



*Томский межвузовский центр  
дистанционного образования*

**А.Г. Карпов**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ**

## **Часть 2**

Учебное пособие

**ТОМСК – 2002**

Министерство образования Российской Федерации

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)**

**Кафедра компьютерные системы в управлении  
и проектировании (КСУП)**

**А.Г. Карпов**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ СИСТЕМ**

## **Часть 2**

**Учебное пособие**

**2002**

**Карпов А.Г.**

Математические основы теории систем. Часть 2: Учебное пособие. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2002. – 138 с.

В данном учебном пособии продолжено изложение основ математического описания систем. Приведено описание систем в виде обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка. Рассмотрены основные интегральные преобразования, применяемые в теории систем. Изложены основы теории линейно-разностных уравнений и соответствующих преобразований для их анализа. Даны сведения из линейной алгебры и теории матриц, непосредственно связанные с изучением теории систем и рассмотрено математическое описание систем в пространстве состояний. Также представлены уравнения систем в форме уравнений Лагранжа и Гамильтона, необходимые при дальнейшем изучении оптимальных систем.

Учебное пособие предназначено для студентов, использующих любые формы обучения, в том числе с применением дистанционных образовательных технологий.

© Карпов Александр Георгиевич, 2002

© Томский межвузовский центр  
дистанционного образования, 2002

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	5
1. Операторное описание непрерывных систем .....	6
1.1 Дифференциальные уравнения динамики систем .....	6
1.2 Общие свойства линейных дифференциальных уравнений .....	9
1.3 Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами .....	10
1.3.1 Однородные уравнения .....	10
1.3.2 Неоднородные уравнения .....	12
1.3.3 Вычисление постоянных интегрирования .....	15
1.4 Ряды Фурье и интегральное преобразование Фурье .....	16
1.5 Преобразования Лапласа, Карсона, Хевисайда .....	20
1.5.1 Определение преобразований .....	20
1.5.2 Свойства преобразования Лапласа .....	22
1.5.3 Преобразование Лапласа и дифференциальные уравнения ..	27
1.6 Другие интегральные преобразования .....	32
1.6.1 Разложение произвольных функций по элементарным функциям .....	32
1.6.2 Преобразование Меллина .....	33
1.6.3 Преобразование Бесселя .....	34
1.6.4 Преобразование Гильберта .....	36
1.6.5 Преобразование Лагерра .....	37
2. Операторное описание дискретных по времени систем .....	38
2.1 Прямой и обратный разностные операторы .....	38
2.2 Разностные линейные уравнения динамики .....	42
2.3 Дискретное преобразование Лапласа .....	49
2.4 Z- преобразование .....	53
2.4.1 Определение z- преобразования .....	53
2.4.2 Обратное z- преобразование .....	54
2.4.3 Свойства z- преобразования .....	57
2.5 Разностные уравнения и z- преобразование .....	62
3. Матрицы и линейные пространства .....	64
3.1 Основные типы матриц и операции над ними .....	64
3.1.1 Общие понятия .....	64
3.1.2 Простейшие операции .....	65
3.1.3 Определители, миноры и алгебраические дополнения .....	66
3.1.4 Присоединенная и обратная матрицы .....	68
3.2 Векторы и векторные пространства .....	70
3.2.1 Векторы и их свойства .....	70
3.2.2 Векторное пространство и подпространство .....	73
3.2.3 Базис векторного пространства .....	74
3.3 Собственные значения и собственные векторы .....	77

3.3.1	Характеристическое уравнение .....	77
3.3.2	Модальная матрица .....	80
3.3.3	Симметрическая матрица .....	82
3.4	Линейные преобразования .....	82
3.4.1	Элементарные действия над матрицами .....	82
3.4.2	Эквивалентные преобразования .....	83
3.4.3	Диагонализация матриц .....	86
3.5	Квадратичные формы .....	91
3.5.1	Преобразование переменных .....	92
3.5.2	Определенные, полуопределенные и неопределенные формы .....	93
3.5.3	Дифференцирование квадратичных форм .....	94
3.6	Матричные функции .....	97
3.6.1	Матричные ряды .....	97
3.6.2	Функции от матриц .....	98
3.6.3	Теорема Кэли-Гамильтона .....	101
3.6.4	Теорема Сильвестра .....	104
3.7	Функциональные пространства .....	108
3.7.1	Функциональный базис .....	108
3.7.2	Аппроксимация функций .....	110
4.	Векторно-матричные дифференциальные уравнения .....	112
4.1	Уравнения состояния .....	112
4.1.1	Обыкновенные дифференциальные уравнения .....	112
4.1.2	Каноническая форма .....	115
4.2	Обыкновенные уравнения стационарных систем .....	116
4.2.1	Переходная матрица и методы ее вычисления .....	116
4.2.2	Общее решение неоднородных уравнений .....	118
4.3	Обыкновенные уравнения нестационарных систем .....	120
4.3.1	Переходная нестационарная матрица .....	120
4.3.2	Сопряженная система .....	124
4.3.3	Общее решение нестационарных уравнений .....	126
4.4	Уравнения в частных производных .....	128
4.4.1	Уравнения Лагранжа .....	128
4.4.2	Уравнения Гамильтона .....	131
4.4.3	Уравнения Гамильтона – Якоби .....	135
5	Список рекомендуемой к изучению литературы .....	138

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В первой части рассматривались системы, в которых множества входных, выходных и внутренних состояний были конечными. Во второй части рассмотрены математические основы для описания систем, у которых упомянутые множества континуальны (непрерывные системы) либо счетны (импульсные или дискретные системы). В разделе 3 приведены сведения из линейной алгебры, необходимые для описания систем в пространстве состояний. Рассмотрены как классические методы описания систем (обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения и интегральные преобразования - разделы 1 и 2), так и векторно-матричное описание систем в пространстве состояний и уравнения оптимальных систем (раздел 4).

Разделы 1 и 2 написаны, следуя [1] с использованием [4], [6] и [2]. Раздел 3 изложен, в основном, по [1] с привлечением [3]. В разделе 4 использованы сведения из [5] и [2].

## 1 ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

В этом разделе полагаем, что функции  $r(t)$  и  $y(t)$ , интерпретируемые соответственно как входной и выходной сигнал некоторой системы, определены на континуальном множестве моментов времени  $t$ .

### 1.1 Дифференциальные уравнения динамики систем

Вообще говоря, связь между входным сигналом некоторой системы, описываемым функцией  $r(t)$ , и ее выходным сигналом  $y(t)$  может задаваться нелинейным дифференциальным уравнением произвольного порядка  $n$ :

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, r^{(m)}, r^{(m-1)}, \dots, r) = 0, \quad (1.1)$$

где  $F(z_1, z_2, \dots, z_{n+m+2})$  – функция  $n+m+2$  аргументов. Задав вид функции  $r(t)$  и  $n$  начальных условий  $y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$ , можно в принципе решить это уравнение и найти выход (реакцию)  $y(t)$  данной системы на входной сигнал  $r(t)$ .

Уравнение (1.1) является уравнением самого общего вида и описывает поведение системы во всех режимах. Один из частных случаев таких режимов – это статический режим, то есть такой режим, при котором ни входные, ни выходные сигналы системы не меняются во времени. Конечно, это определенная идеализация, которая получается из уравнения (1.1) формальной подстановкой

$$y^{(n)} = y^{(n-1)} = \dots = \dot{y} = r^{(m)} = \dots = \dot{r} = 0.$$

Тогда уравнение статики примет вид

$$F(0, 0, \dots, 0, y_{cm}, 0, \dots, 0, r_{cm}) = 0, \quad (1.2)$$

из которого можно установить связь между статическим значением входного сигнала  $r_{cm}$  и статическим значением выходного сигнала  $y_{cm}$

$$y_{cm} = f(r_{cm}). \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) описывает статическую характеристику системы.

Решение уравнения (1.1) для произвольной функции  $F$  наталкивается на непреодолимые трудности и возможно только в некоторых частных случаях. Одним из таких частных, но весьма важных случаев является случай, когда функция  $F$  является линейной функцией по своим аргументам, то есть когда уравнение, связывающее входной сигнал  $r(t)$  с выходным  $y(t)$ , является линейным дифференциальным уравнением:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y + a_{n+1}(t)r^{(m)} + a_{n+2}(t)r^{(m-1)} + \dots + a_{n+m}(t)r = 0. \quad (1.4)$$

Коэффициенты этого уравнения  $a_i(t)$  в общем случае могут зависеть от времени и тогда уравнение (1.4) описывает нестационарную систему. Если такой зависимости от времени нет (или она очень слабая) то приходим к линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y + a_{n+1} r^{(m)} + \dots + a_{n+m+1} r = 0.$$

Последнее уравнение принято записывать так, чтобы выходная величина и ее производные оставались бы в левой части уравнения, а входные и ее производные – в правой части. Тогда получим

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + \dots + b_m r, \quad (1.5)$$

где  $b_i = -a_{n+i+1}$  ( $0 \leq i \leq m$ ).

В некоторых случаях удастся даже нелинейное уравнение типа (1.1) свести к линейному уравнению типа (1.5). Пусть для некоторого установившегося значения входа  $r_{cm}$  получено уравнение статики (1.2). Тогда разложим левую часть уравнения (1.1) в ряд Тейлора (предполагая, что такое разложение имеет место) около точки установившегося режима и ограничим этот ряд линейными приращениями переменных.

$$\begin{aligned} F(z_1, \dots, z_{n+m+2}) &\approx F(0, \dots, y_{cm}, 0, \dots, r_{cm}) + \left( \frac{\partial F}{\partial z_1} \right)_0 \Delta y^{(n)} + \left( \frac{\partial F}{\partial z_2} \right)_0 \Delta y^{(n-1)} + \dots \\ &+ \left( \frac{\partial F}{\partial z_{n+1}} \right)_0 \Delta y + \left( \frac{\partial F}{\partial z_{n+2}} \right)_0 \Delta r^{(m)} + \dots + \left( \frac{\partial F}{\partial z_{n+m+2}} \right)_0 \Delta r = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где частные производные  $\left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_0$  вычисляются при подстановке в них

значений  $y_{cm}$  и  $r_{cm}$  и нулевых значениях производных, соответствующих установившемуся режиму.

Первое слагаемое в (1.6) равно нулю согласно (1.2). Вводя обозначения



$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_0 &= a_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n+1 \text{ и} \\ - \left( \frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_0 &= b_{i-n-2} \quad n+2 \leq i \leq n+m+2, \end{aligned}$$

и перенося слагаемые с входным воздействием и его производными в правую часть, получим:

$$a_0 \Delta y^{(n)} + a_1 \Delta y^{(n-1)} + \dots + a_n \Delta y = b_0 \Delta r^{(m)} + b_1 \Delta r^{(m-1)} + \dots + b_m \Delta r. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) по форме точно такое же, как и (1.5), но записано относительно соответствующих отклонений  $\Delta y = y(t) - y_{cm}$  и  $\Delta r = r(t) - r_{cm}$ .

Полученное уравнение (1.7) описывает ту же самую систему, что и уравнение (1.1), но оно имеет следующие отличия.

Во-первых, уравнение (1.7) приближенное, причем это приближение тем точнее, чем меньше отклонения переменных от установившихся значений.

Во-вторых, поскольку при выводе уравнения (1.7) использовалось разложение в ряд Тейлора, такая операция применима только к непрерывно-дифференцируемым нелинейностям. Такие нелинейности называются линеаризуемыми. А нелинейные функции, не удовлетворяющие этому условию, называются существенно нелинейными.

В-третьих, уравнение (1.7) составлено относительно отклонений, а не самих сигналов. Такого рода уравнения называются уравнениями в отклонениях или в вариациях.

И, наконец, в-четвертых (и это основное), уравнение (1.7) линейное.

Поскольку форма уравнений (1.7) и (1.5) совпадает, в дальнейшем можно использовать любое из них, например, (1.5) подразумевая, что в качестве переменных могут быть и соответствующие отклонения.

Запись (1.5) неудобна. Удобнее записывать связь между входом и выходом системы посредством некоторого оператора, осуществляющего операцию над входным сигналом, чтобы получить выходной. Для этого заменим  $i$  – ю производную по времени формально на  $s^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), при этом  $s^0 = 1$  означает отсутствие дифференцирования. Тогда выражение (1.5) можно переписать в таком виде

$$a_0 s^n y + \dots + a_n y = b_0 s^m r + \dots + b_m r. \quad (1.8)$$

Решив формально последнее уравнение относительно выхода  $y$ , получим

$$y = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n} \cdot r = W(s) \cdot r, \quad (1.9)$$

где введено обозначение

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + \dots + b_m}{a_0 s^n + \dots + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (1.10)$$

$N(s)$  и  $D(s)$  – это полиномы степени  $m$  и  $n$  соответственно.

Дробь (1.10) носит название передаточной функции или оператора системы. Пока будем рассматривать ее как удобную форму записи линейного дифференциального уравнения (1.9).

## 1.2 Общие свойства линейных дифференциальных уравнений

Предполагая, что входной сигнал  $r(t)$  известен, правую часть уравнения (1.8) можно представить как  $f(t)$ , называемую иногда вынуждающей функцией, и переписать уравнение (1.8) в виде

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) y = f(t). \quad (1.11)$$

Коэффициенты  $a_i$  могут быть здесь функциями времени. Если правая часть последнего уравнения тождественно равна нулю, то такое уравнение называется *однородным*

$$(a_0 s^n + \dots + a_n) y(t) = 0. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.11) называют соответственно *неоднородным* дифференциальным уравнением.

Уравнение (1.12) может иметь не более, чем  $n$  линейно независимых решений. Необходимое и достаточное условие линейной независимости  $n$  решений этого уравнения состоит в отличие от нуля определителя Вронского или вронскиана:

$$V(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ sy_1 & sy_2 & \dots & sy_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s^{n-1}y_1 & s^{n-1}y_2 & \dots & s^{n-1}y_n \end{vmatrix}, \quad (1.13)$$

где  $y_1 \dots y_n$  – решения уравнения (1.12).

Общее решение уравнения (1.12) представляется в виде:

$$y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 \dots + c_n y_n \quad (1.14)$$

где  $c_i \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}$  - произвольные постоянные. Уравнение (1.14) означает, что если известны  $n$  решений уравнения (1.12), то произвольное его решение можно представить в виде линейной комбинации этих  $n$  решений.

Для систем с постоянными параметрами существует общий метод нахождения независимых решений однородного уравнения. Для систем с переменными параметрами такого метода не существует.

Общее решение неоднородного уравнения (1.11) состоит из суммы общего решения однородного уравнения (1.12) и любого произвольного (частного) решения, удовлетворяющего уравнению (1.11):

$$y(t) = y_0(t) + y_n(t).$$

Для нахождения частного решения  $y_n(t)$  пригоден любой метод. Так как  $y_n(t)$  не содержит произвольных постоянных, то в решении  $y(t)$ , также как и в  $y_0(t)$ , содержится  $n$  постоянных. Для их нахождения следует знать начальные или граничные условия.

### 1.3 Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Решение уравнения (1.11) начнем с решения соответствующего ему однородного уравнения (1.12).

#### 1.3.1 Однородные уравнения

Предполагаемое решение уравнения (1.12) ищем в виде  $y = e^{st}$ , где  $s$ -подлежащая определению постоянная величина. Подставив предполагаемое решение в уравнение (1.12), имеем:

$$(a_0 s^n + \dots + a_n) e^{st} = 0.$$

Так как это уравнение должно удовлетворяться при всех значениях  $t$ , нулю должно равняться выражение в скобках:

$$a_0 s^n + \dots + a_n = 0, \quad (1.15)$$

где  $s$ , как уже было упомянуто, некоторая постоянная алгебраическая величина.

Уравнение (1.15), как известно, носит название характеристического, и непосредственного может быть получено из уравнения (1.12). Поскольку в левой части этого уравнения стоит полином  $n$ -ого порядка с постоянными действительными коэффициентами (этот полином называется характеристическим), то оно содержит ровно  $n$  корней. Обозначим их через  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Тогда соответствующие решения уравнения (1.12) будут  $y_1 = e^{s_1 t}$ ,  $y_2 = e^{s_2 t}$  ...  $y_n = e^{s_n t}$ . Если эти  $n$  решений линейно независимы (а это согласно (1.13) будет, если все  $s_i$  различны), то общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y_0(t) = c_1 e^{s_1 t} + c_2 e^{s_2 t} + \dots + c_n e^{s_n t} = \sum_{i=1}^n c_i e^{s_i t}. \quad (1.16)$$

Если какой-то корень (например  $j$ -й) имеет кратность  $k$ , то линейно независимыми будут решения

$$y_j = e^{s_j t}, y_{j+1} = t e^{s_j t}, \dots, y_{j+k-1} = t^{k-1} e^{s_j t}$$

и общее решение запишется в виде

$$y_0(t) = c_1 e^{s_1 t} + \dots + c_j e^{s_j t} + c_{j+1} t e^{s_j t} + \dots + c_{j+k-1} t^{k-1} e^{s_j t} + c_{j+k} e^{s_{j+k} t} + \dots + c_n e^{s_n t}. \quad (1.17)$$

Некоторые из корней  $s_i$  могут быть комплексными, поэтому решения (1.17) можно представить в иной форме. Поскольку коэффициенты уравнения (1.12) суть действительные числа, для каждого комплексного корня должен быть комплексно сопряженный, то есть для корня  $s_i = \alpha + j\beta$  ( $\alpha$  и  $\beta$  - действительные числа) всегда найдется корень  $s_{i+1} = \alpha - j\beta$ . Тогда соответствующий вклад этих корней в решение (1.17) можно представить в виде

$$c_i e^{s_i t} + c_{i+1} e^{s_{i+1} t} = e^{\alpha t} (c_i e^{j\beta t} + c_{i+1} e^{-j\beta t}) = e^{\alpha t} ((c_i + c_{i+1}) \cos \beta t + j(c_i - c_{i+1}) \sin \beta t) = e^{\alpha t} (A \cos \beta t + B \sin \beta t).$$

В реальной системе  $y_0(t)$  - действительная функция времени, а, следовательно, произвольные постоянные  $A$  и  $B$  - действительные числа. Это означает, что  $c_i$  и  $c_{i+1}$  должны быть комплексно сопряженными. Последнее выражение может быть записано и в виде косинуса с фазовым сдвигом

$$c_i e^{s_i t} + c_{i+1} e^{s_{i+1} t} = C e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi),$$

где связи произвольных постоянных очевидны  
 $C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \varphi = -\arctg \frac{B}{A}.$

### 1.3.2 Неоднородные уравнения

Для определения частного решения  $y_n(t)$  существует два стандартных метода – метод неопределенных коэффициентов и метод вариации (Лагранжа) параметров.

**Метод неопределенных коэффициентов** может быть применен в том случае, если вынуждающая функция  $f(t)$  имеет конечное число линейно независимых производных. Функция  $f(t)$  в этом случае может быть многочленом целой положительной степени  $t$  или состоять из комбинации экспоненциальной, синусоидальной или гиперболической функций. Идея метода состоит в том, что предполагаемое решение  $y_n(t)$  представляет собой линейную комбинацию составляющих  $f(t)$  и их производных, при этом каждый элемент этой линейной комбинации входит с неопределенными коэффициентами. Далее предполагаемое решение подставляется в уравнение (1.11), а неопределенные коэффициенты выбираются таким образом, чтобы это уравнение удовлетворялось при всех значениях  $t$ .

В том случае, когда отдельные члены  $f(t)$  в точности совпадают по виду с какой-либо составляющей решения  $y_0(t)$  однородного уравнения, процедура решения предполагает в общем случае умножение на  $t$  соответствующих составляющих в выражении для  $y_n(t)$ . Подобная схема сохраняется, когда член  $f(t)$  содержит дополнительный множитель  $t^n$ . Если же какой-либо член  $f(t)$  соответствует кратному корню характеристического уравнения (например, кратности  $m$ ), то соответствующий член в  $y_n(t)$  следует умножить на  $t^m$ .

**Метод вариации параметров** может быть применен для любых функций  $f(t)$  независимо от того, имеет или не имеет эта функция конечное число независимых производных. Также этот метод может быть применен и для нестационарных систем, когда коэффициенты  $a_i$  уравнения (1.11) зависят от времени.

Метод вариации параметров предполагает нахождение частного решения на основе составляющих решения однородного уравнения, предполагая, что это решение уже известно.

Чтобы было понятнее, начнем пояснение метода вариации параметров с уравнения первого порядка:

$$(a_0 s + a_1)y = f(t). \quad (1.18)$$

Решение соответствующего однородного уравнения

$$(a_0 s + a_1)y = 0 \quad (1.19)$$

содержит одну составляющую  $y(t_0) = cy_1$ . Частное решение ищем в виде

$$y_n(t) = uy_1. \quad (1.20)$$

где  $u$  - неизвестная функция времени. Подставляя решение (1.20) в уравнение (1.18), имеем

$$a_0(u\dot{y}_1 + \dot{u}y_1) + a_1uy_1 = f(t),$$

или, делая очевидное преобразования, получим

$$a_0\dot{u}y_1 + u(a_0\dot{y}_1 + a_1y_1) = f(t).$$

В последнем уравнении выражение в скобках равно нулю, так как  $y_1$  является решением уравнения (1.19). Следовательно

$$\dot{u} = \frac{1}{a_0y_1} f(t), \quad (1.21)$$

откуда, интегрируя, можно найти  $u$ .

Возьмем далее уравнение второго порядка

$$(a_0s^2 + a_1s + a_2)y = f(t). \quad (1.22)$$

Решение однородного уравнения

$$(a_0s^2 + a_1s + a_2)y = 0 \quad (1.23)$$

состоит из двух слагаемых  $y_0 = c_1y_1 + c_2y_2$ . Частное решение предполагаем в виде

$$y_n = u_1y_1 + u_2y_2, \quad (1.24)$$

где уже две неизвестные (пока) функции  $u_1$  и  $u_2$ , следовательно, необходимы два условия для их определения. Одно из условий - это удовлетворение уравнения (1.22) при подстановке (1.24), а второе можно выбрать любым наиболее удобным образом. Запишем, например,  $\dot{y}_H$  :

$$\dot{y}_H = u_1\dot{y}_1 + \dot{u}_1y_1 + u_2\dot{y}_2 + \dot{u}_2y_2$$

и положим для упрощения последнего уравнения

$$\dot{u}_1y_1 + \dot{u}_2y_2 = 0. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.25) возьмем в качестве второго условия. Определяя производные  $\dot{y}_H$  и  $\ddot{y}_H$  и подставляя их в уравнение (1.22), получим

$$a_0(u_1\ddot{y}_1 + \dot{u}_1\dot{y}_1 + u_2\ddot{y}_2 + \dot{u}_2\dot{y}_2) + a_1(u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2) + a_2(u_1y_1 + u_2y_2) = f(t).$$

После преобразования

$$a_0(\dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2) + u_1(a_0\ddot{y}_1 + a_1\dot{y}_1 + a_2y_1) + u_2(a_0\ddot{y}_2 + a_1\dot{y}_2 + a_2y_2) = f(t).$$

Учитывая, что  $y_1$  и  $y_2$  удовлетворяют уравнению (1.23), имеем

$$\dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 = \frac{f(t)}{a_0}. \quad (1.26)$$

Совместное решение (1.26) и (1.25) по правилу Крамера дает

$$\dot{u}_1 = \frac{-y_2 f(t)}{a_0(y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1y_2)}, \quad \dot{u}_2 = \frac{y_1 f(t)}{a_0(y_1\dot{y}_2 - \dot{y}_1y_2)}. \quad (1.27)$$

Знаменатель выражений (1.27), являющийся вронскианом уравнения (1.23), отличен от нуля, так как решения  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы, и, следовательно, решения  $\dot{u}_1$  и  $\dot{u}_2$  всегда существуют. Интегрируя (1.27) получаем  $u_1$  и  $u_2$  и частное решение в форме (1.24).

Теперь возьмем уравнение произвольного  $n$ -ого порядка типа (1.11).

Решение однородного уравнения (1.12) имеет вид  $y_0 = \sum_{i=1}^n c_i y_i$ , а частное решение ищем в виде

$$y_H(t) = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n. \quad (1.28)$$

Аналогично условиям (1.25) и (1.26) производные от  $u_i$  находим из уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 y_1 + \dot{u}_2 y_2 + \dots + \dot{u}_n y_n &= 0 \\ \dot{u}_1 \dot{y}_1 + \dot{u}_2 \dot{y}_2 + \dots + \dot{u}_n \dot{y}_n &= 0 \\ \dots & \dots \dots \\ \dot{u}_1 y_1^{(n-1)} + \dot{u}_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \dot{u}_n y_n^{(n-1)} &= \frac{f(t)}{a_0}. \end{aligned}$$

Эта система уравнений решается на основе правила Крамера

$$\dot{u}_i = \frac{V_{ni}(t)f(t)}{a_0 V(t)} \quad i = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.29)$$

$$\text{где } V(t) = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & \dots & y_n \\ \dot{y}_1 & \dots & \dots & \dot{y}_n \\ y_1^{(n-1)} & \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

а  $V_{ni}(t) - ni$  - е алгебраическое дополнение.

Знаменатель (1.29) отличен от нуля, если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  - независимые решения однородного дифференциального уравнения.

Интегрируя выражения (1.29), подставляем результат в формулу (1.28) и определяем частное решение  $y_H$ .

### 1.3.3 Вычисление постоянных интегрирования

Произвольные постоянные в решении однородного уравнения вычисляются на основе начальных или граничных условия. В большинстве случаев для решения дифференциального уравнения  $n$  - ого порядка при определении постоянных интегрирования используют значения  $y(t)$  и ее  $n-1$  производных при  $t = t_{0+}$ . Обозначение  $t_{0+}$  означает, что значения выхода  $y(t)$  и его производных заданы непосредственно после момента отсчета  $t_0$ . Очень часто полагают  $t_0=0$ . Начальные условия обычно определяются, исходя из запасенной системой энергии к моменту  $t = t_0$ . Очень важно, что постоянные интегрирования зависят от вынуждающей функции и не могут быть определены, пока не найдена составляющая  $y_H(t)$ .

В ряде важных случаев начальные условия нулевые. Для уравнения  $n$  -ого порядка (1.11) это означает, что

$$y(t_0) = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_0} = \dots = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \Big|_{t=t_0} = 0. \quad (1.30)$$

Рассмотренный метод вариации параметров может быть использован и для получения общего решения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям (1.30).

Действительно, возьмем, например, уравнение первого порядка. Объединяя уравнения (1.20) и (1.21) можно записать

$$y(t) = y_1(t)(u(t) - u(t_0)) = y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{f(\xi)}{a_0 y_1(\xi)} d\xi. \quad (1.31)$$

Верхний предел в (1.31) соответствует частному решению, а нижний предел дает постоянную интегрирования в решении однородного уравнения. Причем из (1.31) следует, что  $y(t_0)=0$ .

При  $n = 2$  объединяются уравнения (1.24) и (1.27):



$$y(t) = y_1(t)(u_1(t) - u_1(t_0)) + y_2(t)(u_2(t) - u_2(t_0)) =$$

$$- y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{y_2(\xi) f(\xi)}{a_0 V(\xi)} d\xi + y_2(t) \int_{t_0}^t \frac{y_1(\xi) f(\xi)}{a_0 V(\xi)} d\xi. \quad (1.32)$$

Из последнего выражения видно, что  $y(t_0) = 0$ . Возьмем производную от (1.32):

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_1(t)(u_1(t) - u_1(t_0)) + \dot{y}_2(t)(u_2(t) - u_2(t_0)) + [y_1(t)\dot{u}_1(t) + y_2(t)\dot{u}_2(t)].$$

Последнее слагаемое согласно (1.25) равно нулю, следовательно, выполняется условие  $\dot{y}(t_0) = 0$ .

В общем случае уравнения  $n$ -ого порядка при нулевых начальных условиях из выражений (1.28) и (1.29) следует

$$y(t) = y_1(t)(u_1(t) - u_1(t_0)) + \dots + y_n(t)(u_n(t) - u_n(t_0)) =$$

$$\sum_{i=1}^n y_i(t) \int_{t_0}^t \frac{V_{ni}(\xi)}{a_0 V(\xi)} f(\xi) d(\xi).$$

...

#### 1.4 Ряды Фурье и интегральное преобразование Фурье

Пусть  $f(t)$  – произвольная кусочно-непрерывная функция, имеющая кусочно-непрерывную первую производную. Функция  $f(t)$  определена на отрезке  $[-T/2, T/2]$ , а на всю остальную ось продолжается периодически, то есть  $f(t)$  – периодическая с периодом  $T$  функция.

Как известно, эта функция может быть всюду, кроме разве лишь точек разрыва, разложена в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{2}{T} \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{T} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T} nt \right) \quad (1.33)$$

где

$$a_0 = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt, \quad a_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi}{T} ntdt,$$

$$b_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2\pi}{T} nt \, dt.$$

Удобнее для дальнейших выкладок представить ряд (1.33) в комплексном виде. Пользуясь формулами Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j},$$

имеем

$$\begin{aligned} a_n \cos \frac{2\pi n}{T} t + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} t &= \frac{a_n}{2} (e^{j\frac{2\pi}{T} nt} + e^{-j\frac{2\pi}{T} nt}) - j \frac{b_n}{2} (e^{j\frac{2\pi}{T} nt} - e^{-j\frac{2\pi}{T} nt}) \\ &= e^{j\frac{2\pi}{T} nt} \left( \frac{a_n - jb_n}{2} \right) + e^{-j\frac{2\pi}{T} nt} \left( \frac{a_n + jb_n}{2} \right) \end{aligned} \quad (1.34)$$

Введем функцию от  $n$  следующим образом

$$\begin{aligned} F\left(j\frac{2\pi}{T}n\right) &= a_n - jb_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \frac{2\pi}{T} ntdt - j \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \frac{2\pi}{T} ntdt = \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\frac{2\pi}{T} nt} dt. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Тогда, обозначив для краткости  $\omega = (2\pi/T)n$ , из (1.34) с учетом (1.35) получим

$$a_n \cos \frac{2\pi}{T} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T} nt = \frac{F(j\omega)}{2} e^{j\omega t} + \frac{F(-j\omega)}{2} e^{-j\omega t},$$

откуда ясно, что ряд (1.33) можно представить так:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t}, \quad (1.36)$$

где  $\omega = 0, \pm 2\pi/T, \pm (2\pi/T)2 \dots (2\pi/T)n \dots$

В выражении (1.36) и (1.35) функция комплексного переменного  $F(j\omega)$  определена только в дискретных точках. Такие функции называются *решетчатыми*. Функция  $F(j\omega)$  называется комплексным частотным спектром периодической функции  $f(t)$ . Этот спектр дискретный (физики называют такие спектры линейчатыми). Модуль комплексной функции  $F(j\omega)$  определяет амплитуду соответствующей составляющей спектра, а фаза – смещение по фазе этой составляющей.

Одной из основных теорем теории рядов Фурье является **теорема Римана - Лебега**.

**Теорема Римана - Лебега**. Если функция  $f(t)$  интегрируема на интервале  $(a, b)$ , то при  $\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_a^b f(t) \cos \lambda t dt \rightarrow 0, \quad \int_a^b f(t) \sin \lambda t dt \rightarrow 0.$$

Теорема Римана - Лебега имеет следующие важные следствия.

**Следствие 1.** Коэффициенты Фурье любой интегрируемой функции стремятся к нулю с ростом  $n$ .

**Следствие 2.** Поведение ряда Фурье в некоторой точке  $t$  зависит только от поведения функции в непосредственной окрестности этой точки (принцип локализации).

