказать об истинностном значении высказывания $p \supset \neg t$, если формулы $p \supset q$, $\neg s \supset \neg q$ и $t \supset \neg s$ истинны?
4. Доказать тавтологию $((p \supset q) \& (r \supset s)) \supset ((p \& r) \supset (q \& s))$.
5. На множестве натуральных чисел заданы предикаты $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$ и $P(x, y, z) \equiv "x \times y = z"$.
Записать высказывание, выражающее дистрибутивность сложения относительно умножения (эта формула не должна содержать свободных переменных).
6. На множестве натуральных чисел заданы предикаты $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$ и $E(x) \equiv "x - \text{четное число}"$.
Переведите на обычный язык формулу $\forall x (\neg E(x) \supset \neg D(2, x))$.
7. На множестве натуральных чисел задан предикат $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$.
Запишите утверждение на языке логики предикатов: "Если a и b делятся на c , то $a+b$ и $a-b$ делятся на c ".
8. Пользуясь знаками чисел, арифметических операций $(+, \times)$ и отношения "=", запишите на языке логики предикатов следующее высказывание:
Можно найти числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$
9. Докажите, что $\{0, 1, g\}$, где $g(x, y, z) = (y \& x) \vee (\neg y \& z)$, - полная система булевых функций.
10. Перевести число 224_{19} из системы счисления по основанию 19 в систему счисления по основанию 12.

Вариант 9

1. Является ли формула $((p \supset q) \& (q \supset r) \& (\neg t \vee p) \& r) \supset (t \supset q)$ тавтологией?
2. Доказать равносильность (без таблицы истинности) $A \vee (\neg A \& B) \equiv A \vee B$.
3. При каких значениях переменных формула $(X \vee Y) \supset ((\neg X \& Y) \vee (X \& \neg Y))$ ложна?
4. Является ли формула $((p \vee) \& (p \supset r) \& (q \supset t)) \supset (r \vee t)$ тавтологией?
5. На множестве натуральных чисел заданы предикат $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$.
Записать высказывание, выражающее существование наибольшего натурального числа.
6. На множестве натуральных чисел заданы предикат $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$.
Записать высказывание, выражающее то, что для всякого числа существует строго меньшее число.
7. На множестве натуральных чисел заданы предикаты $E(x) \equiv "x - \text{четное число}"$ и $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$.
Переведите на обычный язык формулу $\forall x (D(92, x) \supset E(x))$.

8. Пользуясь знаками отношений ($<$, $=$, \leq), запишите на языке логики предикатов следующее высказывание о действительных числах: "Для всякого числа x существуют два различных числа, превосходящих x ".
9. Докажите, что $\{\sim, \vee, 0\}$ - полная система булевых функций.
10. Перевести число $5a4_{12}$ из системы счисления по основанию 12 в систему счисления по основанию 14.

Вариант 10

1. Доказать равносильности (не используя основные равносильности):
а) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B$; б) $A \equiv (A \vee B) \& (A \vee \neg B)$.
2. Доказать тавтологию $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$.
3. Доказать тавтологию $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.
4. Доказать тавтологию $(A \supset (B \supset (C \supset C))) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset (C \supset C)))$.
5. На множестве натуральных чисел заданы предикаты $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$ и $P(x, y, z) \equiv "x \times y = z"$.
Записать высказывание, выражающее то, что всякое число можно представить в виде суммы двух квадратов.
6. На множестве натуральных чисел заданы предикаты $S(x, y, z) \equiv "x + y = z"$ и $P(x, y, z) \equiv "x \times y = z"$.
Записать высказывание, выражающее бесконечность множества простых чисел.
7. На множестве натуральных чисел заданы предикаты:
 $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$;
 $P(x) \equiv "x - \text{ простое число}"$;
 $S(x, y) \equiv "x \text{ равно } y"$.
Запишите на языке логики предикатов следующее утверждение: "Любое число, отличное от 1, имеет хотя бы один простой делитель".
8. На множестве натуральных чисел заданы предикаты:
 $D(x, y) \equiv "y \text{ делится на } x"$;
 $E(x) \equiv "x - \text{ четное число}"$;
 $P(x) \equiv "x - \text{ простое число}"$;
 $S(x, y) \equiv "x \text{ равно } y"$
Переведите на обычный язык формулу
 $\exists x (E(x) \& P(x) \& (\forall y ((E(y) \& P(y)) \supset S(x, y))))$.
9. Докажите, что $\{\sim, \wedge, 0\}$ - полная система булевых функций.
10. Перевести число $9b_{20}$ из системы счисления по основанию 20 в систему счисления по основанию 15.