Формула (1.36) может быть обобщена и для непериодических функций, которые можно представить как периодические с периодом  $T \rightarrow \infty$ . В этом случае интервал между соседними частотами спектра  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T$  будет стремиться к нулю при  $T \rightarrow \infty$ . Следовательно, при увеличении периода  $T$  частоты составляющих спектра приближаются друг к другу, образуя в пределе сплошной спектр.

При  $T \rightarrow \infty$  из (1.36) получаем, умножив и разделив правую часть на  $\Delta\omega = 2\pi/T$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} \Delta\omega. \quad (1.37)$$

Переходя к пределу, из суммы в (1.37) получим интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1.38)$$

а из (1.35) будем иметь

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.39)$$

Преобразования (1.39) и (1.38) называются соответственно прямым и обратным преобразованием Фурье.

Учитывая предельный переход, интеграл в правой части формулы (1.38) понимается в смысле главного значения.

Условия, необходимые для существования ряда Фурье, переносятся и на интеграл Фурье. Функция времени должна быть однозначной, содержать конечное число максимумов, минимумов и разрывов.

Кроме того, для существования интеграла (1.39) требуется абсолютная интегрируемость функции  $f(t)$ , то есть выполнение условия:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (1.40)$$

Аналогично для существования интеграла (1.38) достаточно абсолютной интегрируемости функции - изображения  $F(j\omega)$ .

Представим экспоненту в интегралах (1.38) и (1.39) по формуле Эйлера и выделим только вещественную часть. Получим

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega,$$

$$F_c(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt.$$

Эти выражения определяют *косинус-преобразование Фурье*.

Выделяя аналогично чисто мнимую часть в интегралах (1.38) и (1.39), получаем *синус-преобразование Фурье*.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

$$F_s(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Если  $f(t)$  - четная функция, то

$$F(j\omega) = F_c(\omega),$$

если  $f(t)$  - нечетная функция, то

$$F(j\omega) = j F_s(\omega).$$

Пусть функции  $f(t)$  и  $g(t)$  имеют соответственно преобразование Фурье  $F(j\omega)$  и  $G(j\omega)$ . Тогда обратное преобразование Фурье от произведения изображений равно свертке функций  $f(t)$  и  $g(t)$ . Действительно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(j\omega)e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) d\tau \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Полагая в последнем выражении  $t=0$ , получим формулу, известную как *равенство Парсеваля*:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(-\tau) d\tau,$$

или

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)G(-j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)f(\tau) d\tau.$$

Если положить  $f = g$ , то равенство Парсеваля будет иметь вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt.$$

## 1.5 Интегральные преобразования Лапласа, Карсона, Хевисайда

### 1.5.1 Определение преобразований

Условие (1.40) часто не выполняется даже для очень простых функций. Один из путей, позволяющих расширить преобразование (1.38), (1.39) для значительно большего класса функций, заключается в следующем. Если условие (1.40) не выполняется для функции  $f(t)$ , то оно выполняется для функции  $f_1(t) = f(t)e^{-ct}$ , где  $c$  больше радиуса сходимости функции  $f(t)$ . Практический интерес в теории систем представляют обычно функции, определенные при  $t \geq 0$ . Поэтому ограничимся классом функций, тождественно равных нулю при  $t < 0$ . Найдем преобразование Фурье функции  $f_1(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(c+j\omega)t} dt.$$

Обозначив  $s = c + j\omega$ , получим функцию комплексного переменного  $s$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.41)$$

Преобразование, определяемое формулой (1.41) называется *преобразованием Лапласа*.

Нетрудно получить формулу обращения для преобразования Лапласа, которая по изображению восстанавливала бы оригинал. Так как при фиксированном  $c$  функцию  $F(s) = F(c + j\omega)$  можно рассматривать как результат преобразования Фурье функции  $f_1(t) = f(t)e^{-ct}$ , то применяя к функции  $F(c + j\omega)$  обратное преобразование Фурье, получим

$$f_1(t) = f(t)e^{-ct} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(c + j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножив правую и левую часть последнего выражения на  $e^{ct}/j$  и сделав обратную замену  $c + j\omega = s$ , имеем

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds. \quad (1.42)$$

Интегрирование в (1.42) ведется снизу вверх вдоль прямой, параллельной мнимой оси и отстоящей от нее на величину  $c$ . Величина  $c$  выбирается правее всех полюсов функции  $F(s)$ . Минимальная величина  $c$ , удовлетворяющая этому условию, называется абсциссой абсолютной сходимости. Символическая запись преобразования Лапласа часто записывается как

$$F(s) = L\{f(t)\},$$

а обратное преобразование – как

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\},$$

Интеграл (1.42) можно вычислить, воспользовавшись, например, теоремой о вычетах, которая гласит: *интеграл по замкнутому контуру, не имеющему особенностей подинтегрированной функции, равен сумме вычетов подинтегральной функции в полюсах, охватываемых этим контуром, помноженной на коэффициент  $2\pi j$ , то есть*

$$\oint_{\Gamma} F(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}_s F(\xi_i),$$

где  $\xi_i$  – полюсы  $F(\xi)$ , попадающие в контур  $\Gamma$ ,  $n$  – число этих полюсов, а интегрирование ведется против часовой стрелки.

Чтобы воспользоваться сформулированной теоремой для вычисления интеграла (1.42), нужно замкнуть контур интегрирования дугой бесконечно большого размера через левую полуплоскость.

Если абсцисса абсолютной сходимости равна нулю, то  $s = j\omega$  и формулы (1.42) и (1.41) определяют так называемое одностороннее преобразование Фурье (в отличие от двухстороннего, определяемого формулами (1.38) и (1.39)).

Другими вариантами преобразования Лапласа являются преобразование Карсона и преобразование Хевисайда. Преобразование Карсона отличается от преобразования Лапласа множителем  $s$  в формуле прямого преобразования и соответственно множителем  $1/s$  в формуле обратного преобразования. А преобразование Хевисайда является частным случаем преобразования Карсона, если функция-оригинал и ее производные имеют нулевые начальные условия.

Преобразование Карсона удобно тем, что, как нетрудно вычислить, изображение единичной функции есть единица:

$$F_k(s) = s \int_0^{\infty} I(t) \cdot e^{-st} dt = -s \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

(Единичная функция  $I(t)$  равна единице при  $t \geq 0$  и нулю при  $t < 0$  и часто применяется в теории управления).

### 1.5.2 Свойства преобразования Лапласа

Одно из основных свойств преобразования Лапласа заключается в том, что изображение производной от функции  $f(t)$  очень просто связано с изображением самой функции. Действительно, найдем изображение по Лапласу от  $df/dt$ , интегрируя по частям:

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt = e^{-st} \cdot f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt = sF(s) - f(0), \quad (1.43)$$

где

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t).$$

Пользуясь формулой (1.43) можно найти изображение и для  $n$ -й производной:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (1.44)$$

Если начальные условия для функции и всех ее производных до  $(n-1)$ -й включительно нулевые, то выражение (1.44) упрощается

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\}.$$

Вообще говоря, интеграл (1.41) можно представить как предел

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ M \rightarrow \infty}} \int_a^M f(t) e^{-st} dt.$$

При этом  $a$  может стремиться к нулю, оставаясь все время положительной величиной ( $a \rightarrow +0$ ), либо все время, оставаясь отрицательной величиной ( $a \rightarrow -0$ ). В связи с этим можно определять преобразование Лапласа как левостороннее ( $a \rightarrow -0$ ), или как правостороннее ( $a \rightarrow +0$ ). Обычно удобнее рассматривать правостороннее преобразование Лапласа, когда  $a \rightarrow +0$ . Именно в таком смысле и будем в дальнейшем говорить о преобразовании Лапласа без дополнительного об этом упоминания. При этом начальные условия для самих функций и ее производных будут, естественно, рассматриваться в точке  $+0$ .

Двойственным к свойству, описываемому уравнением (1.44), является **дифференцирование преобразования Лапласа**. Для целого положительного  $n$  имеем

$$\frac{d^n F(s)}{ds^n} = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-st} dt = (-1)^n L\{t^n f(t)\} \quad (1.45)$$

Следующие два очевидных свойства позволяют считать оператор Лапласа линейным оператором: изображение суммы равно сумме изображений

$$L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\},$$

и возможность выносить постоянный множитель за оператор Лапласа

$$L\{af(t)\} = aL\{f(t)\}.$$

Для нахождения прямого и обратного преобразований Лапласа полезны еще ряд свойств, которые можно сформулировать в виде теорем.

**Теорема запаздывания.** Найдем  $L\{f(t-a)\}$ :

$$\begin{aligned} L\{f(t-a)\} &= \int_0^\infty f(t-a) e^{-st} dt = \int_{-a}^\infty f(\tau) e^{-s(\tau+a)} d\tau = \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-sa} \cdot L\{f(t)\}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

**Теорема о конечном значении.** Если существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad \text{то} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sL\{f(t)\}. \quad (1.47)$$

Для доказательства устремим  $s$  к нулю в обеих частях выражения (1.43)



$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = \int_0^{\infty} df = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L\{f(t)\} - f(0),$$

откуда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot L\{f(t)\} - f(0),$$

и окончательно приходим к (1.47).

**Теорема о начальном значении.** Начальное значение функции равно пределу при  $s \rightarrow \infty$  от ее изображения, умноженному на  $s$ .

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot L\{f(t)\}. \quad (1.48)$$

Действительно, рассмотрим опять формулу (1.43) и представим интеграл в левой части в виде суммы двух интегралов:

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = \int_0^M \frac{df}{dt} e^{-st} dt + \int_M^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt, \quad (1.49)$$

где  $M > 0$ . Заменим в первом интеграле  $df/dt$  на максимальное на интервале  $0 < t < M$  значение (пусть оно равно  $A$ ). Тогда

$$\int_0^M \frac{df}{dt} e^{-st} dt \leq A \int_0^M e^{-st} dt = A \frac{1 - e^{-sM}}{s}.$$

Устремляя  $s$  к  $\infty$  имеем

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{df}{dt} e^{-st} dt = 0.$$

Второй интеграл также даст в пределе нуль, так как

$$\left| \int_M^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt \right| < e^{-sM} \left| \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt \right| = e^{-sM} (f(\infty) - f(0)).$$

Таким образом, левая часть выражения (1.49) при  $s \rightarrow \infty$  стремится к нулю и из (1.43) сразу следует равенство (1.48).

**Теорема дифференцирования.** Изображение производной от функции по параметру равно производной от изображения по этому же параметру.

$$L\left\{\frac{\partial f(t, a)}{\partial a}\right\} = \frac{\partial L\{f(t, a)\}}{\partial a}. \quad (1.50)$$

Формула (1.50) легко получается переменной местами операции интегрирования и дифференцирования в преобразовании Лапласа от производной по параметру. А это возможно вследствие линейности операции интегрирования и дифференцирования.

**Теорема свертки во временной области.** Произведение изображений равно изображению свертки оригиналов.

$$F_1(s) \cdot F_2(s) = L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = L\left\{\int_0^t f_2(t-\tau)f_1(\tau)d\tau\right\}. \quad (1.51)$$

Действительно, запишем оператор Лапласа от правой части выражения (1.51)

$$\begin{aligned} L\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} &= \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \right] dt = \int_0^\infty e^{-st} \\ &\left[ \int_0^\infty f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \right] dt = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty e^{-st} f_1(t-\tau)dt \right] f_2(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-st} f_2(\tau) \\ &\left[ \int_0^\infty f_1(t-\tau)e^{-st(t-\tau)}dt \right] d\tau = \int_0^\infty e^{-st} f_2(\tau)d\tau \cdot \int_{-\tau}^\infty f_1(\xi)e^{-s\xi}d\xi = F_1(s) \cdot F_2(s). \end{aligned}$$

При доказательстве формулы (1.51) учтено, что  $f_1(t) \equiv f_2(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ .

**Теорема об умножении на экспоненту**

$$L\{e^{-\lambda t} \cdot f(t)\} = F(s + \lambda). \quad (1.52)$$

Имеем по определению

$$L\{e^{-\lambda t} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+\lambda)t} dt.$$

Правая часть последнего выражения есть ни что иное, как изображение по Лапласу от функции  $f(t)$  с аргументом  $s + \lambda$ .

**Теорема подобия**

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (1.53)$$

Действительно, в интеграле

$$L\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt,$$

введем новую переменную  $\tau = at$ . Тогда  $dt = d\tau/a$  и имеем следующую цепочку формул:

$$L\{f(at)\} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(at) e^{-s \frac{at}{a}} d\tau = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{s\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

**Теорема свертки в области изображений** Изображение произведения функций равно свертке их изображений

$$L\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s-\xi) \cdot F_2(\xi) d\xi, \quad (1.54)$$

где вдоль пути интегрирования величина  $c$  удовлетворяет соотношению

$$\tau_2 \prec c \prec Re s - \tau_1, \quad (1.54')$$

и

$$Re s \succ \max\{\tau_1, \tau_2, \tau_1 \cdot \tau_2\}, \quad (1.54'')$$

$\tau_1, \tau_2$  - абсиссы сходимости для функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  соответственно.

Имеем:

$$L\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(t) e^{-st} dt,$$

где  $f_2(t)$  в правой части заменим по формуле (1.42).

$$\begin{aligned} L\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(\xi) \cdot e^{+\xi t} d\xi \right] f_1(t) e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(\xi) \left[ \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-(s-\xi)t} dt \right] d\xi = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(\xi) \cdot F_1(s-\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Для сходимости интегралов Лапласа от функций  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и их произведения вещественная часть комплексной переменной  $s$  должна быть достаточно большой, по крайней мере, больше абсцисс абсолютной сходимости функции  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , а также их произведения; отсюда следует условие (1.54"). Для сходимости интеграла в первых квадратных скобках величина  $c$  должна превышать  $\tau_2$ , т.е. должно быть  $c > \tau_2$ . Сходимость интеграла во вторых квадратных скобках будет обеспечена, если  $Re(s-\xi) > \tau_1$  или  $Re \xi < Re s - \tau_1$ . Объединение этих условий приводит к соотношению (1.54').

### 1.5.3 Преобразование Лапласа и дифференциальные уравнения

Свойства преобразования Лапласа, описанные в предыдущем подразделе, позволяют успешно применять преобразование Лапласа для решения линейных стационарных (и в некоторых случаях нестационарных) дифференциальных уравнений. Возьмём дифференциальное уравнение общего вида (1.8)

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m) r(t).$$

и применим к правой и левой частям этого уравнения преобразование Лапласа. В результате получим

$$A(s) \cdot Y(s) - M(s) = B(s) \cdot R(s), \quad (1.55)$$

где

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n \quad (1.56)$$

$$M(s) = m_0 s^{n-1} + \dots + m_{n-2} s + m_{n-1}, \quad (1.57)$$

$$B(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m, \quad (1.58)$$

причём

$$\begin{aligned} m_0 &= a_0 y(0), \\ m_1 &= a_0 y'(0) + a_1 y(0), \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m_{n-2} = a_0 y^{(n-2)}(0) + a_1 y^{(n-3)}(0) + \dots + a_{n-2} y(0),$$

$$m_{n-1} = a_0 y^{(n-1)}(0) + a_1 y^{(n-2)}(0) + \dots + a_{n-1} y(0).$$

Разрешая уравнение (1.55) относительно  $Y(s)$  получим

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot R(s) + \frac{M(s)}{A(s)} = W(s) \cdot R(s) + W_H(s). \quad (1.60)$$

При нулевых начальных условиях второе слагаемое в первой части формулы (1.60), как легко видно из (1.58) и (1.59), равно нулю. Поэтому строгое определение передаточной функции линейной системы, учитывая формулу (1.60), можно сформулировать так: передаточная функция системы  $W(s)$  есть отношение изображений по Лапласу выхода системы  $Y(s)$  к её входу  $R(s)$  при нулевых начальных условиях:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}. \quad (1.61)$$

Функции  $W(s)$  и  $W_H(s)$  являются рациональными дробями, которые известными методами могут быть разложены на элементарные дроби. Переходя в формуле (1.60) во временную область и применяя теорему свёртки, получим

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau) \cdot r(\tau) d\tau + w_H(t). \quad (1.62)$$

Таким образом, мы получим общее решение уравнения (1.8), содержащее  $n$  произвольных постоянных, роль которых выполняют значения искомой функции  $y(t)$  и её  $n-1$  производных. Конкретная форма решения будет зависеть от того, каковы будут корни характеристического уравнения (1.15)

$$A(s) = 0.$$

1. Все корни уравнения (1.15) действительны и различны:

$$A(s) = a_0(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n). \quad (1.63)$$

Тогда

$$W(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n},$$

$$W_H(s) = \frac{B_1}{s-s_1} + \frac{B_2}{s-s_2} + \dots + \frac{B_n}{s-s_n},$$

где постоянные коэффициенты  $A_i$  и  $B_i$  определяются известными формулами разложения

$$A_i = \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}, B_i = \frac{M(s_i)}{A'(s_i)}.$$

Окончательно имеем

$$w(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}, w_H(t) = \sum_{i=1}^n B_i e^{s_i t} \quad (1.64)$$

и подставляя (1.64) в (1.62) получим

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \frac{e^{s_i t} B(s_i)}{A'(s_i)} \left( \int_0^t r(\tau) e^{-s_i \tau} d\tau + M(s_i) \right). \quad (1.65)$$

2. Все корни уравнения (1.15) нулевые, то есть

$$A(s) = a_o s^n.$$

и, следовательно,

$$W(s) = \frac{1}{a_o} \left( \frac{b_m}{s^n} + \frac{b_{m-1}}{s^{n-1}} + \dots + \frac{b_o}{s^{n-m}} \right),$$

$$W_H(s) = \frac{1}{a_o} \left( \frac{m_o}{s} + \frac{m_1}{s^2} + \dots + \frac{m_{n-1}}{s^n} \right).$$

Применяя к последним выражениям обратное преобразование Лапласа, получим

$$w(t) = \frac{1}{a_o} \left( \frac{b_m t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{b_{m-1} t^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{b_o t^{n-m-1}}{(n-m-1)!} \right),$$

$$w_H(t) = \frac{1}{a_o} \left( m_o + m_1 t + m_2 \frac{t^2}{2!} + \dots + m_{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right). \quad (1.66)$$

В этом случае уравнение (1.62) примет вид

$$y(t) = \frac{1}{a_o} \sum_{k=0}^m \int_0^t r(\tau) \frac{b_{m-k} (t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} d\tau + \frac{1}{a_o} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{m_k t^k}{k!}.$$

3. Корни уравнения (1.15) действительны и равны между собой (кратность единственного корня равна  $n$ ):

$$A(s) = a_o (s - s_1)^n.$$

Тогда

$$w(s) = \frac{B(s)}{a_o(s-s_1)^n} = \frac{c_n}{(s-s_1)^n} + \frac{c_{n-1}}{(s-s_1)^{n-1}} + \dots + \frac{c_1}{(s-s_1)^1},$$

$$w_H(s) = \frac{M(s)}{a_o(s-s_1)^n} = \frac{d_n}{(s-s_1)^n} + \frac{d_{n-1}}{(s-s_1)^{n-1}} + \dots + \frac{d_1}{(s-s_1)^1},$$

где  $c_i$  и  $d_i$  – коэффициенты, определяемые известными способами разложения рациональных дробей на элементарные. Из последних выражений следует, что

$$w(t) = e^{sit} \sum_{k=1}^n \frac{c_k t^{k-1}}{(k-1)!},$$

$$w_H(t) = e^{sit} \sum_{k=1}^n \frac{d_k t^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (1.68)$$

Решение уравнения (1.8) получаем в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k \int_0^t r(\tau) \frac{(t-\tau)^{k-1} e^{s_i(t-\tau)}}{(k-1)!} d\tau + e^{sit} \sum_{k=1}^n \frac{d_k t^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (1.69)$$

Были рассмотрены только наиболее простые частные случаи.

В общем случае характеристический многочлен  $A(s)$  может иметь: простые действительные корни, кратные действительные корни, кратные нулевые корни, простые комплексные корни, кратные комплексные корни. Таким образом, структура многочлена  $A(s)$  имеет вид

$$A(s) = a_o(s-s_1) \dots (s-s_i) (s-s_{i+1})^l s_{i+2}^p (s^2+b_1s+c_1) \dots$$

$$\cdot (s^2+b_k s+c_k) \cdot (s^2+b_{k+1} s+c_{k+1})^r \dots \quad (1.69)$$

Тогда разложение функций  $W(s)$  и  $W_H(s)$  на элементарные дроби будет иметь вид

$$W(s) = \sum_{\alpha=1}^i \frac{A_{\alpha}}{s - s_{\alpha}} + \sum_{\beta=1}^l \frac{B_{\beta}}{(s - s_{i+1})^{\beta}} + \sum_{\gamma=1}^p \frac{C_{\gamma}}{s_{i+2}^{p-\gamma}} + \sum_{\delta=1}^k \frac{D_{\delta}s + E_{\delta}}{s^2 + b_{\delta}s + c_{\delta}} +$$

$$+ \sum_{\zeta=1}^r \frac{D_{\zeta} + E_{\zeta}}{(s^2 + b_{k+1}s + c_{k+1})^{\zeta}},$$

$$W_H(s) = \sum_{\alpha=1}^i \frac{A'_{\alpha}}{s - s_{\alpha}} + \sum_{\beta=1}^l \frac{B'_{\beta}}{(s - s_{i+1})^{\beta}} + \sum_{\gamma=1}^p \frac{C'_{\gamma}}{s_{i+2}^{p-\gamma}} + \sum_{\delta=1}^k \frac{D'_{\delta}s + E'_{\delta}}{s^2 + b_{\delta}s + c_{\delta}} +$$

$$+ \sum_{\zeta=1}^r \frac{D'_{\zeta} + E'_{\zeta}}{(s^2 + b_{k+1}s + c_{k+1})^{\zeta}},$$

где коэффициенты  $A_{\alpha}, B_{\beta}, C_{\gamma}, D_{\delta}, E_{\delta}, D_{\zeta}, E_{\zeta}$  – некоторые постоянные, а  $A'_{\alpha}, B'_{\beta}, C'_{\gamma}, D'_{\delta}, E'_{\delta}, D'_{\zeta}, E'_{\zeta}$  – линейные однородные функции начальных условий.

Применение к последним выражениям обратного преобразования Лапласа, которое можно осуществить частично по формулам (1.64), (1.66), (1.68), а частично используя существующие таблицы изображений по Лапласу, даёт функции  $w(t)$  и  $w_H(t)$ . Подстановка полученных функций  $w(t)$  и  $w_H(t)$  в уравнение (1.62) позволяет получить общее решение дифференциального уравнения (1.8).

Получение решения  $y(t)$  упрощается во многих частных, но широко распространённых в теории систем случаях, именно тогда, когда изображение по Лапласу входного сигнала  $R(s)$  представляет дробно-рациональную функцию:

$$R(s) = \frac{N(s)}{P(s)}, \quad (1.71)$$

где  $N(s)$  и  $P(s)$  – некоторые многочлены. В этих случаях нет необходимости использовать интеграл свёртки и записывать решение в форме уравнения (1.62). Подставив соотношение (1.71) в уравнение (1.60), получим

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{N(s)}{P(s)} + \frac{M(s)}{A(s)} = \frac{B(s) \cdot N(s)}{D(s)} + \frac{M(s)}{A(s)}.$$

Знаменатели обоих слагаемых в правой части последнего выражения в общем виде могут быть представлены в форме (1.70), и разложение на элементарные дроби с дальнейшим переходом во временную область сразу даёт решение  $y(t)$ .



## 1.6 Другие интегральные преобразования

### 1.6.1 Разложение произвольных функций по элементарным функциям

Формулы (1.38) и (1.42) являются частными случаями более общей формулы

$$y(t) = \int_c Y(\lambda) \cdot k(t, \lambda) d\lambda, \quad (1.72)$$

где интегрирование в случае действительной  $\lambda$  ведётся от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а в случае комплексной  $\lambda$  – по контуру в комплексной плоскости так, чтобы интеграл (1.72) сходиллся;  $k(t, \lambda)$  представляет собой семейство элементарных функций, по которым раскладывается  $y(t)$ , а спектральная функция  $Y(\lambda)$  служит мерой относительного влияния элементарных функций, составляющих  $y(t)$ .

Для преобразования Фурье

$$k(t, \lambda) = e^{j\lambda t} / 2\pi$$

при  $-\infty < t < +\infty$ , где  $\lambda$  – действительная переменная, то есть формула (1.38) представляет собой разложение функции  $y(t)$  по гармоническим составляющим. Для одностороннего преобразования Лапласа

$$k(t, \lambda) = e^{j\lambda t} / 2\pi j$$

при  $0 < t < \infty$  (переменная  $\lambda$  здесь является комплексной).

Чтобы уравнение (1.72) было полезным, нужно уметь находить  $Y(\lambda)$  для произвольной функции  $y(t)$ . Поскольку уравнение (1.72) линейно, можно полагать, что  $Y(\lambda)$  найдётся в следующем виде:

$$Y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) k^{-1}(\lambda, t) dt, \quad (1.73)$$

где функция

$$k^{-1}(\lambda, t)$$

известна как обратное преобразование

$$k(\lambda, t).$$

Соотношение между функциями  $k^{-1}(\lambda, t)$  и  $k(\lambda, t)$  можно получить, воспользовавшись свойствами дельта-функции. Действительно, положив в формуле (1.73)  $y(t) = \delta(t - \tau)$ , получим

$$Y(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) k^{-1}(\lambda, t) dt = k^{-1}(\lambda, \tau).$$

Подставляя полученное выражение в формулу (1.72), имеем

$$\delta(t - \tau) = \int_c k^{-1}(\lambda, \tau) k(t, \lambda) d\lambda. \quad (1.74)$$

Соотношение (1.74) устанавливает связь функций  $k^{-1}(\lambda, t)$  и  $k(\lambda, t)$ .

Например, для одностороннего преобразование Лапласа функция  $k^{-1}(\lambda, t)$  равна  $e^{-\lambda t}$  при  $t > 0$  и нулю при  $t \leq 0$  (сравни формулу преобразования Лапласа (1.41) и формулу (1.73)).

Выражение (1.73) носит название интегрального преобразования функции  $y(t)$  в общем виде. Задавая конкретные функции  $k^{-1}(\lambda, t)$ , получаем различные интегральные преобразования.

### 1.6.2 Преобразование Меллина

Преобразование Меллина задаётся формулами

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot t^{s-1} dt, \quad (1.75)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) t^{-s} ds, \quad (1.76)$$

где

$$s = c + j\omega.$$

Это преобразование тесно связано с преобразованиями Фурье и Лапласа, и теоремы, относящиеся к преобразованию Меллина, могут быть получены из соответствующих теорем, например, для преобразования Лапласа, путём замены переменной.

Например, аналогом теоремы свёртки в теории преобразования Меллина является следующая формула

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} dt \int_0^{\infty} f(\tau) g\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Из последней формулы легко получить аналоги равенства Парсеваля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau-j\infty}^{\tau+j\infty} F(s) \cdot G(1-s) ds &= \int_0^{\infty} f(t) g(t) dt, \\ \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau-j\infty}^{\tau+j\infty} F(s) \cdot G(s) ds &= \int_0^{\infty} f(t) g\left(\frac{1}{t}\right) dt. \end{aligned}$$

Преобразование Меллина можно успешно применять к решению определённого класса плоских гармонических задач в секториальной области, задач теории упругости, при изучении специальных функций, суммировании рядов и вычислениях интегралов.

### 1.6.3 Преобразование Бесселя

Преобразование Бесселя объединяет целый класс преобразований общего вида

$$f^*(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot K(\lambda t) dt,$$

где  $K(z)$  – функция Бесселя.

Функции Бесселя относятся к цилиндрическим функциям и задаются формулами:

-функция Бесселя первого рода  $\nu$ -го порядка

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)},$$

где

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\nu-1} dt$$

- гамма функция Эйлера;

-функция Бесселя второго рода  $\nu$ -го порядка

$$Y_{\nu}(x) = \frac{\cos \pi \nu J_{\nu}(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi \nu}.$$

К преобразованиям Бесселя относятся преобразование Ханкеля, Вебера, Мейера, Конторовича – Лебедева и ряд других преобразований.

**Преобразованием Ханкеля** называется интеграл

$$f_{\nu}^*(u) = H_{\nu} \{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cdot t J_{\nu}(ut) dt, \quad (1.77)$$

$$0 < u < \infty, \quad \nu > -\frac{1}{2}$$

Формула обращения имеет вид

$$f(t) = H_v^{-1} \{f_v^*(u)\} = \int_0^\infty f_v^*(u) J_v(tu) u du, \quad (1.78)$$

$$0 < t < \infty, \quad v > -\frac{1}{2}.$$

Из свойств преобразования Ханкеля достаточно привести два наиболее простых:

а) 
$$H_v \{f(at)\} = \frac{1}{a^2} f_v^*\left(\frac{u}{a}\right);$$

б) равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty u f_v^*(u) g_v^*(u) du = \int_0^\infty t f(t) \cdot g(t) dt,$$

$$(v > -\frac{1}{2}).$$

Обобщением формул (1.77), (1.78) будет *преобразование Вебера*, когда в соответствующих интегралах используется линейная комбинация функции Бесселя первого и второго рода  $v$ -го порядка.

Преобразование Вебера и Ханкеля применяются при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца, некоторых задач теории упругости и теплопроводности.

При решении дифференциальных уравнений типа Бесселя важное значение имеет интегральное преобразование Мейера. Оно определяется интегралом

$$\tilde{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cdot K_v(st) (st)^{\frac{1}{2}} dt,$$

где  $K_v(t)$  - функция Макдональда, определяемая формулой

$$K_v(t) = \frac{\pi}{2} j^{v+1} (J_v(jt) + j Y_v(jt)).$$

Формула обращения имеет вид

$$f(t) = \frac{1}{j\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\beta-j\lambda}^{\beta+j\lambda} I_v(ts) (ts)^{\frac{1}{2}} ds,$$

где

$$I_v(x) = j^{-v} J_v(jx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{v+2k}}{k! \Gamma(v+k+1)}.$$

Для преобразования Мейера определена свёртка и построено операционное исчисление.

**Преобразование Конторовича – Лебедева** относится к классу интегральных преобразований, в которых интегрирование ведётся по индексу функций Бесселя. Для преобразования Конторовича – Лебедева справедливо, в частности, равенство Парсеваля.

#### 1.6.4 Преобразование Гильберта

Возьмём разложение функции  $f(t)$  по гармоническим функциям

$$f(t) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) d\omega, \quad (1.79)$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \\ b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Положим

$$g(t) = \int_0^{\infty} (b(\omega) \cos \omega t - a(\omega) \sin \omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\tau - t) \omega \cdot f(\tau) d\tau. \quad (1.80)$$

Интеграл в правой части выражения (1.80) называется сопряженным к интегралу Фурье и получается формальной заменой в (1.79)  $a$  на  $b$  и  $b$  на  $-a$ . Из (1.80) имеем

$$g(t) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\tau - t) \omega \cdot f(\tau) d\tau = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos l(\tau - t)}{\tau - t} f(\tau) d\tau = \\ = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos l\theta}{\theta} [f(t + \theta) - f(t - \theta)] d\theta.$$

Применяя теорему Римана - Лебега, окончательно получаем

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(t + \tau) - f(t - \tau)}{\tau} d\tau. \quad (1.81)$$

Аналогично можно получить выражение для  $f(t)$

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{g(t + \tau) - g(t - \tau)}{\tau} d\tau. \quad (1.82)$$

Формулы (1.81) и (1.82) эквивалентны выражениям:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(x+t) - g(x-t)}{t} dt,$$

где символ V.P. означает главное значение интеграла в смысле Коши. Две последние формулы и представляют собой пару преобразований Гильберта.

### 1.6.5 Преобразование Лагерра

Преобразование Лагерра имеет вид

$$T\{f(t)\} = f^*(n) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot L_n(t) e^{-t} dt, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (1.83)$$

где  $L_n(t)$  – многочлены Лагерра  $n$ -ого порядка, определяемые формулой

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}).$$

Обратное преобразование задается в форме бесконечного ряда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^*(n) \cdot L_n(t). \quad (1.84)$$

Преобразование Лагерра естественно применяется для решения дифференциального уравнения Лагерра

$$\mathcal{L}x + nx = 0,$$

где

$$\mathcal{L}x(t) = tx''(t) + (1-t)x'(t).$$

Преобразование Лагерра сводит дифференциальную операцию  $\mathcal{L}x$  к алгебраической по формуле

$$T\{\mathcal{L}x(t)\} = -nx^*(n), \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Для преобразования Лагерра может быть определена свертка и построен аппарат операционного исчисления для операторов Лагерра  $\mathcal{L}x$ .

## 2 ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПО ВРЕМЕНИ СИСТЕМ

Будем полагать в этом разделе, что функции  $r(t)$  и  $y(t)$ , то есть входной и выходной сигнал системы, определены на счетном множестве моментов времени. Другими словами время течет дискретно, квантами через равные промежутки, обозначаемые в этом разделе буквой  $T$ , то есть  $t = kT$ , где  $k \in N_0$ . Для упрощения записи можно выбрать соответствующий масштаб по оси времени и положить  $T=1$ , то есть считать  $r(k)$  и  $y(k)$  как функции, определенные только при целых значениях  $k$ .

### 1.6 Прямой и обратный разностные операторы

Определим оператор сдвига  $E$  так:

$$E\{y(k)\} = y(k+1). \quad (2.1)$$

Последовательное применение этого оператора дает в общем случае

$$E^n\{y(k)\} = y(k+n), \quad (2.2)$$

где  $n \in N_0$ .

Разностный оператор  $\Delta$  можно определить как

$$\Delta y(k) = y(k+1) - y(k). \quad (2.3)$$

Оператор, определяемый формулой (2.3), называют еще правым разностным оператором, и он задает так называемую первую прямую разность функции  $y(k)$ , в отличие от используемого иногда левого разностного оператора  $\nabla$ , определяемого выражением

$$\nabla y(k) = y(k) - y(k-1)$$

и задающего первую обратную разность функции  $y(k)$ .

Выражение (2.3) с учетом (2.1) можно записать в виде

$$\Delta y(k) = (E - I) y(k),$$

где операторы  $\Delta$  и  $E$  связаны соотношением

$$\Delta = E - I. \quad (2.4)$$

Разности второго, третьего и более высокого порядков определяются по очевидным формулам:

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(k) &= \Delta(\Delta y(k)) = y(k+2) - 2y(k+1) + y(k), \\ \Delta^3 y(k) &= \Delta(\Delta^2 y(k)) = y(k+3) - 3y(k+2) + 3y(k+1) - y(k) \end{aligned}$$

или, в общем случае,

$$\Delta^n y(k) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} y(k+n-r), \quad (2.5)$$

где через  $\binom{n}{r}$  обозначены биномиальные коэффициенты. С учетом уравнений (2.2) и (2.4) из выражения (2.5) получим

$$\Delta^n y(k) = (E - I)^n y(k) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} E^{n-r} y(k).$$

Операторы  $\Delta$  и  $E$  являются линейными операторами, то есть справедливы следующие соотношения, например, для оператора  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta(c y(k)) &= c \Delta y(k), \\ \Delta^m(y(k)+x(k)) &= \Delta^m y(k) + \Delta^m x(k), \\ \Delta^n \Delta^m y(k) &= \Delta^m \Delta^n y(k) = \Delta^{n+m} y(k), \end{aligned}$$

где  $c$  – константа,  $m$  и  $n$  – целые положительные числа.

Таким образом, оператор  $\Delta$  для функций дискретного переменного является аналогом дифференциального оператора  $s = d/dt$  для непрерывных функций. Чтобы еще раз подчеркнуть эту аналогию, рассмотрим производную от непрерывной функции  $f(t)$

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{f(t+T) - f(t)}{T}.$$

Если функцию  $f(t)$  рассматривать только в дискретные моменты времени  $t = kT$  ( $k \in N_0$ ), то оператор сдвига и разностный оператор дадут выражения

$$Ef(t) = f(t+T) \text{ и } \Delta f(t) = f(t+T) - f(t).$$

Тогда получим

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Delta f(t)}{T}$$

или для случая  $m$ -ой производной

$$\frac{d^m f(t)}{dt^m} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\Delta^m f(t)}{T^m}.$$

Существуют и разностные формулы, аналогичные (но не идентичные) формулам дифференцирования.

Например:



$$\Delta(y(k) \cdot x(k)) = \Delta y(k) \cdot \Delta x(k) + y(k) \cdot \Delta x(k) + \Delta y(k) \cdot x(k),$$

$$\Delta \left( \frac{y(k)}{z(k)} \right) = \frac{z(k) \cdot \Delta y(k) - y(k) \cdot \Delta z(k)}{z(k) \cdot z(k+1)}.$$

Дифференцирование многочленов аналогично вычислению разностей факториальных многочленов. Произвольный обыкновенный многочлен можно представить суммой факториальных многочленов. Факториальный многочлен  $m$ -го порядка определяется как

$$(k)^{(m)} = k(k-1)(k-2) \dots (k-m+1), \quad (2.6)$$

где  $m$  – положительное целое число.

Согласно определению разностного оператора, имеем

$$\Delta(k)^{(m)} = m(k)^{(m-1)} = mk(k-1) \dots (k-m+2). \quad (2.7)$$

Найдем теперь обратный оператор, аналогичный интегральному оператору  $s^{-1}$ , где

$$s^{-1}(f(t)) = \int f(t)dt + c = \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau + K, \quad (2.8)$$

где  $c$  и  $K$  – постоянные интегрирования. Нижний предел  $t_0$ , вообще говоря, произвольный и определяется началом отсчета времени при анализе системы (обычно моментом поступления входного воздействия). Величина  $t_0$  формирует часть постоянной интегрирования, именно:

$$c = K - \int f(t)dt \Big|_{t=t_0}.$$

Выражение

$$y(t) = s^{-1}(f(t))$$

является решением уравнения

$$s y(t) = f(t).$$

Соответственно, выполняется соотношение

$$s \cdot s^{-1} f(t) = f(t).$$

По аналогии обратный оператор  $\Delta^{-1}$  должен иметь такой вид, чтобы выражение

$$y(k) = \Delta^{-1} f(k),$$

являлось решением уравнения

$$\Delta y(k) = f(k), \quad (2.9)$$

или, чтобы удовлетворялось равенство

$$\Delta \Delta^{-1} f(k) = f(k). \quad (2.10)$$

Так как

$$\Delta \left( \sum_{n=0}^{k-1} f(n) + K \right) = (f(k) + f(k-1) + \dots + f(0) + K) - (f(k-1) + \dots + f(0) + K) = f(k),$$

то обратный оператор, удовлетворяющий уравнениям (2.9) и (2.10), имеет вид:

$$\Delta^{-1} f(k) = \sum_{n=0}^{k-1} f(n) + K. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11), определяющее обратный оператор, можно переписать так

$$\Delta^{-1} f(k) = \sum_{n=k-l}^{n=k-1} f(n) + c = \sum_{n=k}^{n=k} f(n-l) + c, \quad (2.12)$$

где суммирование производится по фиктивной переменной  $n$ . Нижний предел в уравнении (2.12) не указан, так как можно объединить произвольное число членов  $f(0), f(1), f(2) \dots$  в уравнении (2.11) с постоянной суммирования  $K$  и образовать новую постоянную  $c$ . Таким образом, произвольный предел в уравнении (2.12) является аналогом постоянной  $t_0$  в уравнении (2.8) и его выбор определяется наиболее выгодным образом для каждого конкретного случая.

В отличие от интегралов, точное вычисление которых требует определенного искусства, а иногда и невозможно, для операторов  $\Delta^{-1}$  таких сложностей не существует, однако вычисление  $\Delta^{-1} f(k)$  непосредственно по формуле (2.12) довольно утомительно, особенно при больших  $k$ . Поэтому желательно выражать  $\Delta^{-1} f(k)$  в замкнутом свернутом виде. Суммирование конечных рядов (как и вычисление интегралов) подчиняется определенным правилам. Существуют таблицы формул суммирования, правило суммирования по частям (аналог интегрирования по частям), используются многочлены Бернулли, разложение функций на простые дроби и т.д.

Но не всегда конечные суммы можно свернуть и выразить в замкнутой форме. В некоторых случаях можно пользоваться верхней и нижней оценкой таких сумм.

При использовании факториальных многочленов из уравнения (2.7) можно получить с учетом формулы (2.12)

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}(k)^{(m)} &= \Delta^{-1}(k(k-1)\dots(k-m+1)) = \sum_{n=k-l}^{n=k-1} n(n-1)\dots(n-m+1) = \\ &= \frac{1}{m+1} k(k-1)\dots(k-m) + K = \frac{1}{m+1} (k)^{(m+1)} + K. \end{aligned}$$

Аналогами дифференциальных уравнений для дискретной переменной являются разностные уравнения или, как их еще называют, уравнения в конечных разностях.

## 2.2 Разностные линейные уравнения динамики

Общий вид разностного уравнения, связывающего выход  $y(k)$  со входом  $r(k)$  системы с дискретным временем, следующий

$$\begin{aligned} a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_{n-1} y(k+1) + a_n y(k) = \\ = b_0 r(k+m) + \dots + b_{m-1} r(k+1) + b_m r(k) . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Это же уравнение (2.13) можно представить в другом виде:

$$(c_0 \Delta^n + c_1 \Delta^{n-1} + \dots + c_{n-1} \Delta + c_n) y(k) = (d_0 \Delta^m + \dots + d_m) r(k) . \quad (2.14)$$

Переход от одной формы уравнения к другой очевиден, если иметь в виду соотношения (2.1) – (2.5). Уравнение (2.14) – более близкий аналог уравнению (1.5), а уравнение (2.13) легче использовать, и поэтому оно более распространено.

Для линейных систем коэффициенты уравнений (2.13) и (2.14) не зависят от  $y$  или  $r$ , а для стационарных систем они независимы и от  $k$ , то есть являются постоянными величинами.

Применяя оператор сдвига  $E$ , уравнение (2.13) перепишем в виде

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n) y(k) = (b_0 E^m + \dots + b_m) r(k). \quad (2.15)$$

Поскольку вход  $r(k)$  считается известным, правую часть уравнения (2.13) можно обозначить как известную вынуждающую функцию  $F(k)$ . Для линейных стационарных систем последнему уравнению можно придать вид

$$A(E)y(k) = B(E)r(k) = F(k) \quad (2.16)$$

или

$$(a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n) y(k) = F(k). \quad (2.17)$$

Разностными уравнениями описываются системы, в которых процессы являются функциями дискретного переменного. Чаще всего эта дискретная переменная – время, но это может быть и положение, пространственные координаты, например, в периодических структурах.

Уравнение (2.15), если  $a_0 \neq 0$  и  $a_n \neq 0$ , является разностным уравнением  $n$ -ого порядка. Если  $a_n = 0$ ,  $a_{n-1} \neq 0$  и  $a_0 \neq 0$ , то получим уравнение  $(n-1)$ -ого порядка. То есть в отличие от дифференциального уравнения, порядок разностного уравнения определяется разностью между высшей и низшей степеня-

ми  $E$ . При использовании оператора  $\Delta$ , например, в уравнении (2.14), установить порядок уравнения непосредственно по его виду невозможно. Уравнение (2.15) является неоднородным разностным уравнением, в отличие от однородного уравнения

$$(a_0 E^n + \dots + a_n) y(k) = 0. \quad (2.18)$$

Разностные уравнения, по сути, являются рекуррентными формулами. Уравнение (2.13) можно решить относительно  $y(k+n)$

$$y(k+n) = -1/a_0(a_1 y(k+n-1) - \dots - a_n y(k)) + F(k). \quad (2.19)$$

При известных значениях  $y(0) \div y(n-1)$  (аналог начальных условий)  $y(k)$  можно непосредственно найти для всех  $k \geq n$  путем последовательного применения уравнения (2.19).

Таким образом, в отличие от дифференциального уравнения,  $y(k)$  можно найти непосредственно по разностному уравнению для любых значений  $k$ . Но обычно не прибегают к итерационной процедуре, описываемой уравнением (2.19), а находят решение в замкнутой форме.

Однородное разностное уравнение  $n$ -ого порядка содержит  $n$  линейно независимых решений. Если  $a_0 \neq 0$  и  $a_n \neq 0$ , то независимые решения уравнения (2.18) можно обозначить через  $y_1(k)$ ,  $y_2(k)$ , ...,  $y_n(k)$ . Тогда условием (необходимым и достаточным) линейной независимости решений будет

$$C(k) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ E y_1 & E y_2 & \dots & E y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E^{n-1} y_1 & E^{n-1} y_2 & \dots & E^{n-1} y_n \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.20)$$

Определитель  $C(k)$  называется определителем Касорати.

Поскольку уравнение (2.18) линейное, то его решением будет и линейная комбинация независимых решений  $y_i(k)$ , то есть общее решение уравнения (2.18) можно записать как

$$y_0(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \dots + c_n y_n(k), \quad (2.21)$$

где  $c_i$  – постоянные, не зависящие от  $k$ .

Общее решение неоднородного уравнения (2.15), как и в случае дифференциальных уравнений, состоит из суммы общего решения  $y_0(k)$  однородного уравнения (2.18) и частного решения  $y_H(k)$ , удовлетворяющего уравнению (2.15)

$$y(k) = y_0(k) + y_H(k). \quad (2.22)$$

Так как в составляющей  $y_H(k)$  нет произвольных постоянных, то в решении (2.22) содержится  $n$  произвольных постоянных, которые определяются по начальным условиям  $y(0), y(1) \dots y(n-1)$ .

Решение уравнения (2.15) можно по аналогии с дифференциальными уравнениями искать в форме

$$y(k) = e^{uk},$$

где  $u$  — неизвестная постоянная величина, подлежащая определению. Но удобнее ввести обозначение  $z = e^u$  и предполагаемое решение записать в виде

$$y(k) = z^k. \quad (2.23)$$

Подставляя решение (2.23) в (2.15) и учитывая соотношение

$$E^m z^k = z^m z^k,$$

получим характеристическое уравнение

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0. \quad (2.24)$$

Если все корни характеристического уравнения различны и обозначены через  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , общее решение уравнения (2.15) получит вид

$$y_0(k) = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k + \dots + c_n z_n^k. \quad (2.25)$$

Можно показать, что при различных  $z_i$  отдельные решения  $y_i = z_i^k$  удовлетворяют условию (2.20) и, следовательно, независимы. Если же, например, корень  $z_1$  имеет кратность  $m$ , то составляющая общего решения, соответствующая этому корню, равна

$$y_{01}(k) = c_1 z_1^k + c_2 k z_1^k + c_3 k^2 z_1^k + \dots + c_m k^{m-1} z_1^k.$$

Для любого комплексного корня уравнения (2.24) с действительными коэффициентами должен существовать и комплексно сопряженный корень. Здесь аналогия с характеристическими уравнениями дифференциальных уравнений полная.

Особое внимание нужно уделять нулевым корням характеристического уравнения (2.24). Если  $a_n = 0$ ,  $a_{n-1} \neq 0$  и  $a_0 \neq 0$  в уравнении (2.18), то характеристическое уравнение содержит один нулевой корень. Так как в этом случае порядок разностного уравнения равен  $n-1$ , а характеристический полином

имеет порядок  $n$ , то нулевой корень оказывается лишним и не должен учитываться. Также не должны учитываться и нулевые кратные корни.

Вынужденное движение системы, то есть составляющую решения, соответствующую частному решению  $y_H(k)$  неоднородного уравнения (2.17), можно найти на основе тех же самых двух методов, как и в случае дифференциальных уравнений: методов неопределенных коэффициентов и вариации параметров.

Метод неопределенных коэффициентов применим только в случае, если в результате последовательного действия оператора  $E$  на вынуждающую функцию  $F(k)$  получится конечное число линейно независимых членов. Это будет в том случае, если  $F(k)$  является функцией полиномиальной, экспоненциальной, синусоидальной или гиперболической, либо содержит линейную комбинацию этих функций. Решение ищется в виде линейной комбинации независимых составляющих  $F(k)$ ,  $F(k+1)$ ,  $F(k+2)$ , ..., где каждая составляющая входит с неопределенными постоянными коэффициентами. Эти коэффициенты подбираются таким образом, чтобы предполагаемое решение удовлетворяло уравнению (2.17) для всех значений  $k$ .

Если составляющие  $F(k)$ ,  $F(k+1)$ , ... имеют такой же вид, как и составляющие решения  $y_0(k)$ , то предполагаемое частное решение видоизменяется. Все составляющие частного решения  $y_H(k)$ , совпадающие по виду с составляющими общего решения однородного уравнения  $y_0(k)$ , умножаются на  $k$  в той наименьшей степени, чтобы их тождественность нарушилась.

Второй метод – метод вариации параметров, позволяет получить выражение для  $y_H(k)$  для любой функции  $F(k)$ , если известно решение  $y_0(k)$ .

Рассмотрение метода вариации параметров начнем с уравнения первого порядка

$$(a_0 E + a_1) y(k) = F(k). \quad (2.26)$$

Общее решение состоит из одного члена

$$y_0(k) = c y_1(k).$$

Частное решение ищем в виде

$$y_H(k) = \mu(k) y_1(k). \quad (2.27)$$

Подставляя выражение (2.27) в (2.26) имеем

$$a_0 \mu(k+1) y_1(k+1) + a_1 \mu(k) y_1(k) = F(k).$$

В левую часть последнего уравнения добавим и вычтем член

$a_0 \mu(k) y_1(k+1)$ :

$$a_0 [\mu(k+1) y_1(k+1) - \mu(k) y_1(k+1)] + \mu(k) [a_1 y_1(k+1) + a_0 y_1(k)] = F(k).$$

Выражение в первых квадратных скобках есть  $y_1(k+1)\Delta\mu(k)$ , а вторые квадратные скобки равны нулю, так как  $y_1(k)$  есть решение однородного уравнения. Получим:

$$a_0\Delta\mu(k) y_1(k+1) = F(k),$$

откуда с учетом уравнения (2.12) находим

$$\mu(k) = \Delta^{-1} \frac{F(k)}{a_1 y_1(k+1)} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{F(n-1)}{a_1 y_1(n)}. \quad (2.28)$$

Перейдем теперь к уравнению второго порядка

$$(a_0 E^2 + a_1 E + a_2)y(k) = F(k). \quad (2.29)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_0(k) = c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k).$$

Частное решение уравнения (2.29) предполагаем в виде

$$y_H(k) = \mu_1(k)y_1(k) + \mu_2(k)y_2(k). \quad (2.30)$$

Для нахождения двух неизвестных функций  $\mu_1, \mu_2$  необходимы два уравнения. Первое уравнение получается из условия того, что соотношение (2.30) должно удовлетворять уравнению (2.29), а второе уравнение выбирается произвольно, но так, чтобы упростить вычисление  $y_H(k+1)$  и  $y_H(k+2)$ ; а именно

$$y_1(k+1) \Delta\mu_1(k) + y_2(k+1) \Delta\mu_2(k) = 0. \quad (2.31)$$

Учитывая, что  $\mu_i(k+1) = \mu_i(k) + \Delta\mu_i(k)$ , из уравнения (2.30) имеем (с учетом уравнения (2.31)):

$$\begin{aligned} E y_H(k) &= y_1(k+1)(\mu_1(k) + \Delta\mu_1(k)) + y_2(k+1)(\mu_2(k) + \Delta\mu_2(k)) = \\ &= y_1(k+1)\mu_1(k) + y_2(k+1)\mu_2(k) \end{aligned}$$

и

$$E^2 y_H(k) = y_1(k+2)(\mu_1(k) + \Delta\mu_1(k)) + y_2(k+2)(\mu_2(k) + \Delta\mu_2(k)).$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение (2.29) и проделывая очевидные преобразования получим

$$a_0[y_1(k+2)\Delta\mu_1(k)+y_2(k+2)\Delta\mu_2(k)]+\mu_1(k)[a_0y_1(k+2)+a_1y_1(k+1)+a_2y_1(k)]+\mu_2(k)[a_0y_2(k+2)+a_1y_2(k+1)+a_2y_2(k)]=F(k).$$

Поскольку  $y_1(k)$  и  $y_2(k)$  суть решения соответствующего однородного уравнения, то из последней формулы имеем

$$y_1(k+2)\Delta\mu_1(k)+y_2(k+2)\Delta\mu_2(k)=F(k)/a_0. \quad (2.32)$$

Теперь осталось решить систему уравнений (2.32) и (2.31) относительно неизвестных  $\Delta\mu_1(k)$  и  $\Delta\mu_2(k)$

$$\Delta\mu_1(k)=\frac{-y_2(k+1)\cdot F(k)}{a_0(y_1(k+1)\cdot y_2(k+2)-y_1(k+2)\cdot y_2(k+1))},$$

$$\Delta\mu_2(k)=\frac{y_1(k+1)\cdot F(k)}{a_0(y_1(k+1)\cdot y_2(k+2)-y_1(k+2)\cdot y_2(k+1))},$$

и определить сами функции  $\mu_1(k)$  и  $\mu_2(k)$ :

$$\mu_1(k)=-\sum_{n=k}^{\infty}\frac{y_2(n)\cdot F(n-1)}{a_0(y_1(n)\cdot y_2(n+1)-y_1(n+1)\cdot y_2(n))},$$

$$\mu_2(k)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{y_1(n)\cdot F(n-1)}{a_0(y_1(n)\cdot y_2(n+1)-y_1(n+1)\cdot y_2(n))}. \quad (2.33)$$

Знаменатели в (2.33) отличны от нуля, так как  $y_1(k)$  и  $y_2(k)$  – независимые решения однородного уравнения, а следовательно, выполняется условие (2.20).

Обобщим результаты решений уравнений первого и второго порядка на уравнение произвольного порядка (2.17).

Общее решение однородного уравнения берем в виде (2.21). Тогда частное решение ищется в форме

$$y_H(k)=\mu_1(k)y_1(k)+\dots+\mu_n(k)y_n(k). \quad (2.34)$$



Одно из условий, накладываемых на функции  $\mu_i(k)$ , - это удовлетворение исходного уравнения (2.17), а остальные  $n-1$  условий определяются уравнениями, аналогичными уравнению (2.31):

$$\begin{aligned} y_1(k+1) \Delta \mu_1(k) + y_2(k+1) \Delta \mu_2(k) + \dots + y_n(k+1) \Delta \mu_n(k) &= 0; \\ y_1(k+2) \Delta \mu_1(k) + y_2(k+2) \Delta \mu_2(k) + \dots + y_n(k+2) \Delta \mu_n(k) &= 0; \\ &\vdots \\ y_1(k+n-1) \Delta \mu_1(k) + \dots + y_n(k+n-1) \Delta \mu_n(k) &= 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Подставляя решение (2.34) в уравнение (2.17) и учитывая (2.35), после соответствующих преобразований будем иметь

$$y_1(k+n) \Delta \mu_1(k) + y_2(k+n) \Delta \mu_2(k) + \dots + y_n(k+n) \Delta \mu_n(k) = F(k)/a_0. \quad (2.36)$$

Решая систему из  $n$  уравнений (2.35) и (2.36), находим

$$\Delta \mu_i(k) = \frac{C_{ni}(k+1) \cdot F(k)}{a_0 C(k+1)},$$

или

$$\mu_i(k) = \sum_{n=k}^n \frac{C_{ni}(n) \cdot F(n-1)}{a_0 C(n)}, \quad (2.37)$$

где  $C(k)$  – определитель Касорати, а  $C_{ni}(k)$  – алгебраические дополнения  $ni$ -ых элементов. Из условия (2.20) следует, что  $C(k)$  отличен от нуля, если  $y_1(k) \div y_n(k)$  – линейно независимые решения однородного уравнения.

Выражение (2.37) дает в явном виде решение  $y_H(k)$  по известному  $y_0(k)$  для произвольной вынуждающей функции  $F(k)$ , хотя в некоторых случаях трудно представить в замкнутом виде входящую в формулу (2.37) сумму. Метод вариации параметров позволяет находить решение и разностных уравнений с переменными коэффициентами, то есть уравнений, описывающих нестационарные во времени системы. Завершая этот подраздел, введем понятие передаточной функции дискретной во времени системы.

Решим формально уравнение (2.15) или (2.16) относительно выхода  $y(k)$ :

$$y(k) = \frac{B(E)}{A(E)} \cdot r(k) = \frac{b_0 E^m + b_1 E^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 E^n + a_1 E^{n-1} + \dots + a_n} \cdot r(k). \quad (2.38)$$

- 1 Идентифицируем оператор  $E$  с некоторой независимой переменной  $z$ .  
Тогда характеристикой системы, описываемой уравнением (2.15), будет  
отношение полиномов  $B(z)$  к  $A(z)$ :

$$W(z) = \frac{B(z)}{A(z)}. \quad (2.39)$$

Последнее соотношение и определяет формально передаточную функцию дискретной системы (другие названия – «импульсная передаточная функция», «дискретная передаточная функция»). Более строго импульсная передаточная функция будет определена чуть дальше с использованием  $z$  - преобразования.

### 2.3 Дискретное преобразование Лапласа

Для исследования непрерывных систем широко применяется преобразование Лапласа. Но непосредственное применение преобразования Лапласа к разностному уравнению и, в частности, к любой решетчатой функции  $f(kT)$  тождественно дает нуль, так как площадь этой функции (или в физической интерпретации – энергия такого сигнала) равна нулю. Чтобы выйти из этого затруднительного положения, придадим функции  $f(kT)$  площадь, равную значению этой функции. Проще всего это сделать, умножив значение функции в точке  $t = kT$  на дельта – функцию, принимающую бесконечное значение в этой же точке. Прделав такую операцию для всех  $k$ , при которых определена функция  $f$ , получим импульсную функцию

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT), \quad (2.40)$$

представляющую собой последовательность «идеальных» импульсов с бесконечной амплитудой и бесконечно малой длительностью, причем каждый импульс имеет площадь, равную значению функции  $f(kT)$ . Точно такую же импульсную функцию можно получить и из непрерывной функции  $f(t)$ , применив к ней формулу (2.40)

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - kT) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = f(t) \delta_T(t), \quad (2.41)$$

где через  $\delta_T(t)$  обозначена соответствующая сумма  $\delta$  – функций.

Воспользовавшись выражением (2.41) можно дать одно из понятий дискретного преобразования Лапласа, наиболее удобное с инженерных позиций. Определим дискретное преобразование Лапласа функции  $f(t)$  как преобразо-

вание Лапласа от импульсной функции  $f^*(t)$ , соответствующей непрерывной функции  $f(t)$ :

$$F^*(s) = L\{f^*(t)\} = L\{f(t)\delta_T(t)\} \quad (2.42)$$

Преимущество такого определения состоит в том, что эта новая операция полностью выражается через уже знакомую и хорошо изученную операцию обычного преобразования Лапласа.

Согласно (2.42) и с учетом (2.41) имеем

$$F^*(s) = L\{f^*(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f^*(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) dt.$$

Поменяв в правой части последнего выражения порядок интегрирования и суммирования, получим

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - kT) dt = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT}. \quad (2.43)$$

В формуле (2.43) отсутствует  $\delta$  – функция, и она может быть использована непосредственно для решетчатой функции.

Нетрудно получить альтернативную формулу для вычисления дискретного преобразования Лапласа функции  $f(t)$  по ее обычному преобразованию Лапласа.

Опять воспользуемся выражениями (2.41) и (2.42).

Имеем

$$F^*(s) = L\{f^*(t)\} = L\{f(t)\delta_T(t)\}.$$

Для вычисления правой части последнего выражения используем теорему свертки в области изображений (см. формулу (1.54)); учитывая, что

$$L\{\delta_T(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) dt = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT}.$$

Ряд в правой части последнего выражения сходится при  $|e^{-sT}| < 1$ , т.е. при  $\text{Re } s > 0$  и его сумма равна  $1/(1 - e^{-Ts})$  (сумма геометрической прогрессии).

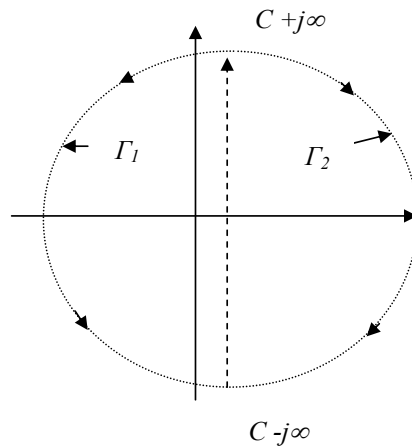
Таким образом, получим

$$F^*(s) = L\{f(t)\delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\xi) \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi. \quad (2.44)$$

При записи выражения (2.44) использована формула (1.54), причем в качестве функций  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$  взяты соответственно  $1/(1 - e^{-Ts})$  и  $F(s)$ , а величина  $c$  удовле-

творяет соотношениям (1.54') и (1.54''), следовательно, все полюсы функции  $F(s)$  лежат левее линии интегрирования. Абсцисса абсолютной сходимости функции  $\delta_T(t)$ , представляющей сумму  $\delta$ -функций, как известно, равна нулю, следовательно, для сходимости интеграла (2.44) требуется, чтобы  $\operatorname{Re} s > c$ . Из выражения (2.44) следует, что дискретное преобразование Лапласа существует для всех функций, для которых существует и обычное преобразование Лапласа.

Вычислить интеграл (2.44) можно, воспользовавшись теоремой о вычетах (теорема Коши), как сумму вычетов подынтегрального выражения в его полюсах, расположенных внутри контура интегрирования, который не должен иметь на себе особенностей подынтегрального выражения. Для этого необходимо замкнуть путь интегрирования. Это можно сделать, добавив к пути интегрирования бесконечно большую полуокружность либо в левой полуплоскости ( $R \rightarrow -\infty$ ) либо в правой ( $R \rightarrow +\infty$ ), как показано на рисунке 2.1. При этом получим замкнутый контур  $\Gamma_1$ , либо  $\Gamma_2$ .



3.1.1 Рисунок 2.1

В первом случае (контур  $\Gamma_1$ ) имеем

$$F^*(s) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} \frac{F(\xi_i)}{1 - e^{-T(s-\xi_i)}} \bigg|_{\xi=\xi_i}, \quad (2.45)$$

где  $\xi_i$  – полюсы функции  $F(s)$ , так как внутри контура  $\Gamma_1$  расположены только они.

4 Во втором случае получим выражение

$$F^*(s) = - \sum_{k=-\infty}^n F(\xi_k) \operatorname{Res} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi_k)}}, \quad (2.46)$$

где  $\xi_k$  – полюсы функции  $\frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}}$ , а знак “минус” возникает потому, что интегрирование по контуру  $\Gamma_2$  осуществляется по часовой стрелке.

Полюсы  $\xi_k$  в формуле (2.46) определяются уравнением

$$1 - e^{-T(s-\xi)} = 0,$$

откуда находим  $\xi_k = s + j\frac{2\pi}{T}k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Эти полюсы простые и, с учетом того, что  $\operatorname{Re} s > \sigma$ , находятся действительно внутри контура  $\Gamma_2$ .

Вычет в простом полюсе  $\xi_k$  находится по известной формуле

$$\operatorname{Res} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} \bigg|_{\xi=\xi_k} = \frac{1}{\frac{d}{d\xi}(1 - e^{-T(s-\xi)})} \bigg|_{\xi=\xi_k} = -\frac{1}{T}, \quad (2.47)$$

5 Подставляя выражение (2.47) в (2.46) получим

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_s k), \quad (2.48)$$

где  $\omega_s = 2\pi/T$  – круговая частота отсчетов времени  $t=kT$ .

Чтобы пользоваться формулами (2.45) и (2.48) необходимо убедиться в равенстве нулю интеграла по бесконечно большому радиусу в левой или правой полуплоскости от подинтегрального выражения (2.44).

Формулы (2.43) и (2.48) дают дискретное преобразование Лапласа в незамкнутой форме, а формула (2.45) – в замкнутой, что и определяет удобство пользования последней. Из свойств дискретного преобразования Лапласа полезно упомянуть свойство периодичности функции  $F^*(s)$ . Действительно, периодом такой функции будет  $j\omega_s$ . Это нетрудно показать, например, используя формулу (2.48). Подставим вместо  $s$  величину  $s + jn\omega_s$  в выражение (2.48), где  $n$  – целое число:

$$\begin{aligned}
 F^*(s + jn\omega_s) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_s k + j\omega_s n) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_s (k + n)) = \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_s m) = F^*(s),
 \end{aligned}$$

где  $m = k + n$ .

Этот же результат можно получить и из формулы (2.43):

$$\begin{aligned}
 F^*(s + jn\omega_s) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-(s + j\omega_s n)kT} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT} e^{-j2\pi nk} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-skT} = F^*(s),
 \end{aligned}$$

так как  $\omega_s = 2\pi/T$ , а экспонента в степени  $-2\pi jn$ , где  $m = nk$  – целое число, равна единице.

## 2.4 Z - Преобразование

### 2.4.1 Определение Z - преобразования

Дискретное преобразование Лапласа обладает одним недостатком, который существенно ограничивает его применение для исследования дискретных во времени систем, именно: наличие экспоненты в степени переменной  $s$  (это явно заложено в формулах (2.43) и (2.45) и неявно – в формуле (2.48)). То есть дискретное преобразование Лапласа не является дробно-рациональной функцией  $s$ , а появление множителя  $e^{-Ts}$  может привести к большим трудностям в вычислении обратного преобразования Лапласа. Желательно было бы преобразовать  $F^*(s)$  к такой форме, чтобы это стало дробно-рациональным выражением относительно некоторой новой переменной. Выбор такой переменной очевиден: это

$$z = e^{Ts} \text{ или } s = \frac{1}{T} \ln z, \quad (2.49)$$

(хотя в принципе и замена  $z = e^{-Ts}$  тоже сгодилась бы).

Из формул (2.49) видно, что  $z$  – это комплексная переменная, действительная и мнимая часть которой определяется как

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} z &= e^{T\sigma} \cos \omega T, \\
 \operatorname{Im} z &= e^{T\sigma} \sin \omega T,
 \end{aligned}$$

где  $s = \sigma + j\omega$ .

Таким образом,  $z$  - преобразование некоторой непрерывной функции  $f(t)$  можно определить как ее дискретное преобразование Лапласа после замены (2.49):

$$F(z) = Z\{f(t)\} = F^*(s) \Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = L\{f^*(t)\} \Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} \quad (2.50)$$

Из определения (2.50) следует, что  $z$  - преобразование существует для любой функции, имеющей преобразование Лапласа.

Для вычисления  $z$  - преобразования можно применить формулы (2.43), (2.45) и (2.48), из которых после замены переменной (2.49) получается соответственно

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}, \quad (2.51)$$

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Res} \frac{F(\xi_i)}{1 - z^{-1} \cdot e^{T\xi_i}} \Big|_{\xi=\xi_i}, \quad (2.52)$$

$$F(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s + j\omega_s k) \Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}. \quad (2.53)$$

Если задана функция  $f(t)$  или  $f(kT)$ , используется выражение (2.51). Строго говоря, на временные ряды или функции никаких ограничений не накладывается, хотя для того, чтобы записать  $z$  - преобразование в замкнутой форме, ряд (2.51) должен сходиться.

В случае, если задано преобразование Лапласа некоторой функции  $f(t)$ , ее  $z$  - преобразование определяется по формуле (2.52).

И, наконец, формула (2.53) обычно используется при частотном исследовании дискретных сигналов и при доказательстве некоторых теорем.

## 2.4.2 Обратное $Z$ - преобразование

Как известно, по изображению Лапласа  $F(s)$  вполне однозначно может быть восстановлена функция – оригинал  $f(t)$  (см. формулу (1.42)). Для  $z$  - преобразования обратное  $z$  - преобразование не является однозначным, то есть, если  $z$  - преобразование некоторой функции  $f(t)$  равно  $F(z)$ , то обратное  $z$  - преобразование, примененное к  $F(z)$ , не обязательно дает  $f(t)$ . Корректный результат обратного  $z$  - преобразования есть  $f(kt)$ . Об этом необходимо помнить и это является одним из ограничений метода  $z$  - преобразования.

В общем случае обратное  $z$  - преобразование может быть определено одним из трех методов.

**1. Метод разложения на простые дроби.** Этот метод при небольшой модификации соответствует методу разложения на простые дроби в преобразовании Лапласа.

Как известно, преобразование Лапласа может быть получено в виде

$$F(s) = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n}, \quad (2.54)$$

где  $s_i$  — простые полюсы, а  $A_i$  — вычеты в этих полюсах.

Тогда функция — оригинал определится по формуле (1.64) как сумма экспонент.

Для  $z$  - преобразования не нужно представлять функцию-изображение в форме (2.54). В таблицах обратное  $z$  - преобразование для функции  $A/z-a$  отсутствует (хотя при положительном значении  $a$  член такого вида соответствует последовательности импульсов с экспоненциально затухающей амплитудой, когда присутствует временная задержка).

Но известно, что обратное  $z$  - преобразование функции  $Az/z-e^{-aT}$  равно  $A \cdot e^{-akT}$ , следовательно, удобнее разложить на простые дроби функцию  $F(z)/z$ , а после этого обе части равенства умножить на  $z$ . Далее находим оригиналы для каждого из слагаемых и записываем результат в виде суммы полученных оригиналов.

Для функций — изображений, не содержащих нулей  $z=0$ , то есть не имеющих в качестве множителя в числителе  $z$ , временная последовательность оригинала будет иметь сдвиг по оси времени. В этом случае нахождение обратного  $z$  - преобразования будет таким.

Разложение  $F(z)$  представляется в обычном виде

$$F(z) = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \dots + \frac{A_n}{z-z_n},$$

после чего вводится вспомогательная функция

$$F_1(z) = zF(z) = \frac{A_1 z}{z-z_1} + \frac{A_2 z}{z-z_2} + \dots + \frac{A_n z}{z-z_n}.$$

По последнему выражению определяется функция оригинал  $f_1(kT)$  и, далее, функция  $f(kT)$ :

$$f(kT) = Z^{-1} \{F(z)\} = Z^{-1} \{z^{-1} F_1(z)\} = f_1[(k-1)T] \quad (2.55)$$

Последний переход в формуле (2.55) непосредственно следует из определения  $z$  - преобразования, если  $f(kT) \equiv 0$  при  $k < 0$ .

**2. Метод разложения в степенной ряд.** Из определения  $z$  - преобразования (формула (2.51)) следует, что обратное  $z$  - преобразование может быть получено разложением изображения  $F(z)$  в бесконечный ряд по степени  $z^{-1}$ :



$$F(z) = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(kT)z^{-k} + \dots \quad (2.56)$$

Величины  $f(kT)$  определяются непосредственно по виду этого выражения. Формулу (2.56) можно рассматривать как разложение в ряд Тейлора около бесконечно удаленной точки  $z \rightarrow \infty$ . Если обозначить через  $\varphi(z)$  функцию, получающуюся из  $F(z)$  заменой  $z$  на  $1/z$ , то из выражения (2.56) следует, что

$$\varphi(z) = f(0) + f(T)z + f(2T)z^2 + \dots + f(kT)z^k + \dots$$

является разложением в ряд Тейлора относительно начала координат и, следовательно,

$$f(kT) = \frac{1}{k!} \frac{d^k \varphi(0)}{dz^k}.$$

Но обычно проще найти эти коэффициенты непосредственно делением числителя на знаменатель, так как  $z$  - преобразование, как правило, дробно-рациональная функция  $z$ . Если использовать  $\varphi(z)$ , то многочлены при делении следует записывать в порядке возрастания степеней. Если же оперировать непосредственно с  $F(z)$ , числитель и знаменатель нужно записывать по возрастающим степеням  $z^{-1}$ .

Этот метод проще любого другого, если требуется определить  $f(kT)$  только в нескольких точках  $t = kT$ . Недостатком же его является невозможность получения общего выражения для  $k$ -ого члена в замкнутой форме.

**3. Метод, основанный на использовании формулы обращения.** Для обратного  $z$  - преобразования можно получить интеграл обращения, аналогичный интегралу обратного преобразования Лапласа (1.42).

Возьмем интеграл обратного преобразования Лапласа (1.42):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds,$$

где  $c$  – абсцисса абсолютной сходимости, следовательно, все особые точки функции  $F(s)$  лежат слева от линии интегрирования.

Имея в виду, что требуется получить в результате вывода формулы функцию  $f(kT)$ , заменим  $t = kT$  и разобьем линию интегрирования на бесконечное число отрезков:

$$\dots -\frac{3}{2}\omega_s < \omega < -\frac{1}{2}\omega_s, -\frac{1}{2}\omega_s < \omega < -\frac{1}{2}\omega_s, -\frac{1}{2}\omega_s < \omega < -\frac{3}{2}\omega_s, \dots,$$

общая формула для которых  $(n-1/2)\omega_s < \omega < (n+1/2)\omega_s$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

5.1.1.1.1 В результате получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{c+j\omega_s(n-\frac{1}{2})}^{c+j\omega_s(n+\frac{1}{2})} F(s) e^{kTs} ds.$$

В правой части последнего выражения поменяем местами операцию суммирования и интегрирования и вместо переменной интегрирования  $s$  введем переменную  $s+jn\omega_s$ .

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\frac{\omega_s}{2}}^{c+j\frac{\omega_s}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s+jn\omega_s) e^{kTs} e^{jnk\omega_s T} ds.$$

Вспоминая формулу (2.48) и учитывая  $e^{j2\pi nk} = 1$ , имеем

$$f(t) = \frac{T}{2\pi j} \int_{c-j\frac{\omega_s}{2}}^{c+j\frac{\omega_s}{2}} F^*(s) e^{kTs} ds.$$

Теперь от дискретного преобразования Лапласа  $F^*(s)$  перейдем к  $z$  - преобразованию заменой переменной (2.49).

Тогда  $ds = \frac{1}{T} \frac{dz}{z}$ , линия интегрирования в соответствии с преобразова-

нием  $z = e^{sT} = e^{cT} \cdot e^{j\omega T}$ ,  $-\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2}$  отобразится в окружность радиуса  $e^{cT}$ , причем область, лежащая слева от линии интегрирования для переменной  $s$ , отобразится внутрь окружности для переменной  $z$ , и окончательно получим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F(z) z^{k-1} dz, \quad (2.57)$$

где  $\Gamma$  - окружность радиуса  $e^{cT}$ . Так как  $F(s)$  не имеет особых точек на линии интегрирования и справа от нее, то все особые точки поинтегрального выражения (2.57) должны лежать внутри окружности  $\Gamma$ .

### 2.4.3 Свойства $z$ - преобразования

Свойства  $z$  - преобразования аналогичны соответствующим свойствам преобразования Лапласа и сформулированы в виде теорем. Доказательство

наиболее простых теорем предоставлено читателям. Применение этих теорем часто облегчает вычисление прямого и обратного  $z$  - преобразования.

**Теорема существования.** Для существования  $F(z)$  необходимо, чтобы  $f(t)$  была определена при всех  $t = kT$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).

**Теорема единственности.** Две функции времени имеют одно и тоже  $z$  - преобразование, если и только если они совпадают при всех  $t = kT$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

### **Теорема линейности**

$$Z \{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(z) + F_2(z), \quad (2.58)$$

$$Z \{c \cdot f(t)\} = c \cdot F(z) \quad (2.59)$$

где  $c$  — константа.

### **Теорема о сдвиге во временной области**

$$Z \{f(t - nT)\} = z^{-n} F(z). \quad (2.60)$$

$$Z \{f(t + nT)\} = z^n (F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k}). \quad (2.61)$$

Докажем формулу (2.60). Имеем по определению

$$Z \{f(t - nT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT - nT) z^{-k} = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f((k - n)T) z^{-(k-n)}.$$

Введем новый индекс суммирования  $m = k - n$ . Тогда

$$Z \{f(t - nT)\} = z^{-n} \sum_{m=-n}^{\infty} f(mT) z^{-m} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} f(mT) z^{-m} = z^{-n} F(z).$$

При доказательстве учтено, что  $f(t) \equiv 0$  при  $t < 0$ , и везде  $z$ -преобразование и преобразование Лапласа одностороннее без особого о том напоминания.

Докажем формулу (2.61):

$$\begin{aligned} Z \{f(t + nT)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT + nT) z^{-k} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} f((k + n)T) z^{-(k+n)} = \\ &= z^n \sum_{m=n}^{\infty} f(mT) z^{-m}. \end{aligned}$$

В сумме правой части последнего выражения не хватает  $n$  слагаемых для того, чтобы эта сумма равнялась  $z$  – изображению, поэтому добавим и вычтем их. В результате получим формулу (2.61)

$$\begin{aligned} Z\{f(t+nT)\} &= z^n \left( \sum_{m=n}^{\infty} f(mT)z^{-m} + \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{-m} - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{-m} \right) = \\ &= z^n \left( F(z) - \sum_{m=0}^{n-1} f(mT)z^{-m} \right). \end{aligned}$$

**Теорема об умножении оригинала на экспоненту**

$$Z\{e^{\pm at} f(t)\} = F(ze^{\mp aT}). \quad (2.62)$$

**Теорема о начальном значении**

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (2.63)$$

при условии, что предел существует.

Действительно, по определению

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots$$

Возьмем предел от левой части и почленно от правой при  $z \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t).$$

**Теорема о конечном значении**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})F(z) \quad (2.64)$$

при условии, что  $(1-z^{-1})F(z)$  является аналитической на окружности единичного радиуса  $|z|=1$  и вне круга, описываемого этой окружностью.

6 Для доказательства рассмотрим два ряда с конечным числом членов

$$\sum_{k=0}^n f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + \dots + f(nT)z^{-n} \quad (2.65)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f((k-1)T)z^{-k} &= f(0)z^{-1} + f(T)z^{-2} + \dots + f((n-1)T)z^{-n} = \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT)z^{-k}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Вычтем из ряда (2.65) ряд (2.66) и перейдем к пределу при  $z \rightarrow 1$ :

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \sum_{k=0}^n f(kT) z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right) = \sum_{k=0}^n f(kT) - \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) = f(nT).$$

В последнем выражении перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 1} \left( \sum_{k=0}^n f(kT) z^{-k} - z^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} \right).$$

7 Меняя порядок перехода к пределам и учитывая, что

$$8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(kT) z^{-k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(kT) z^{-k} = F(z),$$

получим искомую формулу (2.63)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(nT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z).$$

9 Требование отсутствия полюсов функции  $(1-z^{-1})F(z)$  на единичной окружности и вне ее гарантирует сходимость пределов в формуле (2.64).

**Теорема о дифференцировании по параметру**

$$Z \left\{ \frac{\partial f(t, a)}{\partial a} \right\} = \frac{\partial F(z, a)}{\partial a}. \quad (2.67)$$

**9.1 Теорема о свертке во временной области**

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = Z \left\{ \sum_{n=0}^k f_1(nT) \cdot f_2(kT - nT) \right\}. \quad (2.68)$$

Распишем правую часть

$$Z \left\{ \sum_{n=0}^k f_1(nT) \cdot f_2(kT - nT) \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k f_1(nT) \cdot f_2(kT - nT) z^{-k}.$$

Если  $n > k$ , то  $f_2((k-n)T) \equiv 0$ , поэтому можно без ущерба заменить верхний индекс во внутренней сумме на бесконечность. После этого введем новый индекс суммирования  $m = k - n$ :

$$Z \left\{ \sum_{n=0}^k f_1(nT) \cdot f_2(kT - nT) \right\} = \sum_{m=-n}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) \cdot f_2(mT) z^{-m-n}.$$

10 Функция  $f_2(mT) \equiv 0$  при отрицательных  $m$  и можно нижний индекс во внешней сумме заменить на нуль. После этого суммы легко разделяются и окончательно имеем формулу (2.68)

$$Z \left\{ \sum_{n=0}^k f_1(nT) \cdot f_2(kT - nT) \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) \cdot f_2(mT) z^{-m-n} =$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_2(mT) z^{-m} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f_1(nT) z^{-n} = F_1(z) \cdot F_2(z).$$

**Теорема о свертке в области изображений.**

$$Z\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi) \cdot F_2(z\xi^{-1})}{\xi} d\xi, \quad (2.69)$$

где  $\Gamma$  – окружность, лежащая в кольце

$$\sigma_1 < |\xi| < \frac{|z|}{\sigma_2}, \quad |z| > \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 \cdot \sigma_2\}, \quad (2.70)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – радиусы сходимости соответственно  $F_1(\xi)$  и  $F_2(\xi)$ .

11 Распишем левую часть формулы (2.69) в виде суммы

$$Z\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) \cdot f_2(kT) z^{-k}. \quad (2.71)$$

Для абсолютной сходимости этого ряда необходимо, чтобы  $|z|$  был бы больше, чем радиус сходимости  $\sigma_1, \sigma_2$ , то есть необходимо условие

$$|z| > \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1 \cdot \sigma_2\} \quad (2.72)$$

В сумме (2.71)  $f_1(kT)$  запишем как обратное  $z$  - преобразование от  $F_1(z)$  согласно формуле (2.57)

$$f_1(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} F_1(\xi) \cdot \xi^{k-1} d\xi, \quad (2.73)$$

где  $\Gamma$  – окружность, включающая все точки подинтегрального выражения, то есть выполнено условие

$$|\xi| > \sigma_1. \quad (2.74)$$

12 Из выражения (2.71) с учетом (2.73) имеем

$$Z\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{\Gamma} F_1(\xi) \xi^{k-1} d\xi \cdot f_2(kT) z^{-k} =$$

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi)}{\xi} \sum_{k=0}^{\infty} f_1(kT) (z \cdot \xi^{-1})^{-k} d\xi. \quad (2.75)$$

Ряд в правой части формулы (2.75) абсолютно сходится к функции  $F_2(z \cdot \xi^{-1})$  при условии  $|z \xi^{-1}| > \sigma_2$ , откуда

$$|\xi| < \frac{|z|}{\sigma_2}. \quad (2.76)$$

С учетом этого получаем окончательно формулу (2.69)

$$Z\{f_1(t) \cdot f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{F_1(\xi) F_2(z \xi^{-1})}{\xi} d\xi.$$

Условия (2.72), (2.74) и (2.76) в совокупности образуют условие (2.70).

## 2.5 Разностные уравнения и $z$ - преобразование

Решения разностных уравнений легко найти, используя  $z$  - преобразование.

Возьмем разностное уравнение в общем виде (2.13) при  $T=1$ :

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = b_0 r(k+m) + b_1 r(k+m-1) + \dots + b_n r(k).$$

Применим  $z$  - преобразование почленно к правой и левой частям этого уравнения. Учитывая теорему о сдвиге во временной области, получим

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) Y(z) - z^n a_0 y(0) - z^{n-1} [a_1 y(0) + a_2 y(1) + \dots + a_n y(n-1)] =$$

$$[b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_n] R(z) - z^m b_0 r(0) - z^{m-1} [b_1 r(0) + b_2 r(1) + \dots + b_n r(m-1)] +$$

$$+ \dots + b_{m-1} r(0). \quad (2.77)$$

Разрешив это уравнение относительно  $Y(z)$ , можно далее на основе методов обратного преобразования получить  $y(k)$ . Как видно, в уравнении (2.77) присутствуют члены от  $y(0)$  до  $y(n-1)$ . Эти члены представляют  $n$  граничных (начальных) условий, необходимых для определения произвольных постоянных в классическом решении.

Соотношение (2.77) значительно упрощается, если разностное уравнение (2.13) описывает предварительно невозбужденную физически реализуемую

систему. Термин «предварительно невозбужденная система» означает, что запасенная системой к моменту времени  $t=0$  энергия равна нулю, или, что  $y(k)=r(k) \equiv 0$  при  $k < 0$ .

Для физически реализуемой системы реакция на выходе не может появиться ранее воздействия на ее входе, то есть в разложении по степеням  $z^{-1}$  отсутствуют члены с положительными степенями  $z$ , откуда следует, что в уравнении (2.13) должно выполняться условие  $m \leq n$ . Подставим в уравнение (2.13)  $k=-n, -(n-1), \dots, -2, -1$ . С учетом равенства нулю  $y(k)$  и  $r(k)$  при  $k < 0$ , получим

$$\begin{aligned} a_{0Y}(0) &= b_0 r(m-n) \\ a_{0Y}(1) + a_{1Y}(0) &= b_0 r(m-n+1) + b_1 r(m-n) \\ &\dots\dots\dots \\ a_{0Y}(n-1) + a_{1Y}(n-2) + \dots + a_{n-1Y}(0) &= b_0 r(m-1) + b_1 r(m-2) + \dots + b_{m-1} r(0) \end{aligned} \quad (2.78)$$

В правой части равенств (2.78) все слагаемые с отрицательным аргументом равны нулю.

Сравнивая выражения (2.78) и (2.77) нетрудно видеть что

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) Y(z) = (b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_n) R(z),$$

откуда

$$Y(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \cdot R(z) = W(z) \cdot R(z). \quad (2.79)$$

Из формулы (2.79) видно, что существует непосредственная связь между преобразованиями от входного и выходного сигналов предварительно невозбужденной системы. Эта связь устанавливается импульсной передаточной функцией

$$W(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^m + \dots + b_m}{a_0 z^n + \dots + a_n}, \quad (2.80)$$

которую можно определить как отношение  $z$  - преобразований выхода и входа предварительно невозбужденной системы. Сравнение выражений (2.80) и (2.38), (2.39) показывает, что импульсную передаточную функцию можно записать непосредственно по разностному уравнению.



### 3 МАТРИЦЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Полное описание достаточно сложной системы требует большого количества информации. Эта информация может быть представлена системами дифференциальных либо разностных уравнений. Удобно в этом случае пользоваться матричными формами представления такой информации. Анализ систем тогда сводится, как правило, к анализу свойств матриц. Мощным средством аппарат теории матриц является и при синтезе систем. Поэтому полезно еще раз вспомнить те разделы линейной алгебры, которые непосредственно относятся к изучению теории систем.

#### 3.1 Основные типы матриц и операции над ними

##### 3.1.1 Общие понятия

Как известно, матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из упорядоченных элементов. Элементами таблицы могут быть действительные или комплексные числа или функции от заданных переменных. В отличие от обычной прямоугольной таблицы матрица подчиняется определенным правилам сложения, вычитания, умножения и равенства. Элементы матрицы  $a_{ij}$  имеют двойной индекс, первый – это номер строки, второй – номер столбца, где располагается этот элемент. Матрица, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов, называется  $(m \times n)$  - матрицей, или матрицей порядка  $m$  на  $n$ .

Матрица  $(m \times 1)$  называется *матрицей – столбцом* или вектором – столбцом.

Матрица  $(1 \times n)$  называется *матрицей – строкой* или вектором – строкой.

*Диагональная* матрица – это квадратная матрица, все элементы которой, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

*Единичная* матрица – это диагональная матрица с элементами, равными единице.

*Нулевая* матрица – это матрица, все элементы которой тождественно равны нулю.

*Транспонированная* матрица – это матрица, у которой строки и столбца поменялись местами.

*Симметрическая* матрица – это квадратная матрица с действительными элементами, если она равна своей транспонированной  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ .

*Кососимметрическая* матрица – это квадратная действительная матрица, если  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ .

Если элементы матрицы  $\mathbf{A}$  комплексные  $a_{ij} = \alpha_{ij} + j\beta_{ij}$ , то *комплексно сопряженная* матрица  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$ , содержит элементы  $b_{ij} = \alpha_{ij} - j\beta_{ij}$ .

Матрица, *сопряженная* по отношению к матрице  $\mathbf{A}$ , является транспонированной и комплексно сопряженной по отношению к  $\mathbf{A}$ , то есть равна  $(\mathbf{A}^*)^T$ .

Если  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ , то матрица является *действительной*.

Если  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$ , то матрица  $\mathbf{A}$  *мнимая*.

Если матрица равна своей сопряженной, то она называется *эрмитовой*.

Для эрмитовой матрицы выполняется соотношение  $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*)^T$ .

Если выполняется соотношение  $\mathbf{A} = -(\mathbf{A}^*)^T$ , то матрица  $\mathbf{A}$  носит название *косоэрмитовой*.

### 3.1.2 Простейшие операции

Суммой (разностью) матриц одного порядка  $(m \times n)$  является матрица  $(m \times n)$   $\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B}$ , каждый элемент которой определяется как  $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ .

Две матрицы одного порядка равны  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$  если и только если равны их элементы  $a_{ij} = b_{ij}$ .

Определение произведения двух матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  непосредственно следует из аппарата линейных преобразований. Для существования произведения  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}$  матрица  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  должны быть согласованы по форме, то есть число столбцов матрицы  $\mathbf{A}$  должно быть равно числу строк матрицы  $\mathbf{B}$ . Тогда произведение  $\mathbf{C}$  двух матриц  $\mathbf{A} (m \times n)$  и  $\mathbf{B} (n \times p)$  определяется в виде

$$\mathbf{C} = [c_{ij}] = \left[ \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right].$$

Для матриц  $\mathbf{A} (m \times n)$  и  $\mathbf{B} (n \times m)$  существует как произведение  $\mathbf{A} \mathbf{B}$ , так и произведение  $\mathbf{B} \mathbf{A}$ , но в общем случае произведение не коммутативно, даже если  $m = n$ . Однако, если равенство  $\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{A}$  имеет место, то говорят, что матрица  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  *коммутируют*.

Из определения операции умножения видно, что умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения как справа, так и слева.

Умножение на скаляр  $k$  матрицы  $\mathbf{A}$  (справа или слева) означает, что на величину  $k$  умножается каждый элемент матрицы  $\mathbf{A}$ .

Произведение двух транспонированных матриц  $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$  равно транспонированному произведению исходных матриц, взятому в обратном порядке:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = (\mathbf{A} \mathbf{B})^T \quad (3.1)$$

в чем нетрудно убедиться, транспонируя матрицу  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}$ .

Умножение справа матрицы  $\mathbf{A}$  на диагональную матрицу  $\mathbf{D}$  равносильно операции со столбцами  $\mathbf{A}$ . Умножение слева матрицы  $\mathbf{A}$  на матрицу  $\mathbf{D}$  - это операция со строками  $\mathbf{A}$ . Очевидно, что умножение слева или справа на единичную матрицу  $\mathbf{E}$  не меняет исходной квадратной матрицы:

$$\mathbf{E} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{E} = \mathbf{A},$$

то есть матрица  $E$  является единичным элементом в некоммутативной полугруппе квадратных матриц по операции умножения.

Правило умножения блочных матриц, когда элементами матриц – сомножителей являются некоторые подматрицы, такое же, как и обычных матриц, важно только, чтобы подматрицы, фигурирующие в соответствующих произведениях, были согласованы по форме.

Дифференцирование и интегрирование матрицы – это соответствующие операции над ее элементами. Дифференцирование произведения матриц осуществляется также, как и дифференцирование скалярных функций при условии сохранения первоначального порядка следования сомножителей.

### 3.1.3 Определители, миноры и алгебраические дополнения

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Определитель квадратной матрицы  $A$  размерностью  $(n \times n)$  и обозначаемый  $|A|$  равен алгебраической сумме всех возможных произведений  $n$  элементов. Каждое произведение содержит только один элемент из каждой строки и столбца и имеет знак  $+$  или  $-$  в зависимости от того, четное или нечетное число инверсий (то есть расположений большего числа перед меньшим) вторых индексов содержится в произведении, если расположить элементы в порядке возрастания первых индексов.

Нетрудно установить следующие свойства определителей.

1. Определитель равен нулю, если равны нулю все элементы какой-либо строки (столбца) или если равны или пропорциональны соответствующие элементы произвольных двух строк (столбцов).

2. Величина определителя остается постоянной по модулю при перестановке строк (столбцов).

3. Знак определителя меняется на противоположный при перемене местами двух любых строк (столбцов).

4. Значение определителя умножается на постоянную  $k$ , если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на  $k$ .

5. Значение определителя не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить умноженные на  $k$  соответствующие элементы другой строки (столбца).

Если в определителе  $|A|$  вычеркнуть  $i$ -ю строку и  $j$ -столбец, то оставшиеся  $n-1$  строк и столбцов образуют определитель  $M_{ij}$ , называемый *минором* элемента  $a_{ij}$ . Миноры, у которых диагональные элементы являются диагональными элементами  $|A|$ , называются *главными*.

Алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$  – это минор элемента  $a_{ij}$ , взятый со знаком  $(-1)^{i+j}$ , то есть алгебраическое дополнение  $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ .

Используя алгебраические дополнения, можно по формуле Лапласа вычислить определитель матрицы  $A$ :

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}, \quad j = \{1, 2, \dots, n\} - \text{разложение по элементам столбца}, \quad (3.2.)$$

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}, \quad i = \{1, \dots, n\} - \text{разложение по элементам строки}.$$

Если заменить элементы  $i$ -ой строки (столбца) на соответствующие элементы  $k$ -ой строки (столбца), то согласно свойству первому определитель обратится в нуль. Следовательно, используя разложения (3.2), получим

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_{ij} = 0, (k \neq i), \quad (3.3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} C_{ji} = 0, (k \neq i).$$

Объединяя (3.2) и (3.3), получим

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_{ij} = \delta_{ik} \cdot |\mathbf{A}|, \quad (3.4)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{jk} C_{ji} = \delta_{ik} \cdot |\mathbf{A}|,$$

где  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера, равный единице при одинаковых индексах и нулю при различных индексах.

Определитель можно вычислить и воспользовавшись **методом опорного элемента**, который сводит процесс нахождения определителя к вычислению определителей второго порядка. Метод заключается в следующем.

В качестве опорного выбирается произвольный элемент  $a_{ij}$ . Берется произвольный элемент  $a_{ik}$ , расположенный в той же строке, что и  $a_{ij}$ , и элемент  $a_{qj}$ , расположенный в том же столбце, что и  $a_{ij}$ .

Из элементов  $a_{qk}$ ,  $a_{ik}$ ,  $a_{qj}$  и  $a_{ij}$  образуют определитель второго порядка, причем порядок элементов сохраняется. Составляют все возможные определители второго порядка, содержащие в качестве одного из элементов опорный. Используя в качестве элементов определителя второго порядка, а в качестве множителя  $\frac{1}{a_{ij}^{n-2}}$ , представляют исходный определитель как определи-

тель  $(n-1)$ -го порядка. Повторяя эту процедуру, можно вычислить определитель высокого порядка, последовательно уменьшая его порядок до единицы.

Необходимо отметить, что метод опорного элемента эффективнее в смысле числа перемножений, чем разложение определителя по формуле Лапласа, уже при  $n \geq 4$ .

Как следствие соотношений (3.2) (разложение Лапласа), производная от определителя по какому-либо из его элементов равна алгебраическому дополнению этого элемента

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} |\mathbf{A}| = \frac{\partial}{\partial a_{ij}} \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} = C_{ij}. \quad (3.5)$$

### 3.1.4 Присоединенная и обратная матрицы

Если  $\mathbf{A}$ - квадратная матрица, а  $C_{ij}$ - алгебраическое дополнение  $a_{ij}$ , то **присоединенной** для  $\mathbf{A}$  называется матрица, образованная из алгебраических дополнений  $C_{ji}$ , то есть

$$Adj \mathbf{A} = [C_{ji}]. \quad (3.6)$$

Таким образом, присоединенная матрица ( $Adj$  – по первым буквам английского слова *adjust* – приспособливать, прилаживать, присоединять) является транспонированной для матрицы, образованной заменой элементов  $a_{ij}$  их алгебраическими дополнениями.

Из уравнения (3.4) следует, что

$$[a_{ij}] \cdot [C_{ij}]^T = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}.$$

Учитывая определение (3.6) и умножив правую и левую часть последнего выражения на  $1/|\mathbf{A}|$  (при условии  $|\mathbf{A}| \neq 0$ ), получим

$$\mathbf{A} \cdot \frac{Adj \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{E}. \quad (3.7)$$

Из выражения (3.7) естественным образом определяется обратная матрица  $\mathbf{A}^{-1}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{Adj \mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}; \quad |\mathbf{A}| \neq 0. \quad (3.8)$$

Таким образом,

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}. \quad (3.9)$$

Нетрудно показать, что выполняется и соотношение

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}. \quad (3.10)$$

Действительно, возьмем тождество  $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}$  и умножив правую и левую его часть на  $\mathbf{E}$  справа, при этом  $\mathbf{E}$  в левой части тождества распишем согласно соотношению (3.9):

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}.$$

Используя свойство единичной матрицы и ассоциативность умножения, получим

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1},$$

откуда с неизбежностью следует (3.10).

Следовательно, матрица и обратная ей коммутативны. Если  $|\mathbf{A}|=0$ , то матрица  $\mathbf{A}$  называется **особенной**. Если  $|\mathbf{A}|\neq 0$ , то матрица называется **неособенной**. Таким образом, обратные матрицы существуют только для неособенных матриц.

Из выражения (3.8) следует, что обратная матрица для каждой неособенной матрицы является единственной и, следовательно, множество неособенных квадратных матриц по операции умножения образует некоммутативную группу.

Произведение обратных матриц подчиняется тем же правилам перестановки, что и произведение транспонированных матриц, то есть

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}.$$

Производная от обратной матрицы вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}^{-1}(t))=-\mathbf{A}^{-1}(t)\cdot\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\cdot\mathbf{A}^{-1}(t), \quad (3.11)$$

которую нетрудно получить, если рассмотреть соотношение

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}^{-1}(t)\cdot\mathbf{A}(t))=\frac{d\mathbf{E}}{dt}=[0]$$

Некоторые специальные обратные матрицы носят отдельные названия.

**Инволютивная** матрица – это такая матрица, которая совпадает со своей обратной, то есть  $\mathbf{A}\mathbf{A}=\mathbf{E}$ .

**Ортогональная** матрица – это матрица, для которой выполняется соотношение  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ .

**Унитарная** матрица удовлетворяет соотношению  $\mathbf{A} = ((\mathbf{A}^*)^T)^{-1}$ .

**Псевдообратная** матрица  $\mathbf{A}^+$  удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+, \quad (3.13)$$

$$\left( \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \right)^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}, \quad (3.14)$$

$$\left( \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \right)^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}. \quad (3.15)$$

Если не выполняются соотношения (3.14), (3.15) (одно из них или оба), то получаем **обобщенную обратную** матрицу.

Разумеется, что в случае невырожденной матрицы  $\mathbf{A}$  псевдообратная и обобщенная матрицы совпадают с обычной обратной матрицей.

## 3.2 Векторы и векторные пространства

### 3.2.1 Векторы и их свойства

Под вектором будем понимать матрицу размерностью  $(n \times 1)$  или вектор–столбец.

Зададим основные операции над векторами.

Скалярное произведение (или внутреннее произведение) двух векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  определяется формулой

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{x}^*)^T \cdot \mathbf{y} = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \dots + x_n^* y_n = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{x}^*. \quad (3.16)$$

В случае действительных  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  выражение (3.16) приобретает более знакомую форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

Ясно, что понятие скалярного произведения существует только для векторов одинаковой размерности.

Если вектор – строку  $(\mathbf{y}^*)^T$  ( $l \times m$ ) помножим слева на вектор – столбец  $\mathbf{x}$  ( $n \times l$ ), то получим **внешнее** произведение, представляющее матрицу ( $n \times m$ )

$$\mathbf{x} > < \mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{y}^*)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 y_1^* & \mathbf{x}_1 y_2^* & \dots & \mathbf{x}_1 y_m^* \\ \mathbf{x}_2 y_1^* & \dots & \dots & \mathbf{x}_2 y_m^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{x}_n y_1^* & \dots & \dots & \mathbf{x}_n y_m^* \end{bmatrix}.$$

Сумма и разность векторов, а также умножение вектора на скаляр следуют из соответствующих операций над матрицами.

Два вектора называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

**Нормой** вектора называют квадратный корень из скалярного произведения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , то есть

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{< \mathbf{x}, \mathbf{x} >}. \quad (3.17)$$

Можно показать, что из соотношения (3.17) вытекает два важных неравенства

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (\text{неравенство треугольника}) \\ \text{и} \quad & |< \mathbf{x}, \mathbf{y} >| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \quad (\text{неравенство Шварца}). \end{aligned}$$

Угол  $\theta$  между двумя векторами определяется формулой

$$\cos \theta = \frac{< \mathbf{x}, \mathbf{y} >}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Вектор  $\hat{\mathbf{x}}$  называют **нормированным**, если  $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ .

Два вектора будут **ортонормированы**, если они ортогональны и нормированы.

Векторы  $\mathbf{x}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  с компонентами  $x_{1i}$ ,  $x_{2i}, \dots, x_{ni}$  будут линейно независимы, если не существует таких постоянных  $k_1 \dots k_m$  (хоть одна из  $k_i$  не должна равняться нулю), что



$$k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_m \mathbf{x}_m = 0. \quad (3.18)$$

Основываясь на понятии линейной независимости векторов, дадим еще пару определений.

**Вырожденность** или **дефект** матрицы определяется так. Если строки (столбцы) особенной матрицы линейно связаны **одним** соотношением, то вырожденность матрицы **простая** (дефект равен единице). Если таких соотношений  $q$ , то матрица имеет вырождение кратности  $q$  (или дефект равен  $q$ ).

**Рангом**  $r$  матрицы  $\mathbf{A}$  является наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы  $\mathbf{A}$ . Если размерность матрицы  $(n \times n)$ , то  $r = n - q$ .

Существует правило вырожденности Сильвестра, которое гласит, что дефект произведения двух матриц не меньше дефекта каждой из них и не выше суммы дефектов матриц.

Условие линейной независимости векторов можно сформулировать на основе ранга матрицы, образованной из элементов  $m$  векторов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Если ранг матрицы  $\mathbf{A}$ , образованной этими  $m$  векторами ( $m \leq n$ ), меньше, чем  $m$ , то есть  $r < m$ , то существует  $r$  линейно независимых векторов. Остальные  $m - r$  векторов выражаются в виде линейной комбинации этих  $r$  векторов. Таким образом, необходимым и достаточным условием линейной независимости этих  $m$  векторов является равенство ранга матрицы  $\mathbf{A}$  величине  $m$ .

Определение ранга матрицы не всегда удобно, поэтому чаще линейную независимость определяют, пользуясь **определителем Грама**. Определитель Грама строится в предположении, что выполняется соотношение (3.18). Умножим уравнение (3.18) скалярно на  $\mathbf{x}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  и получим таким образом систему уравнений:

$$\begin{aligned} k_1 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle + \dots + k_m \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle &= 0 \\ k_1 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 \rangle + \dots + k_m \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m \rangle &= 0 \\ &\dots \\ k_1 \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle + \dots + k_m \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Эта система однородных уравнений имеет нетривиальное решение для  $k_i$  (то есть выполняется условие (3.18) и векторы  $\mathbf{x}_i$  являются линейно зависи-

мыми) только в том случае, если определитель матрицы с элементами  $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$  равен нулю. Этот определитель называется определителем Грама и равен

$$G = \begin{vmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m \rangle \\ \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \dots & \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \dots & \langle \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m \rangle \end{vmatrix}$$

или, с учетом обозначения (3.19),

$$G = | \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} |, \quad (3.20)$$

Следовательно, система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда определитель Грама (3.20) для такой системы отличен от нуля.

### 3.2.2 Векторное пространство и подпространство

Под векторным пространством понимают множество векторов, замкнутое относительно определенных в нем операций сложения и умножения на скаляр.

Сложение векторов ассоциативно и коммутативно.

Умножение на скаляр векторов ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно относительно сложения.

Векторное пространство, включающее все  $n$ -мерные векторы, называют  $n$ -мерным векторным пространством  $V_n$ . Векторное пространство с умножением на вещественный скаляр называется **эвклидовым**. Комплексный аналог носит название **унитарного** пространства. В случае бесконечномерных векторов (но с конечными значениями их норм) получаем **гильбертово** пространство.

Размерность векторного пространства определяется максимальным числом содержащихся в нем линейно независимых векторов.

Подпространство  $S_n$   $n$ -мерного векторного пространства  $V_n$  – это некоторое подмножество  $V_n$ , которое само является векторным пространством. Размерность подпространства  $S_n$  определяется, как обычно, максимальным числом линейно независимых векторов из  $S_n$ . Таким образом, подмножество векторов будет являться подпространством, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр.

Возьмем произвольный вектор  $\mathbf{x}$  из векторного пространства  $V_n$  и образуем из линейной комбинации его компонент вектор  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.21)$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная  $(n \times n)$  невырожденная матрица. Этот новый вектор  $\mathbf{y}$  будет принадлежать тому же пространству  $V_n$ . Уравнение (3.21) описывает линейное преобразование и в этом случае говорят, что векторное пространство  $V_n$  инвариантно относительно линейного преобразования, заданного квадратной невырожденной матрицей  $\mathbf{A}$ .

Если матрица  $\mathbf{A}$  имеет размерность  $(m \times n)$ , то каждая точка пространства  $V_n$  (каждый вектор  $\mathbf{x}$ ) отображается преобразованием (3.21) в некоторую точку пространства  $V_m$ . Линейное преобразование (3.21) сохраняет результат операций сложения и умножения на скаляр. Определим линейное преобразование  $T$  пространства  $V_n$  как отображение, сопоставляющее каждому вектору  $\mathbf{x} \in V_n$  вектор  $T(\mathbf{x}) \in V_m$  таким образом, что для всех векторов  $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in V_n$  и всех скаляров  $a_i$  и  $a_j$  выполняется соотношение

$$T(a_i \mathbf{x}_i + a_j \mathbf{x}_j) = a_i T(\mathbf{x}_i) + a_j T(\mathbf{x}_j).$$

Любую матрицу  $\mathbf{A}$  размерностью  $(m \times n)$  можно представить как строку  $m$ -мерных вектор – столбцов

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n],$$

поэтому уравнение (3.21) перепишем в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n,$$

где  $x_i$  – компоненты вектора  $\mathbf{x}$  могут принимать любые значения. Совокупность линейных комбинаций, определяемая как подпространство, порожаемое векторами  $\mathbf{y}$ , можно рассматривать как подпространство  $V_m$ , порожаемое столбцами матрицы  $\mathbf{A}$ . Размерность этого подпространства равна максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ .

### 3.2.3 Базис векторного пространства

Пространство  $V_n$  содержит согласно определению и все линейные комбинации векторов, принадлежащих этому пространству. Возьмем произвольное число  $m$  таких векторов. Множество векторов  $\mathbf{y}$ , являющихся линейной комбинацией этих векторов

$$\mathbf{y} = k_1 \mathbf{x}_1 + k_2 \mathbf{x}_2 + \dots + k_m \mathbf{x}_m \quad (3.22)$$

образуют векторное подпространство. Если только  $r$  векторов в выражении (3.22) являются линейно независимыми, то и размерность подпространства будет равна  $r$ - рангу системы векторов  $\mathbf{x}_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Это означает, что толь-

ко  $r$  компонент вектора  $y$  можно выбирать произвольно, остальные линейно зависят от этих  $r$  компонент.

Если же ранг матрицы системы векторов  $x_i$  равен  $n$ , то мы с помощью (3.22) получим вектор  $y$  из того же пространства  $V_n$ . Тогда систему из  $n$  линейно независимых векторов называют **линейной оболочкой** пространства  $V_n$ . Эти  $n$  линейно независимых векторов можно использовать и как **базис** пространства. Базисом пространства называют такую систему векторов, что произвольный вектор пространства выражается единственным образом в виде линейной комбинации этих базисных векторов. Векторное пространство  $V_n$  может иметь несколько базисов, более того множество базисов любого векторного пространства континуально ввиду континуальности множеств значений компонент векторов и скаляров, образующих линейную комбинацию. Если базисные векторы попарно ортогональны, то получаем **ортогональный базис**, а если они к тому же и нормированы, то базис будет называться **ортонормированным**.

Существует стандартная процедура построения ортонормированного базиса из  $n$  линейно независимых векторов, называемая **ортогонализацией Грама – Шмидта**.

Пусть задано множество  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  линейно независимых векторов и требуется построить ортонормированный базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . В качестве первого вектора выбираем произвольный вектор  $x_1$ , например, полагаем  $y_1 = x_1$ . Из исходной системы выбираем второй вектор  $x_2$ . Пусть  $y_2 = x_2 - k y_1$ , где  $k$  выбирается из условия ортогональности  $y_2$  и  $y_1$ , то есть таким образом, чтобы  $\langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_1, x_2 \rangle - k \langle y_1, y_1 \rangle = 0$ . Из последнего условия

$$k = \frac{\langle y_1, x_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$$

и окончательно получим

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle y_1, x_2 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1.$$

Аналогично записываем выражение для третьего вектора

$$y_3 = x_3 - k_2 y_2 - k_1 y_1,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  определяются из условий ортогональности  $\langle y_3, y_1 \rangle = 0$  и  $\langle y_3, y_2 \rangle = 0$ . Из этих условий получаем уравнения

$$\langle y_1, x_3 \rangle = k_2 \langle y_1, y_2 \rangle + k_1 \langle y_1, y_1 \rangle = k_1 \langle y_1, y_1 \rangle,$$

$$\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3 \rangle = k_2 \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle + k_1 \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 \rangle = k_2 \langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle,$$

или окончательно

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2 \rangle} \mathbf{y}_2 - \frac{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3 \rangle}{\langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1 \rangle} \mathbf{y}_1.$$

Обобщая последнюю формулу, для  $j$ -го вектора имеем

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j \rangle}{\langle \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i \rangle} \mathbf{y}_i, \quad j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Нормируя векторы  $\mathbf{y}_i$ , получаем ортонормированный базис

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{y}_i}{\|\mathbf{y}_i\|}.$$

Введем еще понятие **двойственного базиса**, которое в дальнейшем будет полезно. Возьмем систему базисных векторов  $\mathbf{x}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Зададим систему векторов  $\mathbf{r}_i$ , удовлетворяющих соотношению

$$\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{x}_j \rangle = \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.23)$$

Можно показать, что для любого базиса  $\mathbf{x}_i$  всегда найдется система таких векторов, что удовлетворяются соотношения (3.23). Векторы  $\mathbf{r}_i$  являются линейно независимыми и образуют линейную оболочку, натянутую на базис  $\mathbf{x}_i$ . Следовательно, их можно в свою очередь выбрать как базисные векторы. Базис, состоящий из векторов  $\mathbf{r}_i$ , удовлетворяющих соотношению (3.23), называется двойственным по отношению к базису  $\mathbf{x}_i$ .

Двойственный базис можно применять для определения постоянных  $k_i$  в уравнении (3.22) по заданному вектору  $\mathbf{y}$ , то есть для разложения заданного вектора  $\mathbf{y}$  по составляющим базиса  $\mathbf{x}_i$ .

Составляя скалярные произведения правой и левой частей уравнения (3.22) с вектором  $\mathbf{r}_i$ , придем к уравнениям для  $k_i$ :

$$k_i = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle.$$

Тогда разложение вектора  $\mathbf{y}$  по базисным векторам  $\mathbf{x}_i$  будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle \mathbf{x}_i, \quad (3.24)$$

то есть скалярное произведение  $\langle \mathbf{r}_i, \mathbf{y} \rangle$  равно составляющей вектора  $\mathbf{y}$  в направлении вектора  $\mathbf{x}_i$ .

### 3.3 Собственные значения и собственные векторы

#### 3.3.1 Характеристическое уравнение

Вернемся к уравнению (3.21)

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

где матрица  $\mathbf{A}$  – квадратная размерностью  $(n \times n)$ .

Интерес представляет вопрос о том, существует ли в пространстве  $V_n$  такой вектор  $\mathbf{x}$ , который в результате преобразования (3.21) переходит в вектор  $\mathbf{y}$ , имеющий такое же направление, как и вектор  $\mathbf{x}$ . При положительном ответе на этот вопрос должно выполняться уравнение

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.25)$$

где  $\lambda$  – некоторый скаляр, являющийся коэффициентом пропорциональности. Задача определения значения  $\lambda_i$  и соответствующих им векторов  $\mathbf{x}_i$ , удовлетворяющих уравнению (3.25), известна как задача о собственных значениях (характеристических числах). Векторы  $\mathbf{x}_i$ , являющиеся решением уравнения (3.25), называются собственными или характеристическими векторами, соответствующими собственным значениям  $\lambda_i$ .

Векторно – матричное уравнение (3.25) можно переписать в таком виде:

$$[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{x} = 0, \quad (3.26)$$

где  $\mathbf{E}$  – соответствующая единичная матрица. Система однородных уравнений (3.26) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы коэффициентов равен нулю:

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0, \quad (3.27)$$

Развернув определитель в левой части уравнения (3.27), получим многочлен  $n$ -ой степени относительно  $\lambda$

$$D(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (3.28)$$

Уравнение (3.27) или, что то же самое, уравнение (3.28) является характеристическим уравнением матрицы  $\mathbf{A}$ , а его корни суть собственные значения (характеристические числа) матрицы  $\mathbf{A}$ .

По теореме Виетта коэффициент  $a_n$  в уравнении (3.28) равен произведению собственных чисел, то есть

$$a_n = (-1)^n \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n. \quad (3.29)$$

С другой стороны, положив  $\lambda = 0$  в  $D(\lambda)$ , мы имеем

$$D(0) = |-\mathbf{A}| = a_n,$$

откуда следует, что  $a_n = (-1)^n \cdot |\mathbf{A}|$ . Из этого выражения и из формулы (3.29) следует, что произведение собственных чисел равно определителю матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |\mathbf{A}|. \quad (3.30)$$

Коэффициент  $a_1$  полинома  $D(\lambda)$  по формуле Виетта равен

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n),$$

а раскрывая определитель  $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}|$  увидим, что коэффициент при  $\lambda^{n-1}$  имеет вид  $-(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$ , следовательно, **сумма диагональных элементов квадратной матрицы равна сумме ее собственных значений**:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{j=1}^n a_{jj} = \text{Tr} \mathbf{A}. \quad (3.31)$$

Сумма диагональных элементов матрицы носит название **следа** матрицы и обозначается  $\text{Tr} \mathbf{A}$  (первые буквы англ. trace – след).

Введя обозначение  $T_k = \text{Tr} \mathbf{A}^k$ , можно записать полезную формулу, связывающую коэффициенты  $a_i$  характеристического уравнения с  $T_k$  рекуррентным соотношением, известным как **формула Бохера**:

$$\begin{aligned} a_1 &= -T_1, \\ a_2 &= -1/2 (a_1 T_1 + T_2), \\ a_3 &= -1/3 (a_2 T_1 + a_1 T_2 + T_3), \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= -1/n (a_{n-1} T_1 + \dots + T_n). \end{aligned} \quad (3.32)$$

### 3.3.2 Модальная матрица

Вначале предположим, что все корни характеристического уравнения (3.28) различны. Для каждого из  $n$  собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  можно получить вектор решения  $\mathbf{x}_i$ , удовлетворяющий системе уравнений

$$[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{x}_i = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.33)$$

Так как уравнение (3.33) однородное, его решениями будут также векторы  $k_i \mathbf{x}_i$ , где  $k_i$  – произвольный скаляр. То есть уравнение (3.33) однозначно задает лишь направление каждого из  $\mathbf{x}_i$ . Из вектор - столбцов  $\mathbf{x}_i$  или пропорциональных им образуем матрицу, которую часто называют **модальной матрицей**. При различных собственных числах столбцы модальной матрицы можно полагать равными или пропорциональными любому ненулевому столбцу матрицы  $\text{Adj} [\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ . Это следует из того, что  $\text{Rang} [\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}] = n-1$ . Последнее утверждение доказывается весьма просто. Действительно, согласно уравнению (3.27) ранг  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$  меньше  $n$ . Но он не может быть меньше  $n-1$ , потому что тогда равнялись бы нулю все  $n-1$  миноров любой строки определителя  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ . Это в свою очередь должно означать, что (согласно соотношению (3.5))

$$\frac{d}{d\lambda} \{ |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| \}_{\lambda=\lambda_i} = 0,$$

откуда следует, что  $\lambda_i$  является кратным корнем уравнения (3.27). А это противоречит первоначальной посылке о том, что все  $\lambda_i$  различны. Таким образом, действительно, ранг  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$  равен  $n-1$  и столбцы модальной матрицы можно задавать пропорциональными любому ненулевому столбцу матрицы  $\text{Adj}[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ . Поскольку столбцы присоединенной матрицы линейно зависимы для каждого значения  $\lambda_i$ , то выбор конкретного  $\lambda_i$  определяет только один столбец модальной матрицы.

Таким образом, при различных собственных числах  $n$  столбцов модальной матрицы линейно независимы и, следовательно, образуют базис в соответствующем пространстве  $V_n$ .

В случае кратных корней уравнения (3.27) и произвольной матрицы  $\mathbf{A}$  определение независимых собственных векторов (столбцов модальной матрицы) не очевидно. Дело здесь в том, что не существует однозначно соответствия между порядком кратности корня характеристического уравнения и дефектом соответствующей этому корню характеристической матрицы  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ .



Если кратность некоторого корня, например,  $\lambda_i$  равна  $p$ , то дефект  $q$  характеристической матрицы  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$  может быть в пределах  $1 \leq q \leq p$ , и в этом случае можно найти только  $q$  линейно независимых собственных векторов, удовлетворяющих уравнению (3.33) для данного собственного числа  $\lambda_i$ .

Если вырожденность полная ( $q = p$ ) (для симметрической матрицы  $\mathbf{A}$  это выполняется всегда), то можно найти ровно  $p$  линейно независимых собственных векторов, соответствующих корню  $\lambda_i$  кратности  $p$ . Эти  $p$  различных модальных столбцов можно получить из ненулевых столбцов матрицы

$$\frac{d^{p-1}}{d\lambda^{p-1}} \text{Adj}[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]|_{\lambda=\lambda_i}. \quad (3.34)$$

Если вырожденность простая ( $q=1$ ), то для корня  $\lambda_i$  кратности  $p$  можно найти только один собственный вектор, соответствующий данному  $\lambda_i$ . Этот вектор, как и в случае некрatных корней, может быть выбран пропорциональным любому ненулевому столбцу матрицы  $\text{Adj}[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ .

Если вырожденность характеристической матрицы  $1 < q < p$ , то  $q$  модальных столбцов могут быть получены из различных ненулевых столбцов матрицы (3.34) при замене  $p$  на  $q$ .

Как определять остальные  $p-q$  модальных столбцов при  $q < p$  (они будут линейно зависимы от  $q$  найденных векторов  $\mathbf{x}_i$ ) будет разобрано в разделе, посвященном матричным преобразованиям.

### 3.3.3 Симметрическая матрица

Случаи, когда матрица  $\mathbf{A}$  является симметрической, встречаются в теории систем довольно часто. Достаточно упомянуть, что симметрическими матрицами описывают системы, состоящие из  $RC$  – элементов, то есть из емкостей и сопротивлений. Поэтому собственные числа и собственные векторы симметрических матриц требуют особого рассмотрения.

Важным свойством действительной симметрической матрицы является то, что ее собственные значения суть действительные числа. Это можно показать, предположив, что они комплексные. Тогда собственные числа, а также собственные векторы являются комплексно сопряженными, поскольку матрица  $\mathbf{A}$  по условию действительная, а следовательно, и коэффициенты характеристического уравнения (3.28) действительные числа. В таком случае справедливы уравнения

$$\lambda \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad \text{и} \quad \lambda^* \mathbf{x}^* = \mathbf{A} \mathbf{x}^*.$$

Умножая первое уравнение на  $(\mathbf{x}^*)^T$  слева, имеем

$$\lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle.$$

При умножении транспонированного второго уравнения справа на  $\mathbf{x}$  получим

$$\lambda^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{x} \rangle.$$

Поскольку матрица  $\mathbf{A}$  симметрическая, то  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  и из равенства правых частей двух последних уравнений следует

$$(\lambda - \lambda^*) \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Скалярное произведение  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \neq 0$ , а, следовательно,  $\lambda = \lambda^*$  и собственные числа действительные.

Следующее свойство симметрических матриц заключается в том, что их собственные векторы попарно ортогональны. Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – два различных собственных числа, которым соответствуют собственные векторы  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$ , так что

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{Ax}_1 \text{ и } \lambda_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{Ax}_2.$$

Умножая первое уравнение на  $\mathbf{x}_2^T$  слева, а транспонированное второе – на  $\mathbf{x}_1$  справа, получим

$$\lambda_1 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle = \mathbf{x}_2^T \mathbf{Ax}_1 \text{ и } \lambda_2 \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle = \mathbf{x}_2^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}_1.$$

Учитывая свойство симметрической матрицы  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  и вычитая из первого уравнения второе, имеем

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \rangle = 0.$$

Поскольку  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , то  $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$ .

Третье, уже упомянутое, свойство симметрической матрицы касается кратных собственных значений. Собственные векторы, соответствующие собственному значению  $\lambda_i$  кратности  $p$ , линейно независимы.

Из этих трех основных свойств симметрической матрицы вытекают еще ряд свойств, которые можно сформулировать следующим образом.

1. Собственные векторы симметрической матрицы  $\mathbf{A}$   $n$ -го порядка порождают  $n$ -мерное векторное пространство  $V_n$ .

2. Существует, по крайней мере, одно ортонормированное множество собственных векторов матрицы  $\mathbf{A}$ , которое порождает векторное пространство  $V_n$ .

3. Собственные векторы, соответствующие собственному значению  $\lambda_i$  кратности  $p$ , порождают пространство  $V_p$ .

4. В любом множестве из  $n$  ортонормированных собственных векторов существует ровно  $p$  линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению  $\lambda_i$  с кратностью  $p$ .

5. Если одно или несколько собственных значений матрицы  $\mathbf{A}$  имеют кратность  $p \geq 2$ , то существует бесконечное число различных множеств ортонормированных векторов, которые порождают  $n$ -мерное векторное пространство  $V_n$ . Эти множества соответствуют различным способам выбора ортонормированных базисов, порождающих подпространства  $V_p$  с размерностью  $p \geq 2$ .

### 3.4 Линейные преобразования

#### 3.4.1 Элементарные действия над матрицами

Рассмотрим определение действия с элементами матриц.

1. Перестановка произвольных двух строк (столбцов).
2. Многократное прибавление к какой – либо строке (столбцу) другой строки (столбца).
3. Умножение строки (столбца) на отличную от нуля постоянную величину.

Эти три элементарные операции равносильны умножению данной квадратной матрицы слева или справа на некоторую неособенную матрицу, причем такую, чтобы ранг полученной матрицы равнялся бы рангу исходной матрицы.

**Операция 1.** Эта операция не что иное, как перенумерация строк (столбцов) и, конечно, не меняет ранга матрицы. Пусть  $\mathbf{Q}_1$  – единичная матрица размерности  $(n \times n)$  с переставленными  $i$ -й и  $j$ -й строками. Тогда умножение произвольной  $(n \times n)$  матрицы  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{Q}_1$  слева приводит к матрице с переставленными  $i$ -й и  $j$ -й строками. Умножение  $\mathbf{A}$  справа на  $\mathbf{Q}_1$  приводит к матрице с переставленными  $i$ -й и  $j$ -й столбцами.

**Операция 2.** Сложение с  $i$ -й строкой  $k$  раз  $j$ -й строки обеспечивается умножением на матрицу  $\mathbf{A}$  матрицы  $\mathbf{Q}_2$  слева  $\mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{Q}_2$  – единичная матрица с элементом  $k$  в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце ( $i \neq j$ ). Такая же операция со столбцами будет обеспечена умножением  $\mathbf{A}$  на матрицу  $\mathbf{Q}_2$  справа  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_2$ .

**Операция 3.** Умножение  $i$ -й строки на постоянную  $k \neq 0$  произойдет, если взять произведение  $\mathbf{Q}_3 \cdot \mathbf{A}$ , где  $\mathbf{Q}_3$  – единичная матрица с замененным на  $k$   $i$ -м элементом на главной диагонали. Произведение  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_3$  даст аналогичную операцию с  $i$ -м столбцом.

Таким образом, любая последовательность элементарных действий над строками матрицы  $\mathbf{A}$  может быть выполнена в результате умножения слева на

$\mathbf{A}$  соответствующей последовательности неособенных матриц  $\mathbf{P}_i$  или, что то же самое, умножения слева на  $\mathbf{A}$  неособенной матрицы  $\mathbf{P} = \prod_i \mathbf{P}_i$ . Аналогичные операции со столбцами  $\mathbf{A}$  будут получены в результате умножения справа на  $\mathbf{A}$  неособенной матрицы  $\mathbf{Q}$ . В результате мы получаем матрицу

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q}, \quad (3.35)$$

имеющую ранг такой же, как и матрица  $\mathbf{A}$ .

### 3.4.2 Эквивалентные преобразования

Свойство матриц иметь одинаковый ранг является рефлексивным, симметричным и транзитивным. Следовательно, можно говорить об **эквивалентности** двух матриц, если у них одинаковый ранг (естественно, размерности таких матриц должны совпадать). Преобразование (3.35) не меняет ранга матрицы, то есть можно считать, что две матрицы эквивалентные, если одна из матриц получается в результате выполнения ряда элементарных операций над другой матрицей. Преобразование (3.35) является, таким образом, наиболее общим видом эквивалентных матричных преобразований. Отдельные преобразования получаются из взаимосвязи  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ .

С помощью эквивалентных преобразований можно произвольную матрицу  $\mathbf{A}$  ранга  $r > 0$  привести к **нормальной** (или **канонической**) форме, т.е. к матрице одного из следующих видов

$$\mathbf{E}_r, \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} \mathbf{E}_r \\ \hline \mathbf{0} \end{array} \right], [\mathbf{E}_r \mid \mathbf{0}]$$

Если неособенную матрицу  $\mathbf{A}$  можно привести к единичной путем операций над строками  $\mathbf{A}$ , то в преобразовании (3.35)  $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$ , и по сути, это представляет собой другой метод нахождения обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Если в общем случае возможно приведение матрицы  $\mathbf{A}$  к единичной путем ряда элементарных операций, то

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}.$$

Последнее соотношение показывает, что любая неособенная матрица может быть представлена в виде произведения элементарных матриц.

Рассмотрим конкретные виды преобразований.

**Преобразование подобия.** Возьмем линейное преобразование

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (3.36)$$

где  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{x}$  – векторы в пространстве  $V_n$  с базисом  $\mathbf{z}_i$ . Перейдем от базиса  $\mathbf{z}_i$  к некоторому новому  $\mathbf{w}_i$ . При этом векторы  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{x}$  переходят в новом базисе к векторам  $\mathbf{y}'$  и  $\mathbf{x}'$  соответственно. Поскольку  $\mathbf{z}_i$  и  $\mathbf{w}_i$  являются базисами в  $V_n$ , то существует неособенная матрица  $\mathbf{P}$ , переводящая векторы без штрихов в векторы со штрихами, то есть

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}'; \quad \mathbf{y}' = \mathbf{P} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{y}'. \quad (3.37)$$

13 Найдем связь между  $\mathbf{y}'$  и  $\mathbf{x}'$  в новой системе координат. Для этого умножим на  $\mathbf{P}$  слева уравнение (3.36)

$$\mathbf{P} \mathbf{y} = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}.$$

Учитывая соотношения (3.37) из последнего уравнения получим

$$\mathbf{y}' = \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}'$$

или

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B} \mathbf{x}',$$

где

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}. \quad (3.38)$$

Матрица  $\mathbf{B}$ , связывающая вектор  $\mathbf{y}'$  с вектором  $\mathbf{x}'$  в новой системе координат, получается из матрицы  $\mathbf{A}$  с помощью преобразования (3.38), которое носит название **преобразования подобия**.

Важным свойством преобразования подобия является инвариантность собственных чисел к такому преобразованию. Действительно, возьмем преобразование (3.35) и запишем характеристический полином для его левой и правой части. Получим цепочку равенств:

$$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{P}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}) \cdot \mathbf{Q}| = |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}| \cdot |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}^{-1}|.$$

Учитывая, что в преобразовании подобия  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$ , произведение  $|\mathbf{P}|$  и  $|\mathbf{Q}|$  равно единице и окончательно

$$|\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}|,$$

следовательно, собственные значения матриц  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{A}$  совпадают.

- 14 Если  $x_i'$  - собственный вектор, соответствующий собственному числу  $\lambda_i$  матрицы  $B = Q^{-1}AQ$ , то  $x_i = Qx_i'$  является собственным вектором матрицы  $A$ , соответствующим тому же самому собственному числу  $\lambda_i$ .
- 15 Ортогональное преобразование. Пусть базисная система векторов  $z_i$  ортогональна. Если новая система векторов  $w_i$  также ортогональна, то норма вектора  $x$  в старой системе координат и норма вектора  $x'$  в новой системе координат должны быть одинаковы, следовательно

$$\langle x, x \rangle = \langle x', x' \rangle.$$

Расписывая это соотношение через матрицу преобразований  $Q$ , будем иметь

$$x'^T x' = x^T x = x'^T Q^T Q x'.$$

Ясно, что для этого необходимо, чтобы  $Q^T Q = E$  или

$$Q^T = Q^{-1}. \quad (3.39)$$

Таким образом, при переходе от одного ортогонального базиса к другому матрица преобразования  $Q$  должна удовлетворять соотношению (3.39), а преобразование подобия (3.38) с дополнительным условием (3.39) называется **ортогональным преобразованием**. Ортогональное преобразование сохраняет неизменными нормы векторов и углы между ними.

**Унитарное преобразование.** Если матрица  $A$  линейного преобразования (3.36) является эрмитовой, то при переходе от одного ортогонального базиса к другому (также ортогональному) применяется **унитарное преобразование**  $x = Q x'$ , где  $Q$  – унитарная матрица, удовлетворяющая соотношению

$$(Q^*)^T = Q^{-1}. \quad (3.40)$$

Определитель унитарной матрицы равен  $\pm 1$ .

**Конгруэнтное преобразование** задается формулой

$$B = Q^T A Q, \quad (3.41)$$

где  $Q$  – неособенная матрица.

Конгруэнтное преобразование, согласно соотношению (3.41), состоит из пар элементарных операций, причем каждая из пар является одним и тем же элементарным преобразованием последовательно строк и столбцов матрицы  $A$ .

Аналогом конгруэнтного преобразования для эрмитовых матриц является **конъюнктивное** (или **эрмитово конгруэнтное** преобразование)

$$\mathbf{B} = (\mathbf{Q}^*)^T \mathbf{A} \mathbf{Q}. \quad (3.42)$$

При этом преобразовании матрица  $\mathbf{B}$  получается из матрицы  $\mathbf{A}$  посредством пар элементарных преобразований, причем каждая пара состоит из преобразования столбца и такого же преобразования комплексно сопряженной строки.

### 3.4.3 Диагонализация матриц

Часто возможен в различных задачах переход к такой системе координат, в которой линейное преобразование (3.36) описывается диагональной матрицей. Это очень удобно, так как в этом случае уравнения для компонент векторов оказываются несвязанными друг с другом. Подобная система координат называется **нормальной** системой, а координаты в таком базисе – **нормальными координатами** системы. С помощью различных преобразований можно привести матрицу к диагональному виду.

**Конгруэнтные преобразования.** Действительная симметрическая матрица  $\mathbf{A}$  ранга  $r$  может быть приведена к каноническому виду

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{E}_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.43)$$

Целое число  $p$  называется **индексом** матрицы, а целое число  $s = p - (r - p) = 2p - r$  – **сигнатурой** матрицы.

Комплексная симметрическая матрица ранга  $r$  может быть приведена к канонической форме конгруэнтным преобразованием

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{E}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.44)$$

Эрмитова квадратная матрица ранга  $r$  приводится к канонической форме эрмитово конгруэнтным преобразованием

$$(\mathbf{Q}^*)^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{E}_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{E}_{r-p} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.45)$$

Косоэрмитова матрица ранга  $r$  приводится эрмитово конгруэнтным преобразованием к канонической матрице

$$(\mathbf{Q}^*)^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} j\mathbf{E}_p & 0 & 0 \\ 0 & -j\mathbf{E}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Индекс  $p$  и сигнатура  $s$  канонических матриц (3.45) и (3.46) определяются аналогично действительной симметрической матрице (3.43).

**Преобразования подобия.** В преобразовании подобия используется модальная матрица  $\mathbf{M}$ . В тех случаях, когда матрица  $\mathbf{A}$  имеет  $n$  различных собственных значений, либо когда при кратных корнях матрица  $[\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}]$  полностью вырождена (в этих случаях матрица  $\mathbf{M}$  имеет  $n$  линейно независимых модальных столбцов) преобразование вида  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$  приводит к диагональной матрице  $\mathbf{\Lambda}$ . Это нетрудно показать, вернувшись к уравнениям (3.33) для собственных векторов  $\mathbf{x}_i$

$$[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}] \cdot \mathbf{x}_i = 0.$$

Эти уравнения можно объединить для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 x_{11} & \lambda_2 x_{12} & \dots & \lambda_n x_{1n} \\ \lambda_1 x_{21} & \lambda_2 x_{22} & \dots & \lambda_n x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 x_{n1} & \lambda_2 x_{n2} & \dots & \lambda_n x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

или в сокращенной матричной форме

$$\mathbf{M}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{M}, \quad (3.47)$$

где  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag} [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$  – диагональная матрица, составленная из собственных значений  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ . Поскольку модальная матрица  $\mathbf{M}$  имеет  $n$  линейно независимых столбцов, она является невырожденной и следовательно, существует обратная матрица  $\mathbf{M}^{-1}$ . Умножив на  $\mathbf{M}^{-1}$  слева уравнение (3.47), получим

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}.$$

Таким образом, действительно, преобразование подобия (3.48) позволяет перейти при линейно независимых собственных векторах к диагональной матрице.



Применение такого преобразования подобия всегда возможно для действительной симметрической матрицы. Так как собственные векторы действительной симметрической матрицы (точно так же, как и эрмитовой) ортогональны, то всегда существует такая ортогональная матрица, что

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n].$$

Перейдем в линейном преобразовании (3.36)  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  к нормальным координатам. Для этого достаточно в соотношениях (3.37), (3.38) заменить матрицу  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$  на модальную матрицу  $\mathbf{M}$ . При таком преобразовании  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}'$  уравнение (3.36) записывается

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{x}'. \quad (3.49)$$

Умножая слева на  $\mathbf{M}^{-1}$  уравнение (3.49) получим

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{x}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x}'.$$

Учитывая, что  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ , из последнего соотношения имеем

$$\mathbf{y}' = \mathbf{\Lambda}\mathbf{x}', \quad (3.50)$$

или расписав уравнение (3.50) по компонентам векторов  $\mathbf{y}'$  и  $\mathbf{x}'$ :

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 x_1', \\ y_2' &= \lambda_2 x_2', \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= \lambda_n x_n'. \end{aligned}$$

Таким образом, одноименные координаты векторов в нормальной системе координат оказываются связанными независимыми уравнениями. Попутно отметим, что координаты  $x_i'$  (как и  $y_i'$ ) лежат на собственных векторах или их продолжениях.

Столбцы матрицы  $\mathbf{M}$  образуют базис, а строки  $\mathbf{M}^{-1}$  – двойственный базис в исходном пространстве  $V_n$ . Если столбцы модальной матрицы обозначить через  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ , а двойственный базис обозначить через  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ , то произвольный вектор  $\mathbf{y}$  можно представить в виде (3.24):

$$\mathbf{y} = \langle \mathbf{r}_1, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u}_2 + \dots + \langle \mathbf{r}_n, \mathbf{y} \rangle \mathbf{u}_n. \quad (3.51)$$

С другой стороны, эквивалентное представление этого вектора  $\mathbf{y}$  с использованием нормальных координат выглядит так:

$$\begin{aligned}
 y &= MM^{-1}y = [u_1, u_2 \dots u_n] M^{-1}y = [u_1, u_2 \dots u_n] y' = \\
 &= [u_1, u_2 \dots u_n] \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \dots \\ y_n' \end{bmatrix} = y_1' u_1 + y_2' u_2 + \dots + y_n' u_n. \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

Сравнение выражений (3.51) с (3.52) с очевидностью дает  $y_i'$   
 $= \langle r_i, y \rangle$ , и, следовательно, строки матрицы  $M^{-1}$  образуют двойственный базис.

Конечно, к этому же выводу можно было бы прийти из определения двойственного базиса: двойственным по отношению к исходному базису  $u_1, \dots, u_n$  будет базис  $r_1, \dots, r_n$ , для которого  $\langle r_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ , а так как  $u_j$  – столбцы матрицы  $M$ , а  $r_i$  – строки  $M^{-1}$ , то  $M^{-1}M = E$ .

У разных авторов можно встретить и разные формы представления вектора: либо в форме скалярных произведений (3.51), либо в форме нормальных координат (3.52), хотя, безусловно, обе формы приводят к тождественным результатам.

Несимметрические матрицы ( $n \times n$ ) с кратными собственными числами могут в общем случае содержать меньше, чем  $n$  линейно независимых собственных векторов, определяемых уравнениями (3.33). Однако можно показать, что в этом случае произвольная квадратная матрица  $A$  с помощью преобразования подобия может быть приведена к **канонической матрице Жордана**, имеющей следующие свойства:

- диагональные элементы этой матрицы являются собственными числами;
- все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю;
- если соседние элементы на главной диагонали одинаковы, то некоторые элементы, расположенные непосредственно справа от главной диагонали, равны единице;
- остальные элементы равны нулю.

Типичная жорданова форма имеет вид:

$$1.1 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

“Единицы” в жордановых матрицах встречаются в блоках вида

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \dots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Они называются клетками Жордана. Количество клеток Жордана, связанных с собственным числом  $\lambda_i$ , равно количеству линейно независимых собственных векторов, соответствующих  $\lambda_i$ , то есть дефекту матрицы  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ . Но определить порядки клеток Жордана – задача чрезвычайно трудная, несмотря на то, что число единиц, связанных с данным  $\lambda_i$ , вполне определено и равно кратности  $\lambda_i$  минус дефект  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$ . Поэтому совершенно непонятно, получится ли в результате преобразования  $\mathbf{J} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$  матрица вида (3.53) или, например, матрица

$$1.2 \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_1 & 1 \\ & & & \lambda_1 \\ & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

И в той и в другой матрице по две клетки Жордана, связанные с собственным числом  $\lambda_1$  и в обеих матрицах по две единицы в этих клетках, но в матрице (3.53) порядки клеток 3 и 1, а в матрице (3.54) обе клетки порядка 2.

В случае полной вырожденности (дефект  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$  равен кратности корня  $\lambda_i$ ) в клетке Жордана не будет ни одной единицы. В случае простой вырожденности (дефект  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$  равен единице) все элементы, непосредственно лежащие справа от главной диагонали с  $\lambda_i$ , будут равны единице. В промежуточных случаях для определения  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{M}$  можно довольствоваться методом проб и ошибок исходя из равенства

$$\mathbf{M}\mathbf{J} = \mathbf{A}\mathbf{M}.$$

Обозначим модальные столбцы через  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ . Тогда клетка Жордана порядка  $m$ , связанная с  $\lambda_i$ , существует лишь в том случае, если  $m$  линейно независимых векторов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$  удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda_i \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \lambda_i \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_m &= \lambda_i \mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m-1}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Уравнения (3.55) применимы для любой клетки Жордана. Модальные столбцы можно определить из этих уравнений, последовательно их решая, начиная с первого уравнения.

### 3.5 Квадратичные формы

Билинейной формой от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $n$  переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$  называется сумма вида

$$\begin{aligned} B &= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + \\ &+ a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \\ &\dots\dots\dots \\ &+ a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j, \end{aligned} \quad (3.56)$$

где все составляющие – действительные числа. Билинейную форму удобно изображать в матричной записи

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{y} \rangle. \quad (3.57)$$

Матрица  $\mathbf{A}$  называется матрицей коэффициентов формы или просто матрицей формы, а ранг  $\mathbf{A}$  – рангом формы.

Если в выражении (3.57) положить  $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ , то получим

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j. \quad (3.58)$$

Выражение (3.58) называется **квадратичной формой** от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Нетрудно видеть, что коэффициент при произведении  $x_i \cdot x_j$  ( $i \neq j$ ) равен  $(a_{ij} + a_{ji})$ . Этот коэффициент не изменится, если оба  $a_{ij}$  и  $a_{ji}$  положить равными  $(a_{ij} + a_{ji})/2$ . Поэтому, ничуть не снижая общности, можно считать матрицу **A** симметрической.

Если матрица **A** является эрмитовой, то соответствующую эрмитову форму можно определить как

$$H(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle = (\mathbf{x}^T)^* \mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i^* x_j. \quad (3.59)$$

### 3.5.1 Преобразование переменных

Перейдем в выражении (3.58) от переменных  $x_i$  к переменным  $y_i$  с помощью преобразования  $\mathbf{x} = \mathbf{By}$ , где **B** – произвольная неособенная квадратная матрица размерностью  $n$ . Получим в результате квадратичную форму от переменных  $y_1, y_2, \dots, y_n$ :

$$15.1.1 \quad \mathbf{Q} = \mathbf{y}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{C} \mathbf{y}, \quad (3.60)$$

15.1.2

15.1.3 где  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$  является конгруэнтным преобразованием, так что ранг формы не меняется.

15.1.4 Во многих случаях желательно выразить **Q** в виде линейной комбинации только квадратов координат. Это будет, очевидно, в том случае, если матрицу **A** привести к диагональному виду. Особенно полезным оказывается ортогональное преобразование, т.е. когда **B** является ортогональной матрицей ( $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}$ ). Как уже было выяснено в предыдущем подразделе, такое возможно для симметрических матриц **A**, если в качестве матрицы **B** взять модальную матрицу **M**. Таким образом, линейное преобразование  $\mathbf{x} = \mathbf{My}$  приводит к квадратичной форме

#### 15.1.5

$$15.1.6 \quad \mathbf{Q}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2. \quad (3.61)$$

Если у симметрической матрицы **A** ранг  $r < n$ , и имеются кратные собственные значения, то по – прежнему модальная матрица может быть составлена из линейно независимых столбцов и в результате преобразование приведет к диагональной матрице. В этом случае модальная матрица **M** не единственная и, согласно свойствам симметрических матриц, существует бесконечное множество систем  $m$  ортогональных собственных векторов, соответствующих

собственному числу кратности  $m$ . В результате преобразования в квадратичной форме (3.61) останется только  $r$  слагаемых.

В случае, если конгруэнтное преобразование неортогональное, квадратичную форму можно привести к виду

$$Q(\mathbf{z}) = \alpha_1 z_1^2 + \alpha_2 z_2^2 + \dots + \alpha_p z_p^2 - \alpha_{p+1} z_{p+1}^2 - \dots - \alpha_n z_n^2, \quad (3.62)$$

где  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) – положительные числа. Число положительных членов  $p$  называется индексом квадратичной формы.

Если квадратичная форма имеет ранг  $r \leq n$ , то в выражении (3.62) остается только  $r$  членов. Форму (3.62) можно еще упростить, если ввести невырожденное преобразование

$$\begin{aligned} w_i &= \sqrt{\alpha_i} z_i, (i = 1, 2, \dots, r), \\ w_i &= z_i, (i = r + 1, \dots, n). \end{aligned}$$

16 Тогда получим

$$Q(\mathbf{w}) = w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \dots - w_r^2. \quad (3.63)$$

Формулу (3.63) можно рассматривать как прямое следствие приведения к канонической форме (3.43).

Эрмитова форма ранга  $r$  приводится к диагональному виду подобным образом:

$$Q(\mathbf{w}) = w_1^* w_1 + w_2^* w_2 + \dots + w_p^* w_p - w_{p+1}^* w_{p+1} - \dots - w_r^* w_r.$$

Последнее выражение вытекает из определения канонической формы (3.45).

### 3.5.2 Определенные, полуопределенные и неопределенные формы

Квадратичная форма  $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle$  называется **положительно определенной**, если она положительна при всех  $\mathbf{x}$ , исключая  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Конгруэнтные преобразования (впрочем, как и любые эквивалентные преобразования) не меняют положительной определенности формы, поэтому из соотношения (3.63) следует, что квадратичная форма будет положительно определенной, если и только если  $\mathbf{A}$  является неособенной матрицей, и индекс формы (то есть число положительных членов) равен ее рангу, т.е.  $p = r = n$ . Из уравнения (3.61) ясно, что квадратичная форма положительно определена в том и только в том случае, когда все собственные числа матрицы  $\mathbf{A}$  положительные

$\lambda_i > 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Любое из этих условий может быть использовано при определении положительной определенности квадратичной формы.

Квадратичная форма называется **положительно полуопределенной**, если она не отрицательна для всех  $\mathbf{x}$  и существуют  $\mathbf{x} \neq 0$ , для которых  $Q(\mathbf{x}) = 0$ . Такое будет тогда и только тогда, когда все собственные значения  $\mathbf{A}$  неотрицательны и, по крайней мере, одно из собственных значений равно нулю. При этом матрица  $\mathbf{A}$ , согласно (3.30), будет особенной и ее ранг  $r < n$ .

Примечание [ЛВС1]:

Подобные утверждения могут быть сделаны и относительно отрицательно определенных и отрицательно полуопределенных квадратичных форм. Квадратичная форма  $Q(\mathbf{x})$  называется отрицательно определенной, если она отрицательна для всех  $\mathbf{x}$ , исключая  $\mathbf{x} = 0$ . Квадратичная форма  $Q(\mathbf{x})$  будет являться отрицательно полуопределенной, если она не положительна для всех  $\mathbf{x}$  и существуют точки  $\mathbf{x} \neq 0$ , для которых  $Q(\mathbf{x}) = 0$ .

Примечание [ЛВС2]:

Квадратичная форма является неопределенной тогда и только тогда, когда матрица  $\mathbf{A}$  имеет как положительные, так и отрицательные собственные числа. При этом в векторном пространстве  $V_n$  можно найти такие точки, в которых квадратичная форма будет иметь противоположные знаки.

Устанавливать определенность квадратичной формы по собственным значениям матрицы  $\mathbf{A}$  или путем приведения  $\mathbf{A}$  к канонической форме достаточно сложно при больших размерностях  $\mathbf{A}$ , поэтому разработан более простой критерий по установлению положительной определенности квадратичной формы. Можно показать, что для того, чтобы квадратичная форма  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$  или симметрическая матрица  $\mathbf{A}$  были положительно определенными, необходимо и достаточно, чтобы расположенные в естественном порядке все ее главные миноры были положительны, т.е.

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = |\mathbf{A}| > 0.$$

Эти главные миноры  $\mathbf{A}$  называются также дискриминантами квадратичной формы.

Для эрмитовых форм существуют аналогичные формулировки.

Условия отрицательной определенности могут быть получены, если потребовать положительную определенность  $(-\mathbf{A})$ .

### 3.5.3 Дифференцирование квадратичных форм

Необходимость дифференцирования квадратичных форм может возникнуть при исследовании устойчивости динамических систем, либо при проектировании оптимальных систем с использованием квадратичных критериев качества.

**Дифференцирование по скалярной величине.** Возьмем квадратичную форму

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Продифференцируем  $Q$  по переменной  $x_k$ :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx_k} &= \frac{d}{dx_k} \left[ a_{kk} x_k^2 + x_k \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{jk} x_j \right) \right] = \\ &= 2a_{kk} x_k + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{jk} x_j = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i + \sum_{j=1}^n a_{jk} x_j. \end{aligned}$$

В матричной записи это соотношение будет иметь вид:

$$\frac{dQ}{dx_k} = (\mathbf{A} \mathbf{x})_k + (\mathbf{A}^T \mathbf{x})_k, \quad (3.64)$$

где индекс  $k$  означает  $k$ -ю компоненту вектор – столбцов  $\mathbf{A} \mathbf{x}$  и  $\mathbf{A}^T \mathbf{x}$ . В случае симметрической матрицы  $\mathbf{A}$  формула (3.64) принимает вид:

$$\frac{dQ}{dx_k} = 2(\mathbf{A} \mathbf{x})_k.$$

**Дифференцирование по векторной переменной.** Производная квадратичной формы по вектору  $\mathbf{x}$ , называемая часто **градиентом**, получается в результате применения к квадратичной форме  $Q(\mathbf{x})$  оператора – вектора дифференцирования



$$\nabla_{\mathbf{x}} = grad_{\mathbf{x}} = \frac{d}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

16.1.1.1.1 В левой части выражения (3.65) приведены различные обозначения градиента, встречающиеся у разных авторов. Так как  $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , то

$$grad_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right).$$

Учитывая формулу (3.64), последнее выражение можно переписать в виде

$$grad_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{x})_1 \\ (\mathbf{A}\mathbf{x})_2 \\ \dots \\ (\mathbf{A}\mathbf{x})_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{x})_1 \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{x})_2 \\ \dots \\ (\mathbf{A}^T \mathbf{x})_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{x}. \quad (3.66)$$

Для симметрической матрицы  $\mathbf{A}$  будем иметь

$$grad_{\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (3.67)$$

**Дифференцирование по времени.** Если матрица  $\mathbf{A}$  и переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  являются функциями времени, то производная по  $t$  от квадратичной формы  $Q(t)$  определяется выражением

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \rangle = \langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{x}}(t) \rangle.$$

Для симметрической матрицы  $\mathbf{A}$ , с учетом соотношения (3.67), последнее выражение будет выглядеть

$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} = \dot{Q}(t) &= 2 \langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \rangle + \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t) \rangle = \langle \text{grad}_{\mathbf{x}} Q, \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle + \\ &+ \langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{x}(t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Если матрица  $\mathbf{A}$  не зависит от времени, последнее слагаемое в (3.68) обращается в нуль и получаем

$$\dot{Q}(t) = \langle \text{grad}_{\mathbf{x}} Q, \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle. \quad (3.69)$$

### 3.6 Матричные функции

#### 3.6.1 Матричные ряды

Краткая запись произведения матриц  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}$  может быть сделана в форме  $\mathbf{A}^k$ , где  $k$ - число множителей, входящих в произведение. Как и возведение в степень скаляров, умножение степеней матриц подчиняется обычным правилам:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^m &= \mathbf{A}^{k+m}, \\ (\mathbf{A}^k)^m &= \mathbf{A}^{km}, \\ \mathbf{A}^0 &= \mathbf{E}_n, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{E}_n$ - единичная матрица порядка  $n$ .

Эти же правила справедливы и при возведении матрицы в отрицательную степень при условии, что матрица неособенная, т.е. существует обратная матрица.

Можно возводить матрицы и в дробную степень. Так, если  $\mathbf{A}^m = \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{A}$ - квадратная матрица, то  $\mathbf{A}$  является корнем  $m$ -й степени  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} = \sqrt[m]{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{\frac{1}{m}}.$$

В отличие от скаляров, у которых имеется ровно  $m$  корней  $m$ -й степени, не существует общего правила определения, каким количеством корней  $m$ -й степени обладает матрица  $\mathbf{B}$ . Это число корней зависит от конкретного вида матрицы.

Возьмем произвольный многочлен  $m$ -го порядка от скалярной переменной  $x$

$$N(x) = p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots + p_0. \quad (3.70)$$

Заменив в этом выражении  $x$  на квадратную матрицу  $\mathbf{A}$  порядка  $n$ , получим соответствующий матричный многочлен

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = p_m \mathbf{A}^m + p_{m-1} \mathbf{A}^{m-1} + \dots + p_1 \mathbf{A} + p_0 \mathbf{E}_n. \quad (3.71)$$

Многочлен (3.70) можно, как известно, представить в виде произведения

$$N(x) = p_m (x - \lambda_1) (x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_m),$$

где  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) – корни многочлена, которые предполагаются различными. Подобным же образом можно представить и матричный многочлен

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = p_m (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \dots (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{E}). \quad (3.72)$$

Обобщением ряда (3.70) будет бесконечный степенной ряд

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m.$$

Заменив переменную  $x$  в последнем выражении на квадратную матрицу  $\mathbf{A}$ , получим бесконечный ряд по  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{S}(\mathbf{A}) = a_0 \mathbf{E}_n + a_1 \mathbf{A} + a_2 \mathbf{A}^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \mathbf{A}^m. \quad (3.73)$$

Вопросы сходимости матричных рядов затрагивать не будем, достаточно знать только, что ряд (3.73) сходится, если сходятся соответствующие скалярные ряды  $S(\lambda_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , где  $\lambda_i$  – собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ .

### 3.6.2 Функции от матриц

Разложение известных скалярных функций в степенные ряды дает основание для определения этих функций от матриц.

**Матричная экспонента:**

$$e^{\mathbf{A}} = \exp \mathbf{A} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!},$$

$$e^{-\mathbf{A}} = \exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{E} - \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \mathbf{A}^k}{k!}. \quad (3.74)$$

Ряды (3.74) сходятся равномерно и абсолютно. Поскольку произведение матриц в общем случае некоммукативно, равенство  $e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{B}} \cdot e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$  выполняется только если матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  коммутативны  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ . Последнее условие выполняется, если  $\mathbf{B}=\mathbf{A}$  или  $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ . В частности, при  $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$  имеем

$$e^{\mathbf{A}} \cdot e^{-\mathbf{A}} = e^{\mathbf{A}-\mathbf{A}} = \mathbf{E},$$

откуда ясно, что матрица  $e^{-\mathbf{A}}$  является обратной к матрице  $e^{\mathbf{A}}$ .

Если  $\mathbf{A}$  не зависит от времени, то матричная экспонента  $e^{\mathbf{A}t}$  определяется подобно уравнению (3.74) в форме бесконечного ряда

$$e^{\mathbf{A}t} = \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i t^i}{i!}. \quad (3.75)$$

Этот ряд сходится равномерно и абсолютно для всех значений времени  $t$ . Производная по  $t$  от матричной экспоненты  $e^{\mathbf{A}t}$  находится почленным дифференцированием ряда (3.75)

$$\frac{d}{dt} [e^{\mathbf{A}t}] = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \frac{\mathbf{A}^3 t^2}{2!} + \dots = \mathbf{A} \cdot e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{A}. \quad (3.76)$$

Обобщая соотношение (3.76) для  $k$ -й производной с учетом обозначения  $\frac{d}{dt} = s$ , получим

$$\frac{d^k}{dt^k} [e^{\mathbf{A}t}] = s^k e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}^k e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{A}^k. \quad (3.77)$$

Если  $N(s)$  – многочлен от оператора дифференцирования  $s$ , то

$$N(s) e^{At} = N(A) e^{At} = e^{At} \cdot N(A). \quad (3.78)$$

Часто встречается случай воздействия операторного многочлена  $N(s)$  на произведение матриц  $e^{At} \cdot B(t)$ . В предположении, что существует произведение  $A \cdot B(t)$  и не существует  $B(t) \cdot A$ , можно записать

$$\begin{aligned} s[e^{At} \cdot B(t)] &= e^{At} \cdot \dot{B}(t) + e^{At} \cdot AB(t) = e^{At} [sE + A] \cdot B(t), \\ s^2[e^{At} \cdot B(t)] &= e^{At} \cdot \ddot{B}(t) + 2e^{At} A \dot{B}(t) + e^{At} A^2 B(t) = e^{At} [sE + A] \cdot B(t), \\ &\dots\dots\dots \\ s^k[e^{At} \cdot B(t)] &= e^{At} (sE + A)^k \cdot B(t). \end{aligned}$$

В общем случае

$$N(s) [e^{At} \cdot B(t)] = e^{At} \cdot N(sE + A) \cdot B(t). \quad (3.79)$$

16.1.1.1.2 Интеграл от матричной экспоненты  $e^{At}$  можно найти путем интегрирования бесконечного ряда (3.75)

$$\int_0^t e^{At} dt = \int_0^t E dt + \int_0^t A t dt + \int_0^t \frac{A^2 t^2}{2!} dt + \dots = Et + \frac{A t^2}{2} + \frac{A^2 t^3}{3!} + \dots,$$

откуда

$$A \int_0^t e^{At} dt = e^{At} - E.$$

Из последнего соотношения, предполагая, что матрица  $A$  – неособенная, получим

$$\int_0^t e^{At} dt = A^{-1} (e^{At} - E) = (e^{At} - E) \cdot A^{-1}. \quad (3.80)$$

**Матричный синус:**

$$\sin A = A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots = \frac{\exp[jA] - \exp[-jA]}{2j}. \quad (3.81)$$

**Матричный косинус:**

$$\cos \mathbf{A} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} - \dots = \frac{\exp[j\mathbf{A}] + \exp[-j\mathbf{A}]}{2}. \quad (3.82)$$

Матричная комплексная экспонента в формулах (3.81) и (3.82) определяется уравнением (3.74) при замене  $\mathbf{A}$  на  $j\mathbf{A}$ :

$$\exp[j\mathbf{A}] = \left( \mathbf{E} - \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} - \dots \right) + j \left( \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} - \dots \right) = \cos \mathbf{A} + j \sin \mathbf{A}. \quad (3.83)$$

Как легко видеть, формулы (3.81) – (3.83) являются матричными аналогиями формул Эйлера.

**Матричный гиперболический синус:**

$$\operatorname{sh} \mathbf{A} = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5}{5!} + \dots = \frac{\exp \mathbf{A} - \exp[-\mathbf{A}]}{2}.$$

**Матричный гиперболический косинус:**

$$\operatorname{ch} \mathbf{A} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4}{4!} + \dots = \frac{\exp \mathbf{A} + \exp[-\mathbf{A}]}{2}.$$

Матричные тригонометрические тождества имеют соответствующие аналоги скалярных тригонометрических тождеств и выводятся с помощью вышеприведенных матричных соотношений.

Полезной при выводе ряда тригонометрических тождеств является действительная матрица  $(2 \times 2)$ , аналог скалярной мнимой единицы  $j = \sqrt{-1}$ . Она определяется как

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

Видно, что  $\mathbf{J}_0^2 = -\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{J}_0^3 = -\mathbf{J}_0$ ,  $\mathbf{J}_0^4 = \mathbf{E}$  и т.д.

### 3.6.3 Теорема Кэли – Гамильтона

Эта теорема касается весьма важного и полезного свойства характеристического полинома  $D(\lambda)$  и используется при нахождении различных функций от матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Теорема Кэли – Гамильтона.** Всякая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

**Доказательство.** Воспользуемся соотношением (3.47) и представим его в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}.$$

Для произвольной положительной степени  $p$  последнее соотношение представим в форме

$$\mathbf{A}^p = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}^p\mathbf{M}^{-1}. \quad (3.84)$$

Если  $N(\lambda)$  – многочлен от  $\lambda$  вида

$$N(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

то согласно (3.84) многочлен от матрицы  $\mathbf{A}$  равен

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^n + c_1\mathbf{A}^{n-1} + \dots + c_{n-1}\mathbf{A} + c_n\mathbf{E} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{\Lambda}) \cdot \mathbf{M}^{-1} = \\ &= \mathbf{M} \begin{bmatrix} N(\lambda_1) & & & \\ & N(\lambda_2) & & \\ & & \dots & \\ & & & N(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

где  $\lambda_i$  – собственные значения  $\mathbf{A}$ , то есть не нули многочлена  $N(\lambda)$ .

Если выбранный многочлен является характеристическим многочленом, то есть  $N(\lambda) = D(\lambda)$ , то  $N(\lambda_1) = N(\lambda_2) = \dots = N(\lambda_n) = 0$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{D}(\mathbf{A}) = [0],$$

где  $D(\lambda) = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$  – характеристический многочлен. Таким образом, теорема доказана для случая, когда все собственные значения  $\lambda_i$  различны. Однако

можно показать, что теорема справедлива и для произвольной квадратной матрицы.

С помощью теоремы Кэли – Гамильтона можно понижать порядок многочленов, находить обратную матрицу, возводить матрицу в произвольную положительную целую степень, вычислять функции от матриц.

Действительно, решив матричное характеристическое уравнение  $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = [0]$  относительно старшей степени матрицы  $\mathbf{A}$ , получим формулу для вычисления  $\mathbf{A}^n$  через полином  $(n-1)$ -го порядка. Последовательно умножая правую и левую часть этой формулы на  $\mathbf{A}$ , имеем итерационную процедуру для возведения  $\mathbf{A}$  в произвольную степень.

Решив то же уравнение  $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = [0]$  относительно низшей степени матрицы  $\mathbf{A}$  (то есть относительно единичной матрицы) и умножив правую и левую часть на обратную матрицу  $\mathbf{A}^{-1}$ , получим выражение для обратной матрицы через полином  $(n-1)$ -й степени от матрицы  $\mathbf{A}$ . В некоторых случаях этот метод удобнее, чем другие методы.

Пусть имеется матричный многочлен  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$  степени большей, чем порядок  $\mathbf{A}$ . Разделив  $N(\lambda)$  на характеристический полином  $\mathbf{A}$ , получим

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad (3.86)$$

где  $R(\lambda)$  – остаточный член порядка меньшего, чем  $D(\lambda)$ . Тогда, умножив уравнение (3.86) на  $D(\lambda)$ , получим

$$N(\lambda) = Q(\lambda) \cdot D(\lambda) + R(\lambda), \quad (3.87)$$

Так как (согласно теореме Кэли – Гамильтона)  $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = [0]$ , то  $\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(\mathbf{A})$  и, таким образом, полином любой степени может быть представлен полиномом  $(n-1)$ -й степени.

Вышеизложенное можно распространить не только на любую полиномиальную функцию  $\mathbf{A}$ , но и на произвольную функцию  $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ , где  $F(\lambda)$  предполагается аналитической функцией  $\lambda$  в некоторой области. При таком условии  $F(\lambda)$  может быть в области аналитичности представлена рядом Тейлора. Поэтому функция  $\mathbf{F}(\mathbf{A})$  может быть записана в виде многочлена от  $\mathbf{A}$  степени  $n-1$ . Действительно, если  $Q(\lambda)$  – аналитическая функция в некоторой области, то

$$F(\lambda) = Q(\lambda) \cdot D(\lambda) + R(\lambda), \quad (3.88)$$

где  $D(\lambda)$  – характеристический полином  $\mathbf{A}$ , а  $R(\lambda)$  – полином вида



$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1}. \quad (3.89)$$

16.1.1.1.3 Коэффициенты  $\alpha_i$  в уравнении (3.89) можно найти путем последовательной подстановки  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  в уравнение (3.88). Учитывая, что  $D(\lambda_i) = 0$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} F(\lambda_1) &= R(\lambda_1), \\ F(\lambda_2) &= R(\lambda_2), \\ &\dots\dots\dots \\ F(\lambda_n) &= R(\lambda_n). \end{aligned} \quad (3.90)$$

В этой системе  $n$  уравнений и  $n$  неизвестных. Следовательно, все  $\alpha_i$  определяются однозначно. Нетрудно показать, что  $Q(\lambda)$  является аналитической функцией в той же области, что и  $F(\lambda)$ . Действительно, нули знаменателя  $Q(\lambda)$  совпадают с нулями ее числителя:

$$Q(\lambda) = \frac{F(\lambda) - R(\lambda)}{D(\lambda)},$$

поэтому уравнение (3.88) справедливо для всех  $\lambda$  в области аналитичности  $F(\lambda)$ . Из этого следует, что если область аналитичности  $F(\lambda)$  включает все собственные значения  $\mathbf{A}$ , то вместо переменной  $\lambda$  можно подставить  $\mathbf{A}$ . В результате из уравнения (3.88) получим

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{Q}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{A}) + \mathbf{R}(\mathbf{A}),$$

а так как согласно теореме Кэли – Гамильтона  $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = [0]$ , то из последнего соотношения имеем

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(\mathbf{A}). \quad (3.91)$$

Теперь что касается кратных собственных значений. Ясно, что если  $\mathbf{A}$  имеет собственное значение  $\lambda_i$  кратности  $r$ , то подстановка  $\lambda_i$  в уравнение (3.88) даст лишь одно линейно независимое уравнение. Остальные  $r-1$  линейных уравнений для определения  $\alpha_i$  находятся дифференцированием обеих частей уравнения (3.88). В этом случае для нахождения единственного решения для коэффициентов  $\alpha_i$  полинома (3.89) нужно составить систему линейных уравнений вида

$$\left. \frac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i}, k = 0, 1, \dots, r-1. \quad (3.92)$$

### 3.6.4 Теорема Сильвестра

Теорема разложения Сильвестра находит применение при отыскании матричных функций, представляющих в замкнутой форме степенные ряды матрицы  $\mathbf{A}$ .

**Теорема Сильвестра.** Пусть  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$  – матричный многочлен от  $\mathbf{A}$  (неважно, конечный или бесконечный) и квадратная матрица  $\mathbf{A}$  имеет  $n$  различных собственных значений. Тогда имеет место формула

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n N(\lambda_i) \mathbf{Z}_0(\lambda_i), \quad (3.93)$$

где

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_i) = \frac{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E})}{\prod_{j=1, j \neq i}^n (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

**Доказательство.** Произвольный матричный многочлен  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$  по теореме Кэли – Гамильтона может быть представлен многочленом от  $\mathbf{A}$  степени  $n-1$ .

Запишем этот многочлен в следующей форме

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{A}) = & c_1(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E}) \cdot \dots \cdot (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{E}) + \\ & + c_2(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{E}) \cdot \dots \cdot (\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{E}) + \\ & + \dots + \\ & + c_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) + \\ & + \dots + \\ & + c_n(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E}) \cdot \dots \cdot (\mathbf{A} - \lambda_{n-1} \mathbf{E}) = \\ = & \sum_{k=1}^n c_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Каждое слагаемое в выражении (3.94) имеет  $n-1$  сомножителей, поэтому ясно, что правая часть формулы (3.94) – это многочлен степени  $n-1$  с  $n$  неоп-

ределенными пока постоянными  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Пусть  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  являются собственными векторами  $\mathbf{A}$ . Умножим справа уравнение (3.94) на  $\mathbf{u}_i$

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_i = \left[ \sum_{k=1}^n c_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n [\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}] \right] \cdot \mathbf{u}_i. \quad (3.95)$$

Так как  $\mathbf{u}_i$  суть собственный вектор, то он удовлетворяет уравнению  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E}) \cdot \mathbf{u}_i = 0$  и, следовательно, все слагаемые в (3.95) будут равны нулю, кроме  $i$ -го слагаемого (оно не содержит множителя  $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})$ ). Отсюда

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_i = \left[ c_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}] \right] \mathbf{u}_i = \left[ c_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [\lambda_i - \lambda_j] \right] \mathbf{u}_i. \quad (3.96)$$

Если все собственные числа  $\mathbf{A}$  различны, то

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{u}_i = N(\lambda_i) \cdot \mathbf{u}_i$$

и из уравнения (3.96) следует, что

$$c_i = \frac{N(\lambda_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (3.94), получаем окончательно уравнение (3.93)

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n N(\lambda_i) \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{E}]}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda_i - \lambda_j)},$$

что и требовалось доказать.

Следует заметить, что  $\mathbf{Z}_0(\lambda_i)$  в формуле (3.94) не зависят от вида полинома  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ . Можно показать, что

$$\mathbf{Z}_0(\lambda_i) = \frac{Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]}{dD(\lambda)/d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_i}, \quad (3.97)$$

где  $D(\lambda)$  – характеристический полином  $\mathbf{A}$ . С учетом соотношения (3.97) формула (3.93) примет вид

$$\mathbf{N}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n N(\lambda_i) \cdot \frac{Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]}{dD(\lambda)/d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_i}. \quad (3.98)$$

При наличии у  $\mathbf{A}$  кратных собственных значений формула (3.98) нуждается в модификации. Можно показать, что составляющая  $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ , обусловленная  $\lambda_i$  кратности  $r$ , равна

$$\frac{I}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{d\lambda^{r-1}} \left[ \frac{N(\lambda) \cdot Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda - \lambda_j)^r} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_i}. \quad (3.99)$$

Очевидно, что формула (3.99) годится и для простых корней ( $r=1$ ), поэтому окончательно

$$N(\mathbf{A}) = \sum_i \frac{I}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{d\lambda^{r-1}} \left[ \frac{N(\lambda) \cdot Adj[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda - \lambda_j)^r} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_i}, \quad (3.100)$$

где суммирование производится по всем различным корням, причем кратные корни входят в сумму (3.100) только один раз.

Уравнение (3.100) носит название **вырожденной формы** теоремы Сильвестра. Слагаемое выражения (3.100), соответствующее кратному корню, может быть представлено в виде

$$\frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1}}{d\lambda^{r-1}} \left[ \frac{N(\lambda) \cdot \text{Adj}[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda - \lambda_j)^r} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_i} = \sum_{k=1}^r \frac{N^{(k-1)}(\lambda_i) \mathbf{Z}_{r-k}(\lambda_i)}{(k-1)!}, \quad (3.101)$$

где

$$N^{(k)}(\lambda_i) = \frac{d^k N(\lambda)}{d\lambda^k} \Big|_{\lambda=\lambda_i}$$

и

$$\mathbf{Z}_k(\lambda_i) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[ \frac{\text{Adj}[\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}]}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\lambda - \lambda_j)^r} \right] \Big|_{\lambda=\lambda_i}.$$

### 3.7 Функциональные пространства

#### 3.7.1 Функциональный базис

Распространим векторные понятия подраздела 3.2 на функциональные пространства. Речь уже шла о том, что любые  $n$  линейно независимых векторов можно выбрать в качестве базиса в векторном пространстве  $V_n$ , так что произвольный вектор этого пространства можно представить линейной комбинацией базисных векторов.

Аналогично этому рассмотрим такую систему из  $n$  функций  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$ , ...,  $f_n(t)$ , определенных на интервале  $[a, b]$ , что ни одна из этих функций не является линейной комбинацией остальных  $(n-1)$  функций. Ясно, что линейная комбинация  $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t)$  не описывает всех функций, определенных на интервале  $[a, b]$ . Однако можно таким образом выбрать базисные функции, что любая функция, удовлетворяющая определенным условиям, может быть выражена в виде линейной комбинации составляющих этого базиса.

По аналогии со скалярным произведением векторов определим скалярное произведение вещественных функций  $f(t)$  и  $g(t)$ , заданных на интервале  $[a, b]$ , как

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Для комплексных функций действительной переменной  $t$  скалярное произведение будет равно

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(t) \cdot g(t)dt.$$

Предполагается, что все функции удовлетворяют условию Лебега  $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ .

Норма вещественной функции аналогична норме вектора

$$\|f(t)\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_a^b f^2(t)dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Функции  $f(t)$  и  $g(t)$  являются **ортгогональными** на интервале  $[a, b]$ , если их скалярное произведение равно нулю  $\langle f, g \rangle = 0$ .

Система функций  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$  называется **ортонормированной**, если выполняется условие

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij},$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Можно рассматривать бесконечную ортонормированную систему функций  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$  как базис в бесконечномерном пространстве. Тогда по аналогии с векторным пространством функцию  $f(t)$  можно считать вектором в этом пространстве, причем соответствующие координаты этого вектора по базисным функциям задаются в виде

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt. \quad (3.102)$$

Разложение самой функции  $f(t)$  выглядит в этом случае так (при определенных ограничениях на функцию  $f(t)$ ):

$$f(t) = \sum_{k=l}^{\infty} c_k \varphi_k(t). \quad (3.103)$$

Если в качестве ортонормированных функций выбраны гармонические функции, то разложение (3.103) с учетом (3.102) представляет собой обычное разложение в ряд Фурье (1.33). Это дает основание называть координаты  $c_k$ , определяемые формулой (3.102), коэффициентами разложения, коэффициентами Фурье или спектральными составляющими.

В определение ортонормированных функций можно ввести весовую функцию  $w(t)$ :

$$\int_a^b \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t) \cdot w(t) dt = \delta_{ij}. \quad (3.104)$$

Весовая функция выбирается чаще всего для выделения некоторой области на интервале  $[a, b]$ . В таком случае говорят, что функции  $\varphi_i$  ортонормированы относительно весовой функции  $w$ . Коэффициенты спектрального разложения функции  $f(t)$  относительно весовой функции  $w(t)$  определяется так

$$c_k = \int_a^b f(t) \varphi_k(t) w(t) dt. \quad (3.105)$$

В качестве примера можно привести разложение функции  $f(t)$  на интервале  $[0, \infty)$  по полиномам Лагерра с весовой функцией  $w(t) = e^{-t}$ . В результате по формуле (3.105) будем иметь

$$c_k = f^*(n) = \int_0^{\infty} f(t) L_n(t) e^{-t} dt, (n = 0, 1, 2, \dots).$$

А сама функция  $f(t)$  в результате разложения примет вид

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f^*(n) \cdot L_n(t).$$

Два последних соотношения задают уже знакомое преобразование Лагерра (см. формулы (1.83) и (1.84)).

В случае, если базисные функции взяты не из счетного, а из континуального множества функций, мы приходим к интегральным преобразованиям, описываемым общими формулами (1.72) и (1.73).

### 3.7.2 Аппроксимация функций

Ограничение ряда (3.103) конечным числом слагаемых дает некоторую аппроксимацию функции  $f(t)$  линейной комбинацией  $n$  ортонормированных функций

$$f^*(t) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t),$$

причем коэффициенты  $a_k$  этой линейной комбинации не обязательно равны коэффициентам Фурье  $c_k$ . Равенство  $a_k = c_k$  должно выполняться в том случае, если мы хотим получить наилучшую в смысле “минимума квадратов” аппроксимацию. Это можно показать, минимизируя  $\varepsilon$ - квадрат нормы разности  $f$  и  $f^*$ , т.е.

$$\varepsilon = \|f(t) - f^*(t)\|^2 = \left\| f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right\|^2 = \int_a^b \left[ f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right]^2 dt. \quad (3.107)$$

Приравнявая к нулю производную от  $\varepsilon$  по  $a_j$ , имеем

$$\int_a^b f(t) \cdot \varphi_j(t) dt = \int_a^b \left[ \varphi_j(t) \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \right] dt.$$

Учитывая, что левая часть последнего выражения суть  $\langle f, \varphi_j \rangle = c_j$ , а условие ортогональности – это  $\langle \varphi_j, \varphi_k \rangle = \delta_{jk}$ , получаем  $c_j = a_j$ . Такая аппроксимация из условия минимума среднего квадрата ошибки известна как аппроксимация “в среднем”.

Принимая во внимание, что  $\varepsilon$  – неотрицательная величина, из (3.107) имеем

$$\int_a^b f^2(t) dt - \sum_{k=1}^n c_k^2 \geq 0. \quad (3.108)$$

Соотношение (3.108) известно как неравенство Бесселя. Так как члены аппроксимирующего ряда ортонормированны, добавление ортонормированных членов  $\varphi_{n+1}(t)$ ,  $\varphi_{n+2}(t)$ , ... в ряд (3.106) уменьшает среднеквадратичную ошибку между  $f$  и  $f^*$ . Но, несмотря на то, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$  сходится к положи-



тельному числу, не превосходящему  $\int_a^b f^2(t)dt$ , это положительное число не обязательно тождественно равно данному интегралу.

Система ортонормированных функций  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots$  называется **полной**, если произвольная кусочно – непрерывная функция  $f(t)$  может быть аппроксимирована в среднем со сколь угодно малой ошибкой. Это означает, что для любого  $\varepsilon \geq 0$  найдется такое  $N$ , что как только  $n$  превысит  $N$ , будет выполняться неравенство

$$\int_a^b \left[ f(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t) \right]^2 dt \leq \varepsilon. \quad (3.109)$$

В другой форме условие (3.109) выглядит как

$$\|f\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k^2. \quad (3.110)$$

Уравнение (3.110) известно как "соотношение полноты". Достаточным условием полноты ортонормированной системы будет выполнение уравнения (3.110) для всех значений  $f(t)$  на интервале  $[a, b]$ , при которых функция непрерывна. Нелишне заметить, что из условия полноты (3.110) не следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t) = f(t). \quad (3.111)$$

При сходимости ряда (3.111) к  $f(t)$  в среднем среднеквадратичная ошибка, безусловно, стремится к нулю на интервале  $[a, b]$ . Тогда ряд (3.111) описывает функцию  $f(t)$  в данной точке, если он сходится **равномерно** на интервале  $[a, b]$ , и функция  $f(t)$  является **непрерывной** функцией на этом интервале. Но в общем случае даже при полной ортонормированной системе функций доказательство сходимости ряда (3.111) – задача довольно трудная.

## 4 Векторно – матричные дифференциальные УРАВНЕНИЯ

### 4.1 Уравнения состояния

Альтернативной дифференциальному уравнению  $n$ -го порядка формой описания динамических систем является векторно – матричная форма. Векторно – матричная форма по сути является записью уравнения (1.1) в нормальной форме Коши с привлечением дополнительных переменных, называемых **переменными состояния**.

Понятие переменных состояния уже давалось (см. с. 25 части I), но нелишне напомнить его еще раз. Переменные состояния системы – это такие переменные, знание значений которых в некоторый момент времени  $t_0$  позволяет определить поведение системы в текущий момент времени  $t > t_0$  (естественно, если известны входные воздействия системы на интервале  $(t_0, t)$ ). Если

ввести обозначения  $\mathbf{r}(t)$  – входные переменные,  $\mathbf{y}(t)$  – выходные переменные,  $\mathbf{x}(t)$  – переменные состояния, то общее математическое описание динамической системы задастся уравнениями

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \delta(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{r}(\tau)), \\ \mathbf{y}(t) &= \lambda(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{r}(\tau)), \quad t_0 \leq \tau \leq t,\end{aligned}\quad (4.1)$$

где  $\delta$  и  $\lambda$  являются однозначными функциями. Уравнения (4.1) называются **уравнениями состояния**. Часто уравнением состояния называется первое из уравнений (4.1), а второе носит название уравнения выхода.

#### 4.1.1 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Если динамическая система описывается или может быть описана обыкновенным дифференциальным уравнением (1.1) или линейным обыкновенным дифференциальным уравнением (1.5), то переход к нормальной форме Коши дает уравнения состояния такой системы. Переход от уравнения (1.1) или (1.5) к уравнениям состояния может быть произведен различными способами в соответствии с различным определением переменных состояния, важно только, чтобы переменные состояния системы подлежали измерению (контролю).

Например, перейти от уравнения (1.5) к уравнениям состояния можно следующим образом. Пусть (для простоты) в уравнении (1.5) отсутствуют производные входного воздействия. Также не снижая общности можно положить коэффициент при старшей производной единице. Тогда уравнение (1.5) имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = r. \quad (4.2)$$

Переменные состояния введем следующим образом:

$$\begin{aligned}x_1 &= y, \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \dot{y}, \\ x_3 &= \dot{x}_2 = y^{(2)}, \\ &\dots \\ x_n &= \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Подставив значения  $y$  и его производных в уравнение (4.2), найдем

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + r.$$

16.1.1.1.4 Полученные уравнения запишем в нормальной форме Коши, то есть первые производные перенесем в левую часть, а все остальное – в правую. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + r, \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти уравнения состояния (4.3) удобнее записать в матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (4.5)$$

Уравнения состояния (4.4) с матрицами вида (4.5) носят название **стандартной формы** (у некоторых авторов можно встретить название **каноническая форма фазовой переменной**). Матрица  $\mathbf{A}$  вида (4.5) называется **матрицей Фробениуса**.

Уравнения (4.4) естественным образом обобщаются на случай многомерной системы, имеющей  $m$  входов и  $p$  выходов. Тогда в общем виде  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{y}$  являются векторами и, кроме того, выход может напрямую зависеть от входа. С учетом этого общий вид уравнений состояния будет такой

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  и  $\mathbf{D}(t)$  – матрицы соответствующих размерностей с изменяющимися в общем случае во времени элементами.

Блок – схема системы, соответствующая уравнениям (4.6), приведена на рис. 4.1.

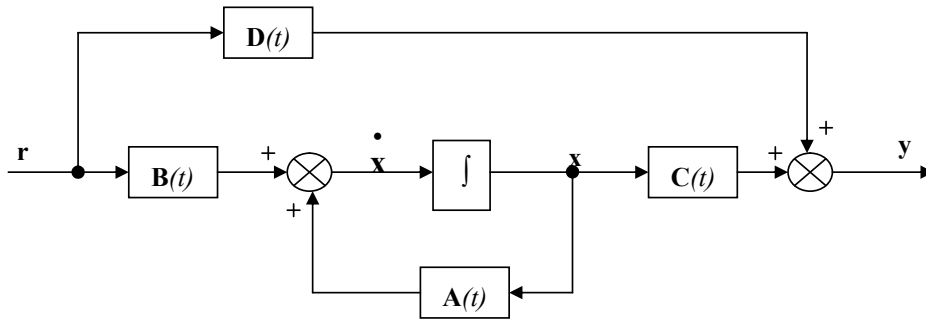


Рис. 4.1.

Для системы с постоянными параметрами матрицы  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$ ,  $\mathbf{D}(t)$  от времени не зависят и могут записываться просто как  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ . В случае стационарных систем уравнения состояния записываются, таким образом, как

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Br}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Dr}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

#### 4.1.2 Каноническая форма

16.1.1.1.5 При исследовании систем, описываемых уравнениями состояния, часто является удобным такой выбор переменных состояния, чтобы разноименные компоненты вектора состояния не зависели друг от друга.

16.1.1.1.6 Возьмем уравнения состояния (4.7), где, в общем случае, матрица  $\mathbf{A}$  – произвольная квадратная матрица с различными собственными значениями. Произведем линейное преобразование  $\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{q}$ , где  $\mathbf{M}$  – модальная матрица. Тогда уравнения (4.7) запишутся в виде

16.1.1.1.7

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}\mathbf{q}} &= \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{D}\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Умножив первое из уравнений (4.8) на  $\mathbf{M}^{-1}$ , получим

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{q} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{r}.$$

Так как матрица  $\mathbf{M}$  является модальной матрицей, преобразование подобия  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$  дает диагональную матрицу с собственными числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  по диагонали. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} + \mathbf{B}_n\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_n\mathbf{q} + \mathbf{D}_n\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{B}_n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}_n = \mathbf{C}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}_n = \mathbf{D}$ .

Уравнения (4.9) носят название **нормальной** или **канонической** формы уравнений состояния. При этом дифференциальные уравнения развязаны относительно переменных состояния  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и имеют вид  $\dot{q}_i = \lambda_i q_i + f_i$ , где  $f_i$  – вынуждающая функция, воздействующая на  $i$ -ю переменную состояния.

Можно показать, что, если уравнения (4.7) представлены в стандартной форме (т.е. матрица  $\mathbf{A}$  является матрицей Фробениуса), то модальная матрица  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I & I & \dots & I \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Матрица вида (4.10) называется матрицей Вандермонда.

При наличии у  $\mathbf{A}$  кратных собственных значений и в случае, когда дефект характеристической матрицы  $[\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A}]$  меньше кратности корня  $\lambda_i$ , диагональная матрица  $\mathbf{\Lambda}$  в уравнении (4.9) заменяется на недиагональную матрицу Жордана.

## 4.2 Обыкновенные уравнения стационарных систем

### 4.2.1 Переходная матрица и методы ее вычисления

Однородное уравнение для линейной стационарной системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная размерностью  $n$  матрица с постоянными коэффициентами,  $\mathbf{x}$  – вектор-столбец переменных состояния. Аналогично скалярному случаю, решение уравнения (4.11) ищется в виде

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0), \quad (4.12)$$

где матрица  $e^{\mathbf{A}t}$  определяется уравнением (3.75), а вектор  $\mathbf{x}(t_0)$  задает начальные условия. Подставив выражение (4.12) в уравнение (4.11) и выполнив дифференцирование по всем правилам, удостоверимся, что оно (выражение (4.12)) действительно является решением однородного дифференциального уравнения. Подставив в формулу (4.12)  $t = t_0$ , можно убедиться, что начальные условия удовлетворяются, поскольку  $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}|_{t=t_0} = \mathbf{E}$ .

Матрица  $\Phi(t - t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ , удовлетворяющая однородному дифференциальному векторно-матричному уравнению (4.11), называется **переходной матрицей** или **фундаментальной матрицей**. Термином “фундаментальная матрица” чаще пользуются математики, связанные с матричными дифференциальными уравнениями, а словосочетание “переходная матрица состояния” встречается в теории управления и теории систем. Прилагательное “переходная” обусловлено тем, что с помощью матрицы  $\Phi(t - t_0)$  осуществляется “переход” системы от некоторого начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  к текущему состоянию  $\mathbf{x}(t)$ .

Для вычисления переходной матрицы  $\Phi(t)$  могут применяться несколько методов. Из уже рассмотренных методов сюда относятся методы, основанные на теореме разложения Сильвестра и теореме Кэли – Гамильтона. К другим

методам относятся метод разложения в степенной ряд и метод, основанный на преобразовании Лапласа.

**Метод разложения в степенной ряд.** Согласно уравнению (3.75) переходную матрицу  $\Phi(t)$  можно представить бесконечным рядом

$$\Phi(t) = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \quad (4.13)$$

Вычисление ряда (4.13) – задача трудоемкая, особенно если ряд сходится медленно, а порядок матрицы  $\Phi(t)$  недостаточно низкий. Степени матрицы  $A^k$  могут быть найдены с использованием теоремы Кэли – Гамильтона. После выполнения суммирования необходимо найти в замкнутом виде все элементы матрицы  $\Phi(t)$ . Количество членов при вычислении ряда (4.13) определяется скоростью сходимости: ограничиваются числом  $N$  членов ряда, если относительный вклад  $(N+1)$ -го слагаемого в уже вычисленную сумму для каждого элемента матрицы  $\Phi(t)$  становится меньше наперед заданного числа.

**Метод преобразования Лапласа.** Применим преобразование Лапласа к уравнению (4.11):

$$sX(s) - x(t_0) = AX(s).$$

Полученное уравнение разрешим относительно  $X(s)$ :

$$X(s) = (sE - A)^{-1} x(t_0). \quad (4.14)$$

Применяя к обеим частям уравнения (4.14) обратное преобразование Лапласа, получим

$$x(t) = L^{-1} \{ (sE - A)^{-1} x(t_0) \}. \quad (4.15)$$

Из уравнений (4.15) и (4.12) делаем вывод, что переходная матрица может быть представлена формулой

$$\Phi(t - t_0) = L^{-1} \{ (sE - A)^{-1} \}. \quad (4.16)$$

Таким образом, в этом методе для вычисления переходной матрицы необходимо найти обратную матрицу  $(sE - A)^{-1}$  и применить к ней обратное преобразование Лапласа.

Очень просто находить переходную матрицу для уравнений состояния, представленных в канонической форме (4.9). В этом случае переходная матрица равна

$$\Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)} = \text{diag}[e^{\lambda_i(t-t_0)}] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & & \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Для произвольной матрицы  $\mathbf{A}$  на основании преобразования подобия  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$  можно записать

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}\mathbf{M}^{-1}. \quad (4.18)$$

Переходную матрицу на основе (4.18) можно представить, воспользовавшись формулой (3.85):

$$\Phi(t - t_0) = e^{A(t-t_0)} = \mathbf{M}e^{\mathbf{\Lambda}(t-t_0)}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M} \text{diag}[e^{\lambda_i(t-t_0)}]\mathbf{M}^{-1}. \quad (4.19)$$

Выражение (4.19) представляет собой еще один метод вычисления переходной матрицы (с использованием модальной матрицы).

#### 4.2.2 Общее решение неоднородных уравнений

Уравнения состояния линейной стационарной системы задаются согласно (4.7) в виде

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbf{A}$  в этих уравнениях – основная матрица системы, так как ее структура определяет переходную матрицу состояния. От этой матрицы зависит как вынужденная (установившаяся), так и переходная составляющие решения. Матрица  $\mathbf{B}$  – матрица связи: структура этой матрицы определяет характер связи входных воздействий с переменными состояния. Матрица  $\mathbf{C}$  – также матрица связи, а именно, связи переменных состояния с выходными переменными системы. Наконец, матрица  $\mathbf{D}$  – опять матрица связи; на этот раз связи входных переменных непосредственно с выходными переменными. Часто для реальных систем  $\mathbf{D}$  является нулевой матрицей, так что связь входа непосредственно с выходом отсутствует.

Как и в скалярном случае, общее решение уравнений (4.7) для  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  можно получить разными методами. Например, как это сделать с помощью метода вариации параметров, рассмотрено ниже.



Соответствующее однородное дифференциальное уравнение (4.12) имеет решение  $\mathbf{x}_0(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0)$  при  $t \geq t_0$ . Подобно формуле (1.28) частное решение ищем в виде  $\mathbf{x}_H(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{U}(t)\mathbf{x}(t_0)$ . Тогда общее решение неоднородного уравнения (4.7) равно

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{x}_H(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \Phi(t - t_0)\mathbf{U}(t)\mathbf{x}(t_0).$$

16.1.1.1.9 Удобнее это уравнение записать в форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t - t_0)(\mathbf{E} + \mathbf{U}(t))\mathbf{x}(t_0) = \Phi(t - t_0)\mathbf{z}(t), \quad (4.20)$$

где подлежит определению неизвестный пока вектор  $\mathbf{z}(t) = (\mathbf{E} + \mathbf{U}(t))\mathbf{x}(t_0)$ .

Подставляя уравнение (4.20) в уравнение (4.7), получим

$$\left[ \dot{\Phi}(t - t_0) - \mathbf{A}\Phi(t - t_0) \right] \mathbf{z}(t) + \Phi(t - t_0) \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{r}(t).$$

Так как переходная матрица удовлетворяет однородному уравнению (4.11), первое слагаемое в последнем выражении равно нулю и получаем

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \Phi^{-1}(t - t_0)\mathbf{B}\mathbf{r}(t). \quad (4.21)$$

Интегрируя уравнение (4.21) в пределах от  $t_0$  до  $t$ , имеем

$$\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(t - t_0)\mathbf{B}\mathbf{r}(t) dt. \quad (4.22)$$

Учитывая, что  $\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ , из уравнений (4.20) и (4.22) находим  $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \Phi(t - t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau - t_0)\mathbf{B}\mathbf{r}(\tau) d\tau.$$

16.1.1.1.10 Поскольку

$$\Phi(t - t_0) \cdot \Phi^{-1}(\tau - t_0) = e^{\mathbf{A}(t - t_0)} \cdot e^{-\mathbf{A}(\tau - t_0)} = e^{\mathbf{A}(t - \tau)} = \Phi(t - \tau),$$

окончательно получаем

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{r}(\tau)d\tau. \quad (4.23)$$

Решение для  $\mathbf{y}(t)$  следует из подстановки уравнения (4.23) в уравнение выхода (4.7)

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t - t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{C}\Phi(t - \tau)\mathbf{B}\mathbf{r}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{r}(t). \quad (4.24)$$

Выражения (4.23) и (4.24) являются решениями уравнений состояния (4.7). Первое слагаемое в уравнении (4.23) представляет собой переходную составляющую решения, обусловленную начальными условиями, тогда как второе слагаемое (по сути, это интеграл свертки) является вынужденной составляющей, зависящей от входного воздействия.

### 4.3 Обыкновенные уравнения нестационарных систем

#### 4.3.1 Переходная нестационарная матрица

Если параметры системы изменяются во времени, то элементы матрицы  $\mathbf{A}$  не являются постоянными, а являются функциями времени. В этом случае однородное векторно - матричное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \quad (4.24)$$

При решении этого уравнения естественно обратиться к скалярной аналогии, то есть к скалярному уравнению

$$\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t). \quad (4.25)$$

Решение уравнения (4.25) равно

$$x(t) = \left( \exp \left\{ \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right\} \right) x(t_0), \quad (4.26)$$

где  $t_0$  – некоторый начальный момент времени.

По аналогии с формулой (4.26) решение матричного уравнения (4.24) предполагается в виде

$$\mathbf{x}(t) = \left[ \exp \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t) dt \right] \cdot \mathbf{x}(t_0) \quad (4.27)$$

Но при подстановке выражения (4.27) в уравнение (4.24) видно, что формула (4.27) действительно представляет собой решение в том и только в том случае, если

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{I}(t)} = \frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} \cdot e^{\mathbf{I}(t)}, \quad (4.28)$$

где  $\mathbf{I}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t) dt$ .

К сожалению, условие (4.28) выполняется не всегда; более того, оно чаще не выполняется, чем выполняется. В двух частных, но тривиальных случаях уравнение (4.28) выполняется всегда, - это: матрица  $\mathbf{A}$  – постоянная или  $\mathbf{A}$  – диагональная матрица. Решение для первого случая уже разбиралось, а во втором случае уравнения состояния оказываются не связанными друг с другом, так что для каждого  $x_i$  годится решение (4.26).

Можно показать, что условие (4.28) трансформируется в условие коммутативности для матрицы  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(t_1) \cdot \mathbf{A}(t_2) = \mathbf{A}(t_2) \cdot \mathbf{A}(t_1) \text{ для всех } t_1 \text{ и } t_2. \quad (4.29)$$

Таким образом, если выполняется уравнение (4.29), то выражение (4.27) является решением уравнения (4.24) и переходная матрица состояния (зависящая уже от двух аргументов  $t$  и  $t_0$ ) равна

$$\Phi(t, t_0) = \exp \int_{t_0}^t \mathbf{A}(t) dt. \quad (4.30)$$

Если условие коммутативности (4.29) не выполняется, переходная матрица уже не может выражаться уравнением (4.30). Тогда решение уравнения (4.24) можно получить методом, известным как **метод интегрирования Пеано – Бэкера**. Этот метод заключается в следующем.

При заданных начальных условиях  $\mathbf{x}(t_0)$  проинтегрируем уравнение (4.24)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \mathbf{x}(\tau) d\tau. \quad (4.31)$$

Это уравнение можно встретить под названием **векторного интегрального уравнения Вольтерра**. Решается это уравнение путем последовательных подстановок правой части уравнения (4.31) в подинтегральное выражение вместо  $\mathbf{x}(t)$ . Например, первая итерация даст

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) \left[ \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{A}(\lambda) \mathbf{x}(\lambda) d\lambda \right] d\tau. \quad (4.32)$$

Упростить запись подобных выражений можно введением оператора интегрирования  $\mathbf{Q}(\dots) = \int_{t_0}^t (\dots) d\tau$ . Тогда уравнение (4.31) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{x}),$$

а уравнение (4.32) приобретает вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t_0) + \mathbf{Q}(\mathbf{A})\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{x})). \quad (4.33)$$

Продолжая процедуру, описываемую уравнением (4.33), получим  $\mathbf{x}(t)$  в виде **ряда Неймана**

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{E} + \mathbf{Q}(\mathbf{A}) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A})) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}))) + \dots] \mathbf{x}(t_0). \quad (4.34)$$

Первое слагаемое в скобках – это единичная матрица. Второе слагаемое равно интегралу от  $\mathbf{A}(t)$  в пределах от  $t_0$  до  $t$ . Третье слагаемое получается умножением  $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$  на  $\mathbf{A}$  слева и последующим интегрированием произведения в пределах от  $t_0$  до  $t$  и т.д. Если элементы матрицы  $\mathbf{A}$  ограничены на отрезке интегрирования, то бесконечный ряд сходится равномерно и абсолютно к некоторой квадратной матрице  $\mathbf{G}(\mathbf{A})$ , называемой **матрицантом**:

$$\mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{E} + \mathbf{Q}(\mathbf{A}) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A})) + \mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}\mathbf{Q}(\mathbf{A}))) + \dots \quad (4.35)$$

Основное свойство матрицанта заключается в том, что

$$\frac{d}{dt} \mathbf{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}\mathbf{G}(\mathbf{A}). \quad (4.36)$$

Это свойство нетрудно доказать, если взять производную по  $t$  от обеих частей выражения (4.35).

Выражение (4.34) совместно со свойством (4.36) дают основание утверждать, что  $\mathbf{G}(\mathbf{A})$  представляет собой искомую переходную матрицу состояния нестационарной системы:

$$\Phi(t, t_0) = G(A). \quad (4.37)$$

Понятно, что при постоянной матрице  $A$  из выражения (4.35) следует, что

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t - t_0) = E + (t - t_0)A + \frac{(t - t_0)^2}{2!} A^2 + \frac{(t - t_0)^3}{3!} A^3 + \dots = e^{A(t-t_0)}.$$

Недостаток этого метода очевиден: при медленной сходимости ряда (4.35) процесс вычисления достаточно трудоемок.

Во многих случаях переходная матрица легко получается при надлежащем выборе переменных состояния. Может оказаться полезным определить, существуют ли такие переменные состояния, чтобы было правомерным применение соотношения (4.30).

Сведем воедино свойства переходных матриц, часть из которых уже отмечалась.

**Свойство 1.**

$$\Phi(t, t) = E. \quad (4.38)$$

Это свойство следует из определения переходной матрицы.

**Свойство 2.**

$$\Phi(t_1, t_2) \cdot \Phi(t_2, t_3) = \Phi(t_1, t_3). \quad (4.39)$$

Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} x(t_2) &= \Phi(t_2, t_3)x(t_3) \text{ и} \\ x(t_1) &= \Phi(t_1, t_2)x(t_2) = \Phi(t_1, t_3)x(t_3). \end{aligned}$$

Подставив первое из них во второе, получим

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_2) \cdot \Phi(t_2, t_3)x(t_3) = \Phi(t_1, t_3) \cdot x(t_3),$$

откуда с неизбежностью следует соотношение (4.39).

**Свойство 3.**

$$\Phi(t_1, t_2) = \Phi^{-1}(t_2, t_1). \quad (4.40)$$

Это свойство вытекает из свойства 2, если вместо  $t_3$  в формулу (4.39) подставить  $t_1$ . Получим

$$\Phi(t_1, t_2) \cdot \Phi(t_2, t_1) = \Phi(t_1, t_1) = E$$

или, умножая справа на  $\Phi^{-1}(t_2, t_1)$ , имеем формулу (4.40).

**Свойство 4.** (для стационарных систем).

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(t) \cdot \Phi(\tau). \quad (4.41)$$

Это свойство следует непосредственно из свойств матричной экспоненты, поскольку  $\Phi(t) = e^{At}$ .

**Свойство 5.** (для стационарных систем).

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t). \quad (4.42)$$

Это свойство является непосредственным следствием свойства 3 в применении к стационарным системам или вытекает из формулы (4.41), если в последнюю подставить  $\tau = -t$ .

#### 4.3.2 Сопряженная система

Важную роль при решении нестационарных уравнений, а также в задачах оптимального управления играет обратная переходная матрица  $\Phi^{-1}(t, \tau)$ . Ее значимость связана с соотношением (4.40), из которого следует

$$\Phi(t, \tau) = \Phi^{-1}(\tau, t).$$

Поведение системы относительно переменной  $t$  определяется динамическими свойствами исходной системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ . Поведение системы относительно переменной  $\tau$  зависит от динамических свойств такой системы, для которой  $\Phi^{-1}(t, \tau)$  является переходной матрицей. Такая система называется **сопряженной системой**. Если исходная система задана уравнением  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ , то **сопряженная система** определяется как

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\boldsymbol{\alpha}\mathbf{A}(t), \quad (4.43)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}$  - вектор – строка. В привычной записи это же уравнение выглядит так

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\mathbf{A}^T(t)\boldsymbol{\alpha}, \quad (4.44)$$

где  $\boldsymbol{\alpha}$  - вектор – столбец.

Легко показать, что  $\Phi^{-1}(t, \tau)$  действительно является переходной матрицей для уравнения (4.43). Для этого вспомним уравнение (3.11), согласно которому

$$\frac{d\Phi^{-1}(t, \tau)}{dt} = -\Phi^{-1}(t, \tau) \cdot \dot{\Phi}(t, \tau) \cdot \Phi^{-1}(t, \tau).$$

Учитывая, что  $\dot{\Phi}(t, \tau) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, \tau)$ , из последнего выражения получим

$$\dot{\Phi}^{-1}(t, \tau) = -\Phi^{-1}(t, \tau) \cdot \mathbf{A}(t), \quad (4.45)$$

т.е.  $\Phi^{-1}(t, \tau)$  удовлетворяет однородному уравнению (4.43) и, следовательно, является переходной матрицей состояния для системы (4.43). Транспонирование уравнения (4.45) дает

$$\left[ \Phi^{-1}(t, \tau) \right]^T = \left[ \Phi^T(t, \tau) \right]^{-1} = -\mathbf{A}^T(t) \cdot \left[ \Phi^T(t, \tau) \right]^{-1}.$$

Таким образом,  $[\Phi^T(t, \tau)]^{-1}$  является переходной матрицей для системы, описываемой уравнением (4.44).

Уравнение сопряженной системы можно получить и воспользовавшись дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка. Однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = 0 \quad (4.46)$$

можно записать как  $D_n(s)y = 0$ , где  $D_n(s)$  – линейный оператор, определяемый формулой

$$D_n(s) = s^n + \sum_{k=1}^n a_k(t)s^{(n-k)}, \quad s^k = \frac{d^k}{dt^k},$$

а  $a_k(t)$  – действительные функции.

Тогда **сопряженный линейный оператор** определяется как

$$D_n^*(s) = (-I)^n s^n + \sum_{k=1}^n (-I)^{n-k} s^{n-k} a_k(t), \quad (4.47)$$

где запись  $s^{n-k}a_k(t)$  говорит о том, что  $s^{n-k}$  действует на произведение  $a_k(t)$  и зависимой переменной. Сопряженное линейное дифференциальное уравнение  $D_n^*(s)\alpha = 0$  будет записываться в виде

$$(-1)^n s^n \alpha + (-1)^{n-1} s^{n-1} [a_1(t) \alpha] + \dots + a_n(t) \alpha = 0.$$

Если дифференциальное уравнение (4.46) представить в стандартной матричной форме  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ , то матрица  $\mathbf{A}(t)$  является матрицей Фробениуса

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & \dots & -a_1(t) \end{bmatrix}.$$

Для сопряженной системы матричное уравнение согласно (4.44) равно  $\dot{\alpha} = -\mathbf{A}^T(t)\alpha$  и матрица  $-\mathbf{A}^T(t)$  имеет вид

$$-\mathbf{A}^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n(t) \\ -I & 0 & \dots & 0 & a_{n-1}(t) \\ 0 & -I & \dots & 0 & a_{n-2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -I & a_1(t) \end{bmatrix}.$$

Выполняя последовательное дифференцирование компонент вектора  $\alpha$ , можно показать, что операторная и матричная формы уравнений сопряженной системы эквивалентны.

Можно найти сопряженный оператор и на основе его определения

$$\langle \alpha, D(s)\mathbf{x} \rangle = \langle [D^*(s)]^T \alpha, \mathbf{x} \rangle.$$

Это определение часто используется при формулировке критериев существования и единственности решения дифференциальных уравнений.

### 4.3.3 Общее решение нестационарных уравнений



Используя понятие сопряженной системы, можно получить общее решение уравнений состояния нестационарных систем. В общем виде уравнения состояния линейной системы задаются в виде (4.6)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{r}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Уравнение для переходной матрицы сопряженной системы имеет вид (4.45)

$$\dot{\Phi}^{-1}(t, \tau) = -\Phi^{-1}(t, \tau) \cdot \mathbf{A}(t).$$

Умножим первое из уравнений (4.6) на  $\Phi^{-1}(t, \tau)$  слева, а уравнение (4.45) – на  $\mathbf{x}$  справа:

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(t, \tau) \dot{\mathbf{x}} &= \Phi^{-1}(t, \tau) \cdot \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \Phi^{-1}(t, \tau)\mathbf{B}(t)\mathbf{r}, \\ \dot{\Phi}^{-1}(t, \tau)\mathbf{x} &= -\Phi^{-1}(t, \tau) \cdot \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.\end{aligned}$$

16.1.1.1.11 Сложение последних двух выражений приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt} [\Phi^{-1}(t, \tau)\mathbf{x}] = \Phi^{-1}(t, \tau) \cdot \mathbf{B}(t)\mathbf{r}. \quad (4.48)$$

Проинтегрируем уравнение (4.48) в пределах от  $\tau$  до  $t$ . В результате получим

$$\Phi^{-1}(t, \tau)\mathbf{x}(t) - \Phi^{-1}(\tau, \tau)\mathbf{x}(\tau) = \int_{\tau}^t \Phi^{-1}(\lambda, \tau)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{r}(\lambda)d\lambda.$$

Из последнего выражения найдем  $\mathbf{x}(t)$ , учитывая, что  $\Phi^{-1}(\tau, \tau) = \mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \tau)\mathbf{x}(\tau) + \Phi(t, \tau) \int_{\tau}^t \Phi^{-1}(\lambda, \tau)\mathbf{B}(\lambda)\mathbf{r}(\lambda)d\lambda.$$

Воспользовавшись тем, что

$$\Phi(t, \tau) \cdot \Phi^{-1}(\lambda, \tau) = \Phi(t, \tau) \cdot \Phi(\tau, \lambda) = \Phi(t, \lambda),$$

окончательно получим

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, \tau) \cdot \mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t, \lambda) \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{r}(\lambda) d\lambda. \quad (4.49)$$

Решение для  $\mathbf{y}(t)$  получается подстановкой уравнения (4.49) во второе из уравнений (4.6)

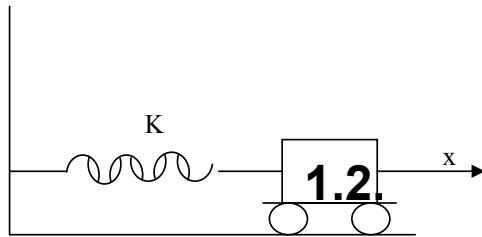
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \Phi(t, \tau) \mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \mathbf{C}(t) \Phi(t, \lambda) \mathbf{B}(\lambda) \mathbf{r}(\lambda) d\lambda + \mathbf{D}(t) \mathbf{r}(t). \quad (4.50)$$

Выражения (4.49) и (4.50) являются общим решением неоднородных линейных нестационарных дифференциальных уравнений (4.6). По своему виду и структуре они подобны соответственно решениям (4.23) и (4.24).

#### 4.4 Уравнения в частных производных

##### 4.4.1 Уравнения Лагранжа

Проще всего подойти к уравнению Лагранжа, рассматривая пример механической системы (рис. 4.2).



**16.1.1.1.11.1.1      Рис. 4.2**

Кинетическая энергия движущегося тела с массой  $M$  равна

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2. \quad (4.51)$$

##### 16.1.1.1.12 Потенциальная энергия пружины

$$V = \int_{x_0}^x Kx dx = \frac{1}{2} Kx^2. \quad (4.52)$$

По второму закону Ньютона уравнение движения тела будет (силой трения пренебрегаем):

$$M \ddot{x} + Kx = 0. \quad (4.53)$$

Дифференцируя соотношение (4.51) сначала по  $\dot{x}$ , а затем по  $t$ , имеем

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right] = M \ddot{x}. \quad (4.54)$$

Дифференцируя соотношение (4.52) по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx. \quad (4.55)$$

Складывая соотношения (4.54) и (4.55) и учитывая уравнение (4.43), получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (4.56)$$

являющееся частным случаем уравнения движения Лагранжа для системы без потерь:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \quad (4.57)$$

В уравнении (4.57) переменные  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) называются **обобщенными координатами**. Термин “обобщенные координаты” пришел из классической механики, хотя по сути это те же переменные состояния системы.

Введем обозначение

$$L\left(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\right)=T\left(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}\right)-V(\mathbf{x}), \quad (4.58)$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор переменных состояния системы. Функция (4.58) называется **лагранжианом** системы. С учетом обозначения (4.58) уравнение (4.57) для консервативной (без потерь энергии) системы в случае отсутствия внешних воздействий можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right)=\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} L. \quad (4.59)$$

Уравнение (4.59) известно как **уравнение Эйлера – Лагранжа**.

Уравнение движения (4.59) может быть выведено из вариационного принципа Даламбера. Этот принцип состоит в том, что любая динамическая система под действием консервативных сил движется с минимумом средней по времени разности между кинетической и потенциальной энергиями. Это означает, что

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad \text{или} \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0, \quad (4.60)$$

где  $\delta$  означает соответствующую вариацию.

Найдем вариацию лагранжиана  $\delta L$ :

$$\delta L = \left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right) \delta \dot{\mathbf{x}} + (\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} L) \delta \mathbf{x} \quad (4.61)$$

с нулевыми граничными условиями на концах интервала  $(t_1, t_2)$ , т.е.  $\delta \mathbf{x}(t_1) = \delta \mathbf{x}(t_2) = 0$ .

Подставляя выражение (4.61) в формулу (4.60), получим

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right) \delta \dot{\mathbf{x}} dt + \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} L) \delta \mathbf{x} dt = \\ &= \left(\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} L\right) \delta \mathbf{x} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right) \delta \mathbf{x} dt + \int_{t_1}^{t_2} (\operatorname{grad}_{\mathbf{x}} L) \delta \mathbf{x} dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} L - \frac{d}{dt} \left(\operatorname{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L\right) \right] \delta \mathbf{x} dt = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Уравнение (4.62) может быть удовлетворено только тогда, когда равно нулю выражение в квадратных скобках. Это условие приводит к уравнению Эйлера – Лагранжа (4.59).

Можно показать, что для систем с потерями (при отсутствии внешних воздействий) уравнение Эйлера – Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \text{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} L \right) - \text{grad}_{\mathbf{x}} L + \text{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} F = 0, \quad (4.63)$$

где  $F$  называется диссипативной (рассеивающей) функцией Релея, представляющей по своему физическому смыслу мощность, теряемую (рассеиваемую) системой.

При воздействии на систему внешних сил уравнение движения Лагранжа принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left( \text{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} T \right) - \text{grad}_{\mathbf{x}} T = \mathbf{r}, \quad (4.64)$$

где  $\mathbf{r}$  – обобщенные силы. Если потери отсутствуют, то  $\mathbf{r} = -\text{grad}_{\mathbf{x}} V$ . При записи уравнения (4.64) учтено, что потенциальная энергия  $V(\mathbf{x})$  не зависит от  $\dot{\mathbf{x}}$ .

16.1.1.1.13 К уравнению Эйлера – Лагранжа

$$\text{grad}_{\mathbf{x}} F - \frac{d}{dt} \left( \text{grad}_{\dot{\mathbf{x}}} F \right) = 0 \quad (4.65)$$

приходят при синтезе оптимальных по заданному критерию систем вариационным методом. Интегрирование уравнения (4.65) возможно лишь в некоторых частных случаях:

- 1) функция  $F$  не зависит от  $\dot{\mathbf{x}}$ , т.е.  $F = F(\mathbf{x}, t)$ ;
- 2) функция  $F$  зависит только от  $\mathbf{x}$  и  $\dot{\mathbf{x}}$ , т.е.  $F = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ ;
- 3) функция  $F$  не зависит от  $\mathbf{x}$ , т.е.  $F = F(\dot{\mathbf{x}})$  или  $F = F(\dot{\mathbf{x}}, t)$ ;
- 4) функция  $F$  линейна относительно  $\dot{\mathbf{x}}$ .

В остальных случаях приходится довольствоваться численными методами.

Следует заметить, что уравнения Эйлера – Лагранжа по своему виду не зависят от выбора системы координат в пространстве состояния.

#### 4.4.2 Уравнения Гамильтона

Обозначим через  $p_i$  компоненту обобщенного момента системы, соответствующую координате  $x_i$ . Тогда

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}. \quad (4.66)$$

Кинетическую энергию системы можно представить как функцию обобщенных скоростей и координат

$$T = T\left(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n, x_1, x_2, \dots, x_n\right)$$

или

$$T_{\dot{\mathbf{x}}} = T_{\dot{\mathbf{x}}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}). \quad (4.67)$$

Функция (4.67) называется функцией Лагранжа для кинетической энергии.

С другой стороны кинетическую энергию можно представить как функцию обобщенного момента и координат

$$T_{\mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = T_{\mathbf{p}}(p_1, p_2, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (4.68)$$

Эта функция называется функцией Гамильтона для кинетической энергии.

Конечно, эти две функции, представленные формулами (4.67) и (4.68) равны:

$$T_{\mathbf{p}} = T_{\dot{\mathbf{x}}}. \quad (4.69)$$

Дифференцируя выражение (4.69) по  $x_i$ , получим

$$\frac{\partial T_{\mathbf{p}}}{\partial x_i} = \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_1} \cdot \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_2} \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_i} + \dots + \frac{\partial T_{\dot{\mathbf{x}}}}{\partial \dot{x}_n} \cdot \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_i}. \quad (4.70)$$

С учетом равенства (4.66), уравнение (4.70) можно записать:

$$\frac{\partial T_p}{\partial x_i} = p_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_i} + p_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial T_x}{\partial x_i} + \dots + p_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_i}. \quad (4.71)$$

16.1.1.1.14 По теореме Эйлера имеем

$$2T_x = x_1 \frac{\partial T_x}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial T_x}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial T_x}{\partial x_n},$$

что, учитывая соотношение (4.66), сведется к уравнению

$$2T_x = p_1 \dot{x}_1 + p_2 \dot{x}_2 + \dots + p_n \dot{x}_n = 2T_p. \quad (4.72)$$

Дифференцируя последнее выражение по  $x_i$ , имеем

$$2 \frac{\partial T_p}{\partial x_i} = p_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_i} + p_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_i} + \dots + p_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial x_i}. \quad (4.73)$$

Вычитая выражение (4.71) из выражения (4.73), получим

$$\frac{\partial T_p}{\partial x_i} = - \frac{\partial T_x}{\partial x_i}. \quad (4.74)$$

Теперь продифференцируем выражение (4.69) по  $p_i$ :

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = \frac{\partial T_x}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial p_i} + \frac{\partial T_x}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial p_i} + \dots + \frac{\partial T_x}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial p_i}$$

или, с учетом соотношения (4.66),

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = p_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial p_i} + \dots + p_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial p_i}. \quad (4.75)$$

Возьмем частную производную по  $p_i$  от выражения (4.72):

$$2 \frac{\partial T_p}{\partial p_i} = p_1 \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial p_i} + p_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial p_i} + \dots + \dot{x}_i + \dots + p_n \frac{\partial \dot{x}_n}{\partial p_i}. \quad (4.76)$$

Вычитая выражение (4.75) из равенства (4.76), получим

$$\frac{\partial T_p}{\partial p_i} = \dot{x}_i. \quad (4.77)$$

Используя формулы (4.77) и (4.66), уравнение Лагранжа (4.64) приведем к виду

$$\dot{p}_i + \frac{\partial T_p}{\partial x_i} = r_i. \quad (4.78)$$

Две системы уравнений (4.77) и (4.78) называются **уравнениями Гамильтона** (для кинетической энергии).

В случае консервативной системы входное воздействие определяется выражением

$$r_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (4.79)$$

где  $V = V(\mathbf{x})$  – потенциальная энергия, не зависящая от  $\dot{\mathbf{x}}$ .

Так как лагранжиан определяется формулой (4.58)

$$L(\dot{x}_i, x_i) = T_x(\dot{x}_i, x_i) - V(x_i),$$

то его частные производные равны

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T_x}{\partial \dot{x}_i} \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial T_x}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

С учетом этого, уравнение Эйлера – Лагранжа (4.59) можно записать в виде



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_x}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial T_x}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left( \text{grad}_x T_x \right) = \text{grad}_x T_x - \text{grad}_x V. \quad (4.80)$$

Функция, выражающая полную энергию системы через координаты  $\mathbf{x}$  и импульсы  $\mathbf{p}$ , называют **функцией Гамильтона**  $H$ . То есть

$$H = T_p + V = H(\mathbf{p}, \mathbf{x}). \quad (4.81)$$

Дифференцируя выражение (4.81), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\partial T_p}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (4.82)$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial T_p}{\partial p_i}. \quad (4.83)$$

Подставляя равенства (4.79), (4.82) и (4.83) в уравнения (4.78) и (4.77), окончательно имеем

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (4.84)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (4.85)$$

Две системы уравнений (4.84) и (4.85) носят название **канонических уравнений Гамильтона**.

Поскольку при движении консервативной системы ее полная энергия остается неизменной,  $H$  – функция Гамильтона не зависит от времени и

$\frac{dH}{dt} = 0$ . Это действительно так, поскольку

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} \right),$$

а выражение в скобках, согласно уравнениям (4.84) и (4.85), равно нулю, если  $H$  явно не зависит от времени.

#### 4.4.3 Уравнение Гамильтона – Якоби

16.1.1.1.15 Во многих случаях решения уравнений (4.84), (4.85) найти не удастся. Один из путей решения этих уравнений состоит в переходе от координат  $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  к другой системе координат  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ , относительно которых преобразованные уравнения имеют более простой вид. Такие преобразования, результатом которых являются новые уравнения все в той же канонической форме, называются каноническими преобразованиями. Отсюда, если

16.1.1.1.16

$$16.1.1.1.17 \quad p_i = p_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad \text{и} \quad x_i = x_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad (4.86)$$

есть канонические преобразования, то уравнения движения в новой системе координат  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$  будут иметь все тот же канонический вид

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i}; \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i}, \quad (4.87)$$

где  $\bar{H}$  - гамильтониан, выраженный в новой системе  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ .

Смысл преобразований (4.86) и перехода к каноническим уравнениям Гамильтона (4.87) состоит в том, чтобы гамильтониан  $\bar{H}$  являлся бы только функцией переменных  $\boldsymbol{\alpha}$  и не зависел бы от  $\boldsymbol{\beta}$ . Такую цель позволяет достичь преобразование

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \quad (4.88)$$

где функция  $S(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})$  называется **производящей функцией**. Уравнения движения в этом случае принимают вид

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i} = 0, \quad (4.89)$$

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} = \text{const.} \quad (4.90)$$

Из первой системы уравнений (4.89) вытекает, что все  $\alpha_i$  – константы. Вторая система уравнений (4.90) следует из того факта, что  $\bar{H}$  зависит только от  $\alpha_i$ , а все  $\alpha_i$  – константы. Системы уравнений (4.89) и (4.90) много проще, чем уравнения (4.84) и (4.85). Дело за малым: нужно определить производящую функцию  $S(\alpha, x)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению в частных производных

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, x_i\right) = \bar{H}(\alpha_i) \quad (4.91)$$

Чтобы немного упростить уравнение (4.91), проведем следующие рассуждения.

Так как  $\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}$ , то

$$\frac{d\beta_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i}. \quad (4.92)$$

Найдем производную по  $t$  от уравнения (4.91), предполагается пока, что  $\bar{H}$  зависит также и от  $\beta_i$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_i} \cdot \frac{d\beta_i}{dt}.$$

Используя равенства (4.87) и (4.92), из последнего уравнения имеем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} - \frac{d\alpha_i}{dt} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \alpha_i} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_i} \cdot \frac{d\alpha_i}{dt} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right). \quad (4.93)$$

Чтобы гамильтониан  $\bar{H}$  не зависел от  $\beta_i$ , первое слагаемое в уравнении (4.93), согласно соотношению (4.89), должно быть равно нулю. Это будет выполняться, если справедливо уравнение

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right).$$

Из последнего соотношения получаем уравнение для S

$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad (4.94)$$

которое называется **уравнением Гамильтона – Якоби**.

К каноническим уравнениям Гамильтона и Гамильтона – Якоби приходят при синтезе оптимальных систем методом максимума Понтрягина или методом динамического программирования Беллмана.

## 17 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ К ИЗУЧЕНИЮ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. – М.: “Наука”, 1970. – 620с.
2. Ту Ю. Современная теория управления. – М.: “Машиностроение”, 1971. – 472с.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: “Наука”, 1966.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Госиздат, 1951.
5. Первозванский А.А. Курс автоматического управления. – М.: “Наука”, 1986.
6. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: “Наука”, 1974